3. Показать, что если коэффициенты η и ζ постоянны во всей массе вязкой жидкости, то скалывающие напряжения в жидкости не зависят от давления, но лишь от ее внутреннего движения.

4. Показать, что в цилиндрических координатах система уравнений Навье—Стокса и уравнение неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}-\frac{v_r v_\varphi}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0.$$

§ 2. Движение вязкой жидкости в полупространстве над вращающимся диском бесконечного радиуса

Во всех случаях, когда нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не равны нулю в силу данных задачи, точное решение этих уравнений представляет значительные трудности и в большей мере опирается на интуицию и догадку, чем на какой-либо широко применимый метод. Примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости приводятся в этом и следующем параграфах.

Рассмотрим задачу Кармана: бесконечный плоский диск вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω; надо найти установившееся движение вязкой жидкости, соприкасающейся с диском и заполняющей полупространство над ним.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, направив ось z по оси диска и выбрав его поверхность в качестве плоскости $z=0$.

В каждой из плоскостей $z=\text{const}$ будем различать два движения: круговое, обусловленное вязкими силами в увлекаемой диском жидкости, и радиальное, направленное по радиусам от оси z и обусловленное силами инерции. Кроме того, должно существовать вертикальное движение, восполняющее отток жидкости от оси z в радиальном движении. Скорость вертикального движения, направленного к диску, должна возрастать по мере удаления от диска, соответственно возрастающему общему количеству жидкости, оттекающей от оси z в части пространства между диском и рассматриваемой плоскостью.

Мы потребуем, чтобы осевая составляющая скорости v_z на бесконечности оставалась конечной. Это возможно только в том случае, если скорость v_r радиального оттока жидкости от оси z неограниченно убывает с ростом z. В свою очередь это предполагает неограниченное убывание сил инерции, что возможно только при стремлении скорости v_φ кругового движения к нулю при $z \to \infty$. При $z=0$ скорость жидкости совпадает со скоростью поверхности диска.

Таким образом, придем к следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} v_r|_{z=0}=0, \quad v_\varphi|_{z=0}=\omega r, \quad v_z|_{z=0}=0, \\ v_r|_{z=\infty}=0, \quad v_\varphi|_{z=\infty}=0, \quad |v_z|\,|_{z=\infty}<\infty. \end{gathered} \tag{12}$$

Будем искать решение, предполагая, что скорости радиального и кругового движений пропорциональны расстоянию от оси вращения диска, а вертикальная скорость и давление постоянны в каждой из плоскостей, параллельных плоскости диска. Совместимость этих предположений с данными задачи будет вытекать из непротиворечивости результатов, к которым мы придем. Если бы возникло противоречие, то пришлось бы, используя те или иные физические соображения, выдвинуть иную *гипотезу о свойствах искомого решения* и сделать новую попытку прийти к непротиворечивым результатам.

В соответствии со сделанными предположениями будем искать решение в виде

$$v_r=r\omega F(\zeta), \quad v_\varphi=r\omega G(\zeta), \quad v_z=\sqrt{\nu\omega}\,H(\zeta), \quad p=-\rho\nu\omega P(\zeta),$$

где

$$\zeta=\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\,z.$$

Множители перед функциями F, G, H и P выбраны так, чтобы эти функции были безразмерны, кроме того, вместо z введен безразмерный аргумент ζ.

Подстановка величин (5) в уравнения Навье—Стокса и неразрывности, записанные в цилиндрических координатах (см. задачу 4 к § 1), и в соотношения (12) для определения функций F, G, H и P приведет нас к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} F^2-G^2+F'H=F'', \quad 2FG+G'H=G'', \\ HH'=P'+H'', \quad 2F+H'=0, \end{gathered} \tag{13}$$

и граничным условиям:

$$\begin{gathered} F|_{\zeta=0}=0, \qquad G|_{\zeta=0}=1, \qquad H|_{\zeta=0}=0, \\ F|_{\zeta=\infty}=0, \qquad G|_{\zeta=\infty}=0, \qquad |H|\,|_{\zeta=\infty}<\infty. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, задачу для системы уравнений в частных производных мы привели к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, чем мы здесь и ограничимся. Отметим лишь, что решение последней задачи в классе функций с непрерывными первыми и вторыми производными существует. Функции F, G и H были вычислены с помощью численного интегрирования. Их графики читатель может найти в книге Ландау и Лифшица [42].

Если на основании физических соображений считать, что решения стационарных задач гидродинамики вязкой жидкости в классе ограниченных функций с непрерывными первыми и вторыми производными единственны, то решение системы (13), удовлетворяющее граничным условиям (14), и есть искомое.

§ 3. Движение вязкой жидкости в плоском диффузоре

Рассмотрим двугранный угол, образованный двумя плоскими стенками. Предположим, что вдоль линии пересечения стенок происходит истечение вязкой несжимаемой жидкости, текущей далее между стенок. Найдем установившееся движение жидкости.

Линию пересечения стенок примем за ось z цилиндрических координат. Координату φ будем отсчитывать от плоскости, делящей двугранный угол пополам.

По соображениям симметрии движение будем считать плоским (чисто радиальным), вследствие чего положим:

$$v_\varphi = v_z = 0, \quad v_r = v(r, \varphi).$$

При этом уравнения Навье — Стокса и неразрывности (см. задачу 4 к § 1) примут вид

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{15}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \tag{17}$$

На стенках скорость жидкости равна нулю, т. е.

$$v\big|_{\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}} = 0, \tag{18}$$

где α — угол между стенками.

Из уравнения (17) ясно, что произведение rv зависит только от φ.

Введя безразмерную функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv,$$

из уравнения (16) получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\varphi},$$