Произведя соответствующие преобразования в соотношении (54), придем к *формуле Ван-дер-Поля:*

$$\Pi\big|_{z=0}=\frac{1}{k_i^2-k_e^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik_e r}}{r}-\frac{e^{ik_i r}}{r}\right), \qquad (55)$$

позволяющей определить поле на поверхности раздела сред (поверхности земли).

ЗАДАЧИ

1. Исследовать случай, когда нижняя среда является идеальным проводником.
2. Пользуясь формулой (55), исследовать поля электрического и магнитного векторов на поверхности раздела сред.

§ 5. Поле произвольной системы излучателей

Предположим теперь, что над плоской поверхностью раздела двух сред, из которых одна является диэлектриком, а другая — проводником, расположена произвольная ограниченная в пространстве система токов.

Магнитную проницаемость обеих сред будем считать одинаковой и равной единице. Поставим целью найти векторный потенциал электромагнитного поля этой системы токов

Плоскость раздела сред примем за плоскость x_1x_2 прямоугольной декартовой системы координат $x_1x_2x_3$ с осью x_3, направленной в сторону диэлектрика В этой системе координат компоненты векторного потенциала системы токов удовлетворяют трем скалярным неоднородным уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta A_\alpha+k^2A_\alpha=-\frac{4\pi}{c}\,j_\alpha^{(e)}\qquad(\alpha=1,\ 2,\ 3), \qquad (56)$$

а векторы поля выражаются через векторный потенциал по формулам:

$$\begin{aligned}E_\alpha&=\frac{i\omega}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)+A_\alpha\right],\\ H_\alpha&=\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}.\end{aligned} \qquad (57)$$

По § 7 гл. XXIX на границе раздела сред должны быть непрерывны тангенциальные компоненты электрического и магнитного векторов. В силу равенств (57) это приводит к следующим граничным условиям для компонент векторного потенциала:

$$\begin{aligned}&A_\alpha\big|_{x_3=+0}=A_\alpha\big|_{x_3=-0}\qquad(\alpha=1,\ 2,\ 3),\\ &\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=+0}=\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=-0}\qquad(\alpha=1,\ 2),\\ &\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=+0}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x^3}\right)\bigg|_{x_3=-0},\end{aligned} \qquad (58)$$

где обозначения $x_3=+0$ и $x_3=-0$ указывают, что берутся предельные значения соответствующих величин при приближении к поверхности $x_3=0$ соответственно сверху и снизу. Индексы e и i, применявшиеся в предыдущих параграфах, мы здесь не используем, чтобы не усложнять обозначений.

Преобразуем задачу (57)—(58), исключив с помощью интегральных преобразований дифференциальные операции по переменным x_1 и x_2. Дифференциальные выражения по x_1 и x_2, входящие в систему уравнений (56), имеют вид $\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_j^2}$. С выражениями этого вида мы уже встречались в § 1 гл. XXXV, где установили, что при изменении переменной в интервале $(-\infty, \infty)$ к ним следует применять преобразование Фурье. Таким образом, мы должны дважды применить преобразование Фурье по координатам x_1 и x_2. Осуществив это, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2\overline{\overline{A}}_\alpha}{dx_3^2}-q^2\overline{\overline{A}}_\alpha=-\frac{4\pi}{c}\,\overline{\overline{j}}{}_\alpha^{(e)}, \tag{59}$$

где

$$\overline{\overline{A}}_\alpha=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)\,e^{-i(\zeta_1x_1+\zeta_2x_2)}\,dx_1\,dx_2, \tag{60}$$

$$\overline{\overline{j}}{}_\alpha^{(e)}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}j_\alpha^{(e)}(x_1,\ x_2,\ x_3)\,e^{-i(\zeta_1x_1+\zeta_2x_2)}\,dx_1\,dx_2, \tag{61}$$

$$q^2\equiv\zeta_1^2+\zeta_2^2-k^2. \tag{62}$$

и граничным условиям:

$$\overline{\overline{A}}_\alpha\big|_{x_3=+0}=\overline{\overline{A}}_\alpha\big|_{x_3=-0}\qquad(\alpha=1,\ 2,\ 3), \tag{63}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{\overline{A}}_\alpha}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0}=\left.\frac{\partial\overline{\overline{A}}_\alpha}{\partial x_3}\right|_{x_3=-0}\qquad(\alpha=1,\ 2), \tag{64}$$

$$\left.\frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1+i\zeta_2\overline{\overline{A}}_2-\frac{\partial\overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\right|_{x_3=+0}=\left.\frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1+i\zeta_2\overline{\overline{A}}_2-\frac{\partial\overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\right|_{x_3=-0}. \tag{65}$$

Найдя решение системы (59), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности и граничным условиям (63)—(65), мы получим возможность, используя формулы обратного преобразования Фурье, представить компоненты искомого векторного потенциала поля в форме интегралов от известных величин:

$$A_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{A}}_\alpha(\zeta_1,\ \zeta_2,\ x_3)\,e^{i(\zeta_1x_1+\zeta_2x_2)}\,d\zeta_1\,d\zeta_2, \tag{66}$$

что и даст решение поставленной задачи.

Выкладки, приводящие к определению величин $\overline{\overline{A}}_\alpha$ из системы (59) и условий (63)—(65), существенно облегчаются тем, что каждое из первых двух уравнений (59) можно решать независимо от остальных уравнений. Действительно, граничные условия (63)—(65) можно разбить на группы:

$$\overline{\overline{A}}_1 \big|_{x_3=+0} = \overline{\overline{A}}_1 \big|_{x_3=-0}, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{A}}_1}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=+0} = \frac{\partial \overline{\overline{A}}_1}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=-0}, \tag{67}$$

$$\overline{\overline{A}}_2 \big|_{x_3=+0} = \overline{\overline{A}}_2 \big|_{x_3=-0}, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{A}}_2}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=+0} = \frac{\partial \overline{\overline{A}}_2}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=-0}, \tag{68}$$

$$\overline{\overline{A}}_3 \big|_{x_3=+0} = \overline{\overline{A}}_3 \big|_{x_3=-0}, \qquad \frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1 + i\zeta_2\overline{\overline{A}}_2 - \frac{\partial \overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=+0} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1 + i\zeta_2\overline{\overline{A}}_2 - \frac{\partial \overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=-0}. \tag{69}$$

Каждая из первых двух групп условий независима от остальных, откуда и вытекает сделанное утверждение.

Рассматриваемое обстоятельство особенно существенно тогда, когда свойства среды зависят от одной из координат (меняются с высотой). Выбрав в качестве последней координату x_3, можно решать задачу последовательно, найдя сначала функции $\overline{\overline{A}}_1$ и $\overline{\overline{A}}_2$ и затем подставив их в третье уравнение (см. задачи 2 и 3).

Из условий (67)—(69) также следует, что при наличии системы токов, параллельных границе раздела сред, нормальную к границе составляющую векторного потенциала нельзя положить равной нулю, так как тогда нельзя удовлетворить граничным условиям (69) Однако, если горизонтальный ток линеен, например, для определенности, течет вдоль оси x_1, то можно положить $A_2 = 0$. При этом, как мы увидим в следующем параграфе. система граничных условий (67)—(69) может быть удовлетворена.

ЗАДАЧИ

1. Составить систему уравнений, определяющих векторный потенциал поля произвольной системы излучателей, для случая, когда свойства среды зависят от одной из координат Применяя преобразование Фурье, привести эту систему к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Указание. Использовать систему уравнений (*) задачи 1 к § 1.

2. Показать, что система уравнений предыдущей задачи распадается на систему двух уравнений Гельмгольца и одно уравнение с переменными коэффициентами, причем все эти уравнения могут быть решены последовательно. Свойства среды считать изменяющимися непрерывным образом (поверхности раздела отсутствуют).

3. Составить граничные условия для случая произвольной системы горизонтальных токов.

4. Выяснить возможность использования преобразования Фурье вместо преобразования Ханкеля для решения задачи, рассмотренной в § 2.