Глава XXXVII

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Уравнения движения вязкой жидкости

В § 2 гл. VIII мы вывели уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

и выяснили, что для соблюдения закона сохранения массы наряду с системой (1) движение любой жидкости должно удовлетворять также уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0. \tag{2}$$

Напомним, что ρ — плотность жидкости, $v_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ — компоненты вектора $\mathbf{v}$ скорости жидкости, а p — давление.

Имея в виду обобщить уравнения Эйлера на случай вязкой жидкости, определим, как меняется импульс $\rho\mathbf{v}$ единицы объема идеальной жидкости. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Приняв во внимание формулы (1) и (2), после несложных преобразований получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\rho v_i v_\alpha.$$

Введя символ

$$\delta_{ij}\equiv\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

запишем последнее соотношение в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i=-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

где

$$\Pi_{ij}\equiv p\delta_{ij}+\rho v_i v_j. \tag{4}$$

Система уравнений (3) представляет преобразованную форму системы уравнений Эйлера.

Чтобы выяснить физический смысл величин Π_{ij}, проинтегрируем уравнения (3) по произвольному объему V и применим к их правым частям формулу Остроградского — Гаусса. Это даст

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V}\rho v_i\,dV = -\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\Pi_{i\alpha}n_\alpha\right)dS \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где $\mathcal{F}V$ — поверхность, ограничивающая объем V, а n_α ($\alpha=1$, 2, 3) — направляющие косинусы внешней нормали к $\mathcal{F}V$. Слева здесь стоят скорости изменения i-тых компонент импульса жидкости, содержащейся в объеме V. Стало быть, величины $-\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\Pi_{i\alpha}n_\alpha\right)dS$ представляют потоки сквозь поверхность $\mathcal{F}V$ количества соответствующих компонент импульса, передаваемые из объема V за единицу времени сквозь элемент поверхности dS. Если нормаль к поверхности $\mathcal{F}V$ направлена вдоль оси j, то

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\Pi_{i\alpha}n_\alpha\right)dS = -\Pi_{ij}dS,$$

откуда ясно, что $(-\Pi_{ij})$ есть количество i-той компоненты импульса, передаваемое в направлении оси j сквозь единичную площадку, нормальную этой оси, за единицу времени. Вектор $\mathbf{\Pi}_i$ с компонентами Π_{i1}, Π_{i2}, Π_{i3} будем называть *потоком i-й компоненты импульса.*

Выражение (4) показывает, что поток импульса в идеальной жидкости возникает вследствие действия сил давления и механического перемещения жидкости. Между соприкасающимися частями вязкой жидкости, кроме сил давления, нормальных к границе соприкосновения, действуют силы, лежащие в плоскости, касательной к границе, и стремящиеся уменьшить относительную скорость соприкасающихся частей жидкости. Это последнее явление и называется *вязкостью*. Наличие вязкости, очевидно, должно привести к появлению в выражении компонент вектора $\mathbf{\Pi}_i$ членов, характеризующих вязкий перенос импульса. Совокупность этих членов мы обозначим через $(-\sigma'_{ij})$, в соответствии с чем вектор $\mathbf{\Pi}_i$ потока i-й компоненты импульса в вязкой жидкости определим с помощью соотношений:

$$\Pi_{ij} \equiv p\delta_{ij} - \sigma'_{ij} + \rho v_i v_j. \tag{5}$$

Зависимость величин σ'_{ij} от скорости жидкости может быть установлена из следующих соображений. При отсутствии перемещения одних частей жидкости относительно других член σ'_{ij} должен обращаться в нуль. Следовательно, величина σ'_{ij} зависит не от самой скорости жидкости, но лишь от ее производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ по координатам. Эту зависимость в первом приближении будем считать линейной.

При равномерном вращении жидкости как целого относительные движения частей жидкости отсутствуют. Следовательно, величины σ'_{ij} зависят не непосредственно от производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, но лишь от таких комбинаций их, при которых из соотношения

$$v_\alpha = \omega_\beta x_\gamma - \omega_\gamma x_\beta \quad \text{при} \quad \alpha, \beta, \gamma = \begin{cases} 1,\ 2,\ 3, \\ 3,\ 2,\ 1, \\ 2,\ 1,\ 3, \end{cases}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты вектора угловой скорости жидкости, вытекает, что $\sigma'_{ij} = 0$. Линейными комбинациями производных, удовлетворяющими этому требованию, являются выражения:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (\alpha \neq \beta).$$

Вектор наиболее общего вида, который можно образовать из этих выражений, будет иметь компоненты:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta_1 \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

где величины η и η_1 не зависят от скорости жидкости. Это выражение обычно преобразуют к виду:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \zeta \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

при котором сумма членов с $i = j$ не зависит от η. Величины η и ζ называют *коэффициентами вязкости*. Для реальных жидкостей оба эти коэффициента положительны.

Заметив, что система (3) связывает производные i-х компонент импульса единицы объема жидкости с потоком этих компонент и, следовательно, ее вид не зависит от конкретной картины сил, действующих в жидкости, для отыскания уравнений движения вязкой жидкости подставим в систему (3) выражения (5) при только что определенных общих выражениях для членов σ'_{ij}. В результате получим наиболее общую систему уравнений движения вязкой жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3} \delta_{i\alpha} \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \zeta \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \quad (6)$$

Если коэффициенты η и ζ постоянны во всей массе жидкости, эта система примет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\Delta v_i+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (7)$$

где Δ — оператор Лапласа. Наконец, если жидкость несжимаема, то $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$, и мы придем к системе уравнений *Навье—Стокса*:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta v_i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (8)$$

где $\nu\equiv\frac{\eta}{\rho}$ — коэффициент *кинематической вязкости*.

К системе уравнений движения вязкой жидкости при решении конкретных задач следует присоединить еще уравнение неразрывности (2), вид которого одинаков для идеальной и вязкой жидкостей.

Граничные условия для системы уравнений движения вязкой жидкости установим из физических соображений.

Благодаря действию сил молекулярного сцепления, слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердой стенке, движется (или покоится) вместе с этой последней. Поэтому на границе, разделяющей твердую и жидкую среды, следует принять

$$v_i=v_{ic} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (9)$$

где v_{ic} — компоненты скорости перемещения границы (твердой стенки).

По тем же соображениям, скорости соприкасающихся жидкостей на разделяющей их границе также должны быть равны. Однако, так как граница соприкосновения жидкостей деформируема, мы должны ввести добавочное условие, что силы, с которыми жидкости действуют друг на друга на границе, равны по величине и противоположны по направлению. Для математической формулировки последнего условия заметим, что на основании второго закона Ньютона компоненты вектора силы, действующей на элемент поверхности dS, равны потоку соответствующих компонент импульса через этот элемент поверхности. Относя силу к единице площади, для ее компонент P_i получим выражение:

$$P_i=\sum_{\alpha=1}^{3}\Pi_{i\alpha}n_\alpha=\rho v_i\sum_{\alpha=1}^{3}v_\alpha n_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{3}\sigma_{i\alpha}n_\alpha \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где n_α $(\alpha=1,\ 2,\ 3)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности, а

$$\sigma_{ij}\equiv-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij}.$$

Величины, относящиеся к одной из жидкостей, будем отмечать верхним индексом a, а к другой — верхним индексом b. При этом условие равновесия сил примет вид $P_i^{(a)} = P_i^{(b)}$. Заметив, что $n_j^{(a)} = -n_j^{(a)}$, и $v_j^{(a)} = v_j^{(b)}$ запишем условие равновесия в окончательной форме:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{i\alpha}^{(a)} n_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{i\alpha}^{(b)} n_\alpha \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{10}$$

где в качестве величин n_α можно подставить либо $n_\alpha^{(a)}$, либо $n_\alpha^{(b)}$.

Отметим, что силу, приложенную к единичной площадке, произвольным образом ориентированной в вязкой жидкости, можно разложить на две составляющих: нормальную

$$P_n = \sum_{\alpha=1}^{3} P_\alpha n_\alpha = \rho \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha^2 n_\alpha^2 - \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\beta\alpha} n_\alpha n_\beta$$

и тангенциальную, выражение для которой мы выписывать не будем. Совокупность членов в выражениях для этих составляющих, не зависящую от компонент скорости v_i, называют *напряжениями*, соответственно *нормальным* и *скалывающим* (или тангенциальным). Таким образом, граничное условие (10) представляет условие равенства напряжений в обеих жидкостях на границе их соприкосновения.

Перейдем, наконец, к граничному условию на свободной поверхности вязкой жидкости. Напряжение на свободной поверхности, очевидно, должно быть равно нулю, что приведет к условию

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{i\alpha} n_\alpha = 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

или

$$p n_i - \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma'_{i\alpha} n_\alpha = 0, \tag{11}$$

где n_α $(\alpha=1,\ 2,\ 3)$ — направляющие косинусы нормали к свободной поверхности.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что решения системы уравнений Эйлера (1) в общем случае не могут удовлетворить граничному условию на твердой неподвижной стенке вида $v_i = 0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, справедливому в случае вязкой жидкости.

2. Показать, что компоненты вектора силы, действующей на единицу площади твердой плоской неподвижной поверхности, расположенной в вязкой несжимаемой жидкости, перпендикулярно оси x_1, равны

$$P_1 = p - 2\eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad P_2 = -\eta\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \quad P_3 = -\eta\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right).$$

3. Показать, что если коэффициенты η и ζ постоянны во всей массе вязкой жидкости, то скалывающие напряжения в жидкости не зависят от давления, но лишь от ее внутреннего движения.

4. Показать, что в цилиндрических координатах система уравнений Навье—Стокса и уравнение неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}-\frac{v_r v_\varphi}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0.$$

§ 2. Движение вязкой жидкости в полупространстве над вращающимся диском бесконечного радиуса

Во всех случаях, когда нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не равны нулю в силу данных задачи, точное решение этих уравнений представляет значительные трудности и в большей мере опирается на интуицию и догадку, чем на какой-либо широко применимый метод. Примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости приводятся в этом и следующем параграфах.

Рассмотрим задачу Кармана: бесконечный плоский диск вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω; надо найти установившееся движение вязкой жидкости, соприкасающейся с диском и заполняющей полупространство над ним.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, направив ось z по оси диска и выбрав его поверхность в качестве плоскости $z=0$.

В каждой из плоскостей $z=\text{const}$ будем различать два движения: круговое, обусловленное вязкими силами в увлекаемой диском жидкости, и радиальное, направленное по радиусам от оси z и обусловленное силами инерции. Кроме того, должно существовать вертикальное движение, восполняющее отток жидкости от оси z в радиальном движении. Скорость вертикального движения, направленного к диску, должна возрастать по мере удаления от диска, соответственно возрастающему общему количеству жидкости, оттекающей от оси z в части пространства между диском и рассматриваемой плоскостью.