где P — момент диполя. После несложных выкладок получим:

$$\overline{A}_{ze}(\gamma, z) = \begin{cases} \dfrac{P\mu_e}{cq_e} \dfrac{(\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2) e^{-q_e(z_0 - z)} + (\mu_e q_e k_i^2 - \mu_i q_i k_e^2) e^{-q_e(z_0 + z)}}{\mu_e q_e k_i^2 - \mu_i q_i k_e^2} \\ \qquad \text{при } 0 < z < z_0, \\ \dfrac{2P\mu_e}{c} \dfrac{k_i^2 e^{-q_e(z_0 + z)}}{\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2} \quad \text{при } z > z_0, \end{cases} \tag{29}$$

$$\overline{A}_{zi}(\gamma, z) = \frac{2P}{c} \frac{\mu_i \mu_e k_i^2 e^{-q_e z_0 + q_i z}}{\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2} \quad \text{при } z < 0. \tag{30}$$

При $z_0 = 0$, пользуясь формулой преобразования к переменной r, получим решение Зоммерфельда для диполя на проводящей земле:

$$A_z(r, z) = \frac{2P\mu_e}{c} k_i^2 \int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2 - k_e^2}} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma}{\mu_e k_i^2 \sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + \mu_i k_e^2 \sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} \qquad (z > 0), \tag{31}$$

$$A_z(r, z) = \frac{2P\mu_i\mu_e}{c} k_i^2 \int\limits_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma}{\mu_e k_i^2 \sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + \mu_i k_e^2 \sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} \qquad (z < 0). \tag{32}$$

Эти выражения значительно сложнее для анализа, чем аналогичные соотношения в случае идеально проводящей земли.

§ 4. Магнитная антенна над средой с конечной электропроводностью

Рассмотрим излучатель в форме круглой цилиндрической катушки с обмоткой из проводника, по которому течет ток. Такой излучатель с вертикально расположенной осью называют *вертикальной магнитной антенной*.

Будем считать, что основание рассматриваемой антенны расположено на плоской границе раздела однородного диэлектрика (атмосфера или верхняя среда) и проводника (земля или нижняя среда). Линии тока будем предполагать концентрическими окружностями, лежащими в плоскостях, параллельных поверхности раздела сред, с центрами, расположенными на оси катушки.

В соответствии с соображениями, изложенными в § 1, ввиду отсутствия в рассматриваемой антенне вертикальных токов, допустим, что вертикальная компонента векторного потенциала равна нулю. При этом предположении, в декартовых координатах с осями x_1 и x_2, расположенными в плоскости горизонта, для отыскания поля магнитной антенны получим два уравнения:

$$\Delta A_1 + k^2 A_1 = -\frac{4\pi\mu}{c} j_1^{(e)}, \tag{33}$$

$$\Delta A_2 + k^2 A_2 = -\frac{4\pi\mu}{c} j_2^{(e)}. \tag{34}$$

Преобразуем эти уравнения к цилиндрическим координатам r, φ, z, что даст нам возможность исключить еще одну компоненту векторного потенциала и привести задачу к решению одного скалярного уравнения. Ось системы (r, φ, z) направим по оси катушки, а начало расположим на поверхности раздела сред.

Легко видеть, что компоненты произвольного вектора a, выраженные в декартовой и цилиндрической системах координат, связаны соотношениями

$$a_r = a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi,$$
$$a_\varphi = -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi,$$

откуда, приняв во внимание, что $\cos\varphi = \frac{x_1}{r}$, а $\sin\varphi = \frac{x_2}{r}$, придем к формулам:

$$\begin{aligned} ra_r &= a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ ra_\varphi &= -a_1 x_2 + a_2 x_1. \end{aligned} \tag{35}$$

Их и используем для проведения преобразования. Умножив уравнение (33) на x_1, а уравнение (34) на x_2 и сложив их, с учетом первой из формул (35), получим

$$x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + k^2 r A_r = -\frac{4\pi}{c} r j_r^{(e)}.$$

Далее найдем, что

$$x_1 \Delta A_1 = x_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x_1 A_1}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 x_1 A_1}{\partial^2 x_3} = \Delta x_1 A_1 - 2\frac{\partial A_1}{\partial x_1},$$

$$x_2 \Delta A_2 = \Delta x_2 A_2 - 2\frac{\partial A_2}{\partial x_2},$$

$$x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 = \Delta r A_r - 2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}\right).$$

С помощью выражения (52) гл. XVIII для дивергенции вектора также найдем, что в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right).$$

Объединяя найденные выражения и используя выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах, получим соотношение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial r A_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + r\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} +$$
$$+ k^2 r A_r - \frac{2}{r}\left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) = -\frac{4\pi\mu}{c} j_r^{(e)}.$$

Раскрыв выражения с производными и приняв во внимание, что ввиду осевой симметрии поля рассматриваемой антенны векторный потенциал от координаты φ не зависит, получим окончательно:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}+\left(k^2-\frac{1}{r^2}\right)A_r=-\frac{4\pi\mu}{c}j_r^{(e)}. \tag{36}$$

Аналогично, используя вторую из формул (35), получим второе уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}+\left(k^2-\frac{1}{r^2}\right)A_\varphi=-\frac{4\pi\mu}{c}j_\varphi^{(e)}. \tag{37}$$

Поскольку ток кольцевой, то $j_r^{(e)}=0$, и уравнение (36) удовлетворяется, если положить $A_r=0$. Мы можем поэтому попытаться искать решение, используя только уравнение (37). Если компонента A_φ будет найдена, то компоненты векторов поля смогут быть найдены из следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned}&E_\varphi=\frac{i\omega}{c}A_\varphi,\quad E_r=E_z=0,\\&H_r=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\quad H_\varphi=0,\quad H_z=\frac{1}{r}\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r},\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

которые вытекают, как читателя не затруднит проверить, из формул задачи 2 к § 1 и выражений для векторных операций в цилиндрических координатах. Мы не будем выписывать уравнений для обоих рассматриваемых сред раздельно, имея в виду, что в нижней среде справедливо то же уравнение (37), но без правой части и с соответственно измененным значением параметра k^2.

На границе раздела сред тангенциальные компоненты векторов поля должны быть непрерывны (§ 7, гл. XXIX), что, в силу соотношений (38), даст следующее граничное условие:

$$A_{\varphi e}\big|_{z=0}=A_{\varphi i}\big|_{z=0},\quad \frac{1}{\mu_e}\frac{\partial A_{\varphi e}}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{\mu_i}\frac{\partial A_{\varphi i}}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{39}$$

Как и ранее, здесь индексами e отмечены величины, относящиеся к верхней среде, а индексами i — к нижней. На бесконечности должно быть выполнено условие излучения. Как и в предыдущих параграфах, будем предполагать, что внешняя среда обладает хотя бы ничтожной проводимостью. Это, как мы знаем, автоматически обеспечивает выполнение условия излучения, причем векторы поля экспоненциально убывают на бесконечности.

Перейдем к решению задачи. Исключим с помощью интегрального преобразования дифференциальные операции по координате r. Тем же путем, как и в § 2, найдем, что ядром соответствующего преобразования должна быть функция $J_1(\gamma r)$. Вследствие этого следует воспользоваться преобразованием Ханкеля, выполнив которое приведем граничную задачу (37)—(39) к виду:

$$\frac{\partial^2 \overline{A}_\varphi}{\partial z^2} - (\gamma^2 - k^2)\, \overline{A}_\varphi = -4\pi \frac{\mu}{c} \overline{j}_\varphi^{(e)}, \tag{40}$$

$$\overline{A}_{\varphi e}|_{z=0} = \overline{A}_{\varphi i}|_{z=0}, \quad \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial \overline{A}_{\varphi e}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \overline{A}_{\varphi i}}{\partial z}\Big|_{z=0}, \tag{41}$$

где

$$\overline{A}_\varphi \equiv \int_0^\infty A_\varphi J_1(\gamma r)\, r\, dr, \quad \overline{j}_\varphi^{(e)} \equiv \int_0^\infty j_\varphi^{(e)} J_1(\gamma r)\, r dr. \tag{42}$$

Заметив, что уравнение (40) совпадает с уравнением (10), рассмотренным в § 2, его общее решение запишем в той же форме:

$$\overline{A}_\varphi = \frac{2\pi}{c} \frac{\mu}{q} \left[e^{qz} \left(B_1 - \int_0^z \overline{j}_\varphi^{(e)} e^{-q\zeta}\, d\zeta \right) + e^{-qz} \left(B_2 + \int_0^z \overline{j}_\varphi^{(e)} e^{q\zeta}\, d\zeta \right) \right], \tag{43}$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные, а через $q \equiv \sqrt{\gamma^2 - k^2}$ обозначен корень из $\gamma^2 - k^2$ с положительной вещественной частью. Решение (43), вообще говоря, справедливо и для верхней и для нижней среды, но, конечно, при различных значениях постоянных B_1, B_2 и величин, зависящих от характеристик среды. Чтобы обеспечить обращение в нуль функции $\overline{A}_\varphi$ при $z \to \pm\infty$, для внешней среды следует положить

$$B_1 = B_{1e} = \int_0^\infty \overline{j}_\varphi^{(e)} e^{-q\zeta}\, d\zeta, \tag{44}$$

а для нижней, ввиду отсутствия в ней сторонних токов, положить

$$B_2 = B_{2i} = 0. \tag{45}$$

Учитывая граничные условия (41), для определения постоянных B_{1i} и B_{2e} получим систему уравнений:

$$\frac{\mu_e}{q_e}(B_{1e} + B_{2e}) = \frac{\mu_i}{q_i} B_{1i},$$
$$B_{1e} - B_{2e} = B_{1i},$$

откуда

$$B_{2e} = \frac{\mu_i q_e - \mu_e q_i}{\mu_i q_e + \mu_e q_i}, \tag{46}$$

$$B_{1i} = \frac{2\mu_e q_i}{\mu_i q_e + \mu_e q_i}. \tag{47}$$

Перейдем к вычислению B_{1e}. Плотность тока, текущего в катушке антенны, будем считать не зависящей от r и z и равной j_0 (равномерное распределение тока). Тогда

$$\overline{j}_{\varphi}^{(e)}=\begin{cases} j_0 \int\limits_{r_1}^{r_2} J_1(\gamma r)\, r\, d\gamma & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ 0 & \text{при } z<0,\ z>z_1, \end{cases}$$

где z_1 — координата верхней плоскости обмотки катушки, а r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы обмотки.

Пренебрежем толщиной катушки, устремив r_2 к r_1, но сохраним текущий через катушку полный ток неизменным, считая плотность j_0 возрастающей так, что произведение $j_1 \equiv j_0(r_2-r_1)$ сохраняет неизменное значение. Применив теорему о среднем, при этом получим:

$$\overline{j}_{\varphi}^{(e)}=\begin{cases} j_1 J_1(\gamma r_1)\, r_1 & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ 0 & \text{при } z<0,\ z>z_1. \end{cases}$$

Величину j_1 можно считать здесь плотностью кругового поверхностного тока, текущего по цилиндру $r=r_1$. Отсюда, в силу равенства (45),

$$B_{1e}=j_1 \frac{1-e^{-q_e z_1}}{q_e} J_1(\gamma r_1)\, r_1.$$

Отметим также, что для $z>z_1$ входящие в соотношение (43) интегралы имеют значения:

$$\int\limits_0^z \overline{j}_{\varphi}^{(e)} e^{-q\zeta}\, d\zeta = j_1 \frac{1-e^{-q_e z_1}}{q_e} J_1(\gamma r_1)\, r_1 = B_{1e},$$

$$\int\limits_0^z \overline{j}_{\varphi}^{(e)} e^{q\zeta}\, d\zeta = j_1 \frac{e^{q_e z_1}-1}{q_e} J_1(\gamma r_1)\, r_1.$$

Устремляя z_1 к нулю и одновременно увеличивая j_1 так, чтобы произведение $I=j_1 z_1$ оставалось неизменным, перейдем к случаю *витка* радиуса r_1, по которому течет ток силой I. При этом получим:

$$\lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z>z_1}} \int\limits_0^z \overline{j}_{\varphi}^{(e)} e^{-q\zeta}\, d\zeta = \lim_{\substack{z_1 \to 0 \\ z>z_1}} \int\limits_0^z \overline{j}_{\varphi}^{(e)} e^{q\zeta}\, d\zeta = B_{1e} = I J_1(\gamma r_1)\, r_1 \quad (z>0). \qquad (48)$$

Из соотношений (46)—(48) и (44) для круглого витка получим

$$\overline{A}_{\varphi}=\frac{4\pi\mu_e\mu_i r_1 I J_1(\gamma r_1)}{c(\mu_i q_e+\mu_e q_i)} e^{-q_e z} \quad (z>0),$$

$$\overline{A}_{\varphi}=\frac{4\pi\mu_e\mu_i r_1 I J_1(\gamma r_1)}{c(\mu_i q_e+\mu_e q_i)} e^{q_i z} \quad (z<0).$$

Перейдем, наконец, к случаю *магнитного диполя*, для чего устремим радиус r_1 витка к нулю, одновременно увеличивая I так,

чтобы *магнитный момент витка* $M=\pi r_1^2 I$ сохранял неизменное значение. Принимая во внимание, что, в силу разложения (14) гл. XIII, при $r_1 \to 0$ функция $J_1(\gamma r_1) \to \frac{1}{2}\gamma r_1$, получим:

$$\overline{A_\varphi}=\frac{2\mu_e\mu_i M\gamma}{c(\mu_i q_e+\mu_e q_i)}e^{-q_e z} \quad (z>0),$$

$$\overline{A_\varphi}=\frac{2\mu_e\mu_i M\gamma}{c(\mu_i q_e+\mu_e q_i)}e^{q_i z} \quad (z<0).$$

Пользуясь обратным преобразованием Ханкеля (85) гл. XXXIII, найдем выражение для компоненты A_φ векторного потенциала поля магнитного диполя в форме:

$$\overline{A_\varphi}=\frac{2\mu_e\mu_i}{c}M\int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}J_1(\gamma r)\gamma^2\,d\gamma}{\mu_i\sqrt{\gamma^2-k_e^2}+\mu_e\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} \quad (z>0), \tag{49}$$

$$\overline{A_\varphi}=\frac{2\mu_e\mu_i}{c}M\int\limits_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}J_1(\gamma r)\gamma^2\,d\gamma}{\mu_i\sqrt{\gamma^2-k_e^2}+\mu_e\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} \quad (z<0). \tag{50}$$

Эти выражения формально и решают задачу о поле магнитного диполя, расположенного на границе проводящей среды. Мы придадим им, однако, другой вид и покажем, что для некоторых случаев поле диполя может быть выражено через элементарные функции.

Приняв во внимание, что в силу формулы (22) гл. XIII $\gamma J_1(\gamma r)=-\frac{d}{dr}J_0(\gamma r)$, и проинтегрировав соотношения (49) и (50) по r, получим:

$$A_\varphi=-\frac{2\mu_e\mu_i}{c}M\frac{\partial\Pi}{\partial r}, \tag{51}$$

где

$$\Pi=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}J_0(\gamma r)\gamma\,d\gamma}{\mu_i\sqrt{\gamma^2-k_e^2}+\mu_e\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} \quad (z>0), \tag{52}$$

$$\Pi=\int\limits_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}J_0(\gamma r)\gamma\,d\gamma}{\mu_i\sqrt{\gamma^2-k_e^2}+\mu_e\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} \quad (z<0). \tag{53}$$

Учитывая, что магнитная проницаемость большинства реальных сред очень близка к единице, будем далее считать, что

$$\mu_e=\mu_i=1.$$

При этом условии, умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения интеграла (52) на $\left(\sqrt{\gamma^2-k_e^2}-\sqrt{\gamma^2-k_i^2}\right)$, получим:

$$\Pi=\frac{1}{k_i^2-k_e^2}\int_0^\infty e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}J_0(\gamma r)\left(\sqrt{\gamma^2-k_e^2}-\sqrt{\gamma^2-k_i^2}\right)\gamma\,d\gamma=$$

$$=\frac{1}{k_i^2-k_e^2}\left[\int_0^\infty e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}J_0(\gamma r)\sqrt{\gamma^2-k_e^2}\,\gamma\,d\gamma-\right.$$

$$-\int_0^\infty e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}J_0(\gamma r)\sqrt{\gamma^2-k_i^2}\,\gamma\,d\gamma+$$

$$\left.+\int_0^\infty\left(e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}-e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}\right)J_0(\gamma r)\sqrt{\gamma^2-k_i^2}\,\gamma\,d\gamma\right]$$

Воспользуемся уже встречавшейся нам выше формулой

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}J(\gamma y)\,\gamma d\gamma=\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Дифференцируя ее дважды по x, получим

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}J(\gamma y)\sqrt{\gamma^2-k^2}\,\gamma\,d\gamma=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

в силу чего вышенаписанное выражение можно записать в виде

$$\Pi=\frac{1}{k_i^2-k_e^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{ik_e\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{e^{ik_i\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{k_i^2-k_e^2}\int_0^\infty\left(e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}-e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}\right)J_0(\gamma r)\sqrt{\gamma^2-k_i^2}\,\gamma\,d\gamma. \qquad (54)$$

Можно показать, что при $z\to0$, $r>0$ последний интеграл стремится к нулю*. Мы опустим здесь это простое, но длинное доказательство. При тех же условиях, в силу тождества

$$\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{r^2+z^2}=\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r^2+z^2},$$

получим:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\right]_{z=0}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\right]_{z=0}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right).$$

---

* См., например, Г. А. Гринберг [21], стр. 464.

Произведя соответствующие преобразования в соотношении (54), придем к *формуле Ван-дер-Поля:*

$$\Pi|_{z=0} = \frac{1}{k_i^2 - k_e^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_e r}}{r} - \frac{e^{ik_i r}}{r} \right), \tag{55}$$

позволяющей определить поле на поверхности раздела сред (поверхности земли).

ЗАДАЧИ

1. Исследовать случай, когда нижняя среда является идеальным проводником.
2. Пользуясь формулой (55), исследовать поля электрического и магнитного векторов на поверхности раздела сред.

§ 5. Поле произвольной системы излучателей

Предположим теперь, что над плоской поверхностью раздела двух сред, из которых одна является диэлектриком, а другая — проводником, расположена произвольная ограниченная в пространстве система токов.

Магнитную проницаемость обеих сред будем считать одинаковой и равной единице. Поставим целью найти векторный потенциал электромагнитного поля этой системы токов

Плоскость раздела сред примем за плоскость x_1x_2 прямоугольной декартовой системы координат $x_1x_2x_3$ с осью x_3, направленной в сторону диэлектрика В этой системе координат компоненты векторного потенциала системы токов удовлетворяют трем скалярным неоднородным уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta A_\alpha + k^2 A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} j_\alpha^{(e)} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \tag{56}$$

а векторы поля выражаются через векторный потенциал по формулам:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{i\omega}{c} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) + A_\alpha \right], \\ H_\alpha &= \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}. \end{aligned} \tag{57}$$

По § 7 гл. XXIX на границе раздела сред должны быть непрерывны тангенциальные компоненты электрического и магнитного векторов. В силу равенств (57) это приводит к следующим граничным условиям для компонент векторного потенциала:

$$\begin{aligned} &A_\alpha|_{x_3=+0} = A_\alpha|_{x_3=-0} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \\ &\left.\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = \left.\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_3}\right|_{x_3=-0} \qquad (\alpha = 1,\ 2), \\ &\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)\Bigg|_{x_3=+0} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \right)\Bigg|_{x_3=-0}, \end{aligned} \tag{58}$$