§ 6. Горизонтальный излучатель над средой с конечной электропроводностью

Под *горизонтальным излучателем* будем понимать ограниченную в пространстве систему токов, параллельных некоторому направлению на плоскости раздела двух сред. Направив по нему ось x_1, в соответствии с замечаниями в конце предыдущего параграфа положим компоненту A_2 векторного потенциала равной нулю (ось x_3, как и выше, предполагается перпендикулярной поверхности раздела сред). Тогда для определения поля горизонтального излучателя получим два уравнения:

$$\Delta A_1 + k^2 A_1 = -\frac{4\pi}{c} j_1^{(e)}, \tag{70}$$

$$\Delta A_3 + k^2 A_3 = 0, \tag{71}$$

решения которых, в силу соотношений (58), должны быть найдены при следующих граничных условиях на поверхности раздела:

$$A_1 |_{x_3=+0} = A_1 |_{x_3=-0}, \qquad \left.\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = \left.\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=-0}, \tag{72}$$

$$A_3 |_{x_3=+0} = A_3 |_{x_3=-0}, \qquad \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=+0} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=-0}. \tag{73}$$

Кроме того, на бесконечности должно удовлетворяться условие излучения. Как и в § 5, предполагаем, что магнитная проницаемость обеих сред равна единице.

Двукратное применение преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2, согласно изложенному в § 5, приведет нас к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида (59):

$$\frac{d^2\overline{\overline{A}}_1}{dx_3^2} - q^2\overline{\overline{A}}_1 = -\frac{4\pi}{c}\overline{\overline{j}}_1, \tag{74}$$

$$\frac{d^2\overline{\overline{A}}_3}{dx_3^2} - q^2\overline{\overline{A}}_3 = 0, \tag{75}$$

$$q^2 \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - k^2, \tag{76}$$

и системе граничных условий, которым должны удовлетворять их решения, вида (63)—(65):

$$\overline{\overline{A}}_1 |_{x_3=+0} = \overline{\overline{A}}_1 |_{x_3=-0}, \qquad \left.\frac{\partial\overline{\overline{A}}_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = \left.\frac{\partial\overline{\overline{A}}_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=-0}, \tag{77}$$

$$\overline{\overline{A}}_3 |_{x_3=+0} = \overline{\overline{A}}_3 |_{x_3=-0}, \qquad \frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1 - \frac{\partial\overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=+0} = \frac{1}{k^2}\left(i\zeta_1\overline{\overline{A}}_1 - \frac{\partial\overline{\overline{A}}_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=-0}. \tag{78}$$

Кроме того, решения системы (74)—(75) должны стремиться к нулю при $x_3 \to \infty$ по условию излучения.

Найдем сначала решение уравнения (74) при граничных условиях (77). Общий интеграл уравнения (74) *

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{2\pi}{cq}\left[e^{qx_3}\left(B_1 - \int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{-q\zeta}\,d\zeta\right) + e^{-qx_3}\left(B_2 + \int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{q\zeta}\,d\zeta\right)\right], \quad (79)$$

где B_1, B_2 — произвольные постоянные, а q — тот корень из q^2, вещественная часть которого положительна. Величины, относящиеся к верхней и нижней средам, будем в дальнейшем, как и ранее, отмечать индексами e и i.

По условиям на бесконечности

$$B_{1e} = \int_0^{\infty} \overline{\overline{j}}_1 e^{-q\zeta}\,d\zeta, \quad (80)$$

$$B_{2i} = 0.$$

Для определения постоянных B_{2e} и B_{1i} имеем два уравнения:

$$\frac{1}{q_e}(B_{1e} + B_{2e}) = \frac{1}{q_i} B_{1i},$$

$$B_{1e} - B_{2e} = B_{1i},$$

откуда

$$B_{2e} = \frac{q_e - q_i}{q_e + q_i} B_{1e},$$

$$B_{1i} = \frac{2q_i}{q_e + q_i} B_{1e}.$$

Введем обозначения:

$$\psi_1 \equiv \frac{1}{B_{1e}} \int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{-q\zeta}\,d\zeta, \qquad \psi_2 \equiv \frac{1}{B_{1e}} \int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{q\zeta}\,d\zeta. \quad (81)$$

При этих обозначениях найдем, что

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{2\pi B_{1e}}{cq_e}\left[e^{q_e x_3}(1 - \psi_1) + e^{-q_e x_3}\left(\frac{q_e - q_i}{q_e + q_i} + \psi_2\right)\right] \quad (x_3 > 0), \quad (82)$$

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{4\pi B_{1e}}{c(q_e + q_i)} e^{q_i x_3} \quad (x_3 < 0), \quad (83)$$

причем, конечно, предполагается, что в нижней среде сторонние токи отсутствуют. В частности, при $x_3 = 0$

$$\overline{\overline{A}}_1 \big|_{x_3 = +0} + \overline{\overline{A}}_1 \big|_{x_3 = -0} = \frac{4\pi B_{1e}}{c(q_e + q_i)}. \quad (84)$$

Перейдем к уравнению (75). Его общий интеграл

$$\overline{\overline{A}}_3 = C_1 e^{qx_3} + C_2 e^{-qx_3},$$

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, § 28.

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. По условиям на бесконечности для верхней и нижней сред

$$C_{1e} = C_{2i} = 0.$$

Первое из условий (78) даст

$$C_{2e} = C_{1i} \equiv C,$$

в силу чего

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{A}}_3 &= Ce^{-q_e x_3}, \quad x_3 > 0, \\ \overline{\overline{A}}_3 &= Ce^{q_i x_3}, \quad x_3 < 0. \end{aligned} \right\} \tag{85}$$

Для определения C воспользуемся вторым из условий (78), которое с учетом соотношения (84) даст

$$\frac{1}{k_e^2}\left(\frac{4\pi i\zeta_1 B_{1e}}{c(q_e+q_i)} + q_e C\right) = \frac{1}{k_i^2}\left(\frac{4\pi i\zeta_1 B_{1e}}{c(q_e+q_i)} - q_i C\right).$$

Отсюда, приняв во внимание, что в силу формулы (76)

$$k_e^2 - k_i^2 = q_i^2 - q_e^2 = (q_i - q_e)(q_i + q_e),$$

получим

$$C = \frac{4\pi i\zeta_1 B_{1e}}{c\left(q_e k_i^2 + q_i k_e^2\right)}. \tag{86}$$

Теперь компоненты A_1 и A_3 векторного потенциала могут быть представлены в форме интегралов

$$A_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{A}}_\alpha e^{+i(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \qquad (\alpha = 1,\ 3), \tag{87}$$

и, тем самым, задача определения поля горизонтального излучателя решена полностью.

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи линейной антенны и горизонтально ориентированного диполя.

Линейную антенну будем рассматривать как предельный случай излучателя квадратного сечения с равномерно распределенным по сечению током плотностью j_0, когда сторона квадрата, длину которой обозначим через $2a$, стремится к нулю. Ось излучателя будем считать расположенной на расстоянии $x_3 = h$ от поверхности раздела со средней точкой на оси x_3. Длину излучателя обозначим через $2l$.

Осуществляя преобразование Фурье, найдем, что

$$\overline{\overline{j}}_1 = \begin{cases} j_0 \int_{-l}^{+l} e^{i\zeta_1 x_1}\, dx_1 \int_{-a}^{a} e^{i\zeta_2 x_2}\, dx_2 = \dfrac{4j_0}{\zeta_1\zeta_2} \sin\zeta_1 l \sin\zeta_2 a & \text{при } h-a < x_3 < h+a, \\ 0 & \text{при } x_3 < h-a,\quad x_3 > h+a, \end{cases}$$

откуда

$$\int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{-q\zeta}\, d\zeta = \begin{cases} \dfrac{4j_0}{\zeta_1\zeta_2} \sin\zeta_1 l \sin\zeta_2 a \, \dfrac{e^{-q_e h}}{q_e} (e^{q_e a} - e^{-q_e a}) & \text{при } x_3 > h + a, \\ 0 & \text{при } x_3 \leqslant h - a. \end{cases}$$

Устремим теперь a к нулю, одновременно увеличивая плотность тока j_0 так, чтобы произведение $I = 4j_0 a^2$, равное полному току через сечение излучателя, сохраняло прежнее значение. В результате получим:

$$\int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{-q\zeta}\, d\zeta = \begin{cases} \dfrac{2I \sin\zeta_1 l}{\zeta_1} e^{-q_e h} & \text{при} \quad x_3 > h, \\ 0 & \text{при} \quad x_3 < h. \end{cases}$$

Аналогично найдем, что

$$\int_0^{x_3} \overline{\overline{j}}_1 e^{q\zeta}\, d\zeta = \begin{cases} \dfrac{2I \sin\zeta_1 l}{\zeta_1} e^{q_e h} & \text{при} \quad x_3 > h, \\ 0 & \text{при} \quad x^3 < h. \end{cases}$$

Пользуясь этими выражениями, в силу формул (79)—(81) и (86), получим:

$$B_{1e} = \frac{2I \sin\zeta_1 l}{\zeta_1} e^{-q_e h},$$

$$\psi_1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_3 > h, \\ 0 & \text{при} \quad x_3 \leqslant h, \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} e^{2qh} & \text{при} \quad x_3 > h, \\ 0 & \text{при} \quad x_3 \leqslant h, \end{cases}$$

$$C = \frac{8\pi i I \sin\zeta_1 l}{c(q_e k_i^2 + q_i k_e^2)},$$

откуда, в силу формул (82), (83) и (85), для линейной антенны:

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{4\pi I \sin\zeta_1 l}{c\zeta_1 q_e (q_e + q_i)} \left[(q_e + q_i) e^{q_e h} + (q_e - q_i) e^{-q_e h}\right] e^{-q_e x_3} \qquad (x_3 > h),$$

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{4\pi I \sin\zeta_1 l}{c\zeta_1 q_e (q_e + q_i)} e^{-q_e h} \left[(q_e + q_i) e^{q_e x_3} + (q_e - q_i) e^{-q_e x_3}\right] \quad (0 < x_3 \leqslant h),$$

$$\overline{\overline{A}}_1 = \frac{8\pi I \sin\zeta_1 l}{c\zeta_1 (q_e + q_i)} e^{-q_e h} e^{q_i x_3} \qquad (x_3 \leqslant 0),$$

$$\overline{\overline{A}}_3 = \frac{8\pi i I \sin\zeta_1 l}{c(q_e k_i^2 + q_i k_e^2)} e^{-q_e h} e^{-q_e x_3} \quad (x_3 > 0),$$

$$\overline{\overline{A}}_3 = \frac{8\pi i I \sin\zeta_1 l}{c(q_e k_i^2 + q_i k_e^2)} e^{-q_e h} e^{q_i x_3} \quad (x_3 < 0).$$

Чтобы перейти от случая линейной антенны к случаю горизонтально ориентированного диполя, устремим l к нулю, но так, чтобы произведение $P=2Il$ оставалось неизменным. Это даст:

$$\overline{\overline{A}}_1=\frac{2\pi P}{cq_e(q_e+q_i)}\left[(q_e+q_i)e^{q_eh}+(q_e-q_i)e^{-q_eh}\right]e^{-q_ex_3}\qquad(x_3>h),$$

$$\overline{\overline{A}}_1=\frac{2\pi P}{cq_e(q_e+q_i)}e^{-q_eh}\left[(q_e+q_i)e^{q_ex_3}+(q_e-q_i)e^{-q_ex_3}\right]\qquad(0<x_3\leqslant h),$$

$$\overline{\overline{A}}_1=\frac{4\pi P}{c(q_e+q_i)}e^{-q_eh}e^{q_ix_3}\qquad(x_3\leqslant 0),$$

$$\overline{\overline{A}}_3=\frac{4\pi i\zeta_1 P}{c(q_ek_i^2+q_ik_e^2)}e^{-q_eh}e^{-q_ex_3}\quad(x_3>0),$$

$$\overline{\overline{A}}_3=\frac{4\pi i\zeta_1 P}{c(q_ek_i^2+q_ik_e^2)}e^{-q_eh}e^{q_ix_3}\quad(x_3<0).$$

Из полученных соотношений легко получить формулы Гершельмана и Зоммерфельда, данные ими для диполя, расположенного на поверхности раздела сред. Положив в вышенаписанных соотношениях $h=0$ и применив обратное преобразование Фурье, получим:

$$A_1=\frac{P}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(q_ex_3+ix_1\zeta_1+ix_2\zeta_2)}}{q_e+q_i}d\zeta_1\,d\zeta_2\quad(x_3>0),$$

$$A_1=\frac{P}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(q_ix_3-ix_1\zeta_1-ix_2\zeta_2)}}{q_e+q_i}d\zeta_1\,d\zeta_2\quad(x_3<0),$$

$$A_3=\frac{iP}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_1e^{-(q_ex_3+ix_1\zeta_1+ix_2\zeta_2)}}{q_ek_i^2+q_ik_e^2}d\zeta_1\,d\zeta_2\quad(x_3>0),$$

$$A_3=\frac{iP}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_1e^{(q_ix_3-ix_1\zeta_1-ix_2\zeta_2)}}{q_ek_i^2+q_ik_e^2}d\zeta_1\,d\zeta_2\quad(x_3<0).$$

Введем цилиндрические координаты $(r,\ \varphi,\ z)$, направив ось z по оси x_3 и отсчитывая угол φ так, чтобы было

$$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi,$$

а также положим

$$\zeta_1=\gamma\cos\psi,\quad \zeta_2=\gamma\sin\psi,$$

откуда, в частности, будет следовать, что

$$q_i=\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2-k_i^2}=\sqrt{\gamma^2-k_i^2},\quad q_e=\sqrt{\gamma^2-k_e^2}.$$

При этом первый из написанных выше интегралов может быть преобразован к виду:

$$A_1=\frac{P}{\pi c}\int\limits_0^{\infty}d\gamma\,\frac{\gamma e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}}}{\sqrt{\gamma^2-k_e^2}+\sqrt{\gamma^2-k_i^2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-ir\gamma\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Согласно известной формуле теории бесселевых функций

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\sin\varphi)} d\varphi,$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\gamma\cos(\psi-\varphi)} d\psi = J_0(\gamma r),$$

в силу чего окончательно получим

$$A_1 = \frac{2P}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}} J_0(\gamma r)\gamma\, d\gamma}{N(\gamma)} \qquad (z > 0),$$

где

$$N(\gamma) = \sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + \sqrt{\gamma^2 - k_i^2}.$$

Аналогичным путем также найдем, что

$$A_1 = \frac{2P}{c} \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} J_0(\gamma r)\gamma\, d\gamma}{N(\gamma)} \qquad (z < 0),$$

$$A_3 = \frac{2(k_i^2 - k_e^2)P}{c} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2-k_e^2}} J_1(\gamma r)\gamma^2 d\gamma}{N_1(\gamma)N(\gamma)} \qquad (z > 0),$$

$$A_3 = \frac{2(k_i^2 - k_e^2)P}{c} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2-k_i^2}} J_1(\gamma r)\gamma^2 d\gamma}{N_1(\gamma)N(\gamma)} \qquad (z < 0),$$

где

$$N_1(\gamma) = k_i^2\sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + k_e^2\sqrt{\gamma^2 - k_i^2}.$$

Это и есть упомянутые выше формулы Гершельмана и Зом фельда.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что на границе раздела сред:

$$A_1 = \frac{2P}{c(k_e^2 - k_i^2)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ik_i r}}{r} - \frac{e^{ik_e r}}{r} \right).$$

2. Исследовать случай, когда нижняя среда — идеальный проводник.