дифференциальных уравнений, чем мы здесь и ограничимся. Отметим лишь, что решение последней задачи в классе функций с непрерывными первыми и вторыми производными существует. Функции F, G и H были вычислены с помощью численного интегрирования. Их графики читатель может найти в книге Ландау и Лифшица [42].

Если на основании физических соображений считать, что решения стационарных задач гидродинамики вязкой жидкости в классе ограниченных функций с непрерывными первыми и вторыми производными единственны, то решение системы (13), удовлетворяющее граничным условиям (14), и есть искомое.

§ 3. Движение вязкой жидкости в плоском диффузоре

Рассмотрим двугранный угол, образованный двумя плоскими стенками. Предположим, что вдоль линии пересечения стенок происходит истечение вязкой несжимаемой жидкости, текущей далее между стенок. Найдем установившееся движение жидкости.

Линию пересечения стенок примем за ось z цилиндрических координат. Координату φ будем отсчитывать от плоскости, делящей двугранный угол пополам.

По соображениям симметрии движение будем считать плоским (чисто радиальным), вследствие чего положим:

$$v_\varphi = v_z = 0, \quad v_r = v(r, \varphi).$$

При этом уравнения Навье—Стокса и неразрывности (см. задачу 4 к § 1) примут вид

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{15}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \tag{17}$$

На стенках скорость жидкости равна нулю, т. е.

$$v\Big|_{\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}} = 0, \tag{18}$$

где α — угол между стенками.

Из уравнения (17) ясно, что произведение rv зависит только от φ. Введя безразмерную функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv,$$

из уравнения (16) получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\varphi},$$

откуда

$$\frac{p}{\rho}=\frac{12\nu^2}{r}u(\varphi)+f(r).$$

Подставив это выражение в уравнение (15), получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+4u+6u^2=\frac{1}{6\nu^2}r^3f'(r).$$

Левая часть этого уравнения зависит только от φ, а правая — только от r, следовательно, они равны постоянной, которую обозначим через $2\mu_1$. Приняв это во внимание, получим:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+4u+6u^2=2\mu_1,\\ f'(r)=12\mu_1\nu^2\frac{1}{r^3}.\end{gathered}\tag{19}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$f(r)=-\frac{6\mu_1\nu^2}{r^2}+\text{const},$$

вследствие чего давление определится выражением

$$p(r,\ \varphi)=\frac{6\nu^2\rho}{r^2}(2u-\mu_1)+p_0,$$

где p_0 — произвольная постоянная.

Первое из уравнений (19) умножим на du и проинтегрируем, что даст

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+2u^2+2u^3-2\mu_1u-2\mu_2=0,\tag{20}$$

где μ_2 — постоянная. Разделив здесь переменные, получим

$$\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{-u^3-u^2+\mu_1u+\mu_2}}=\pm d\varphi,\tag{21}$$

откуда

$$2\varphi=\int\limits_{u_1}^{u}\frac{d\xi}{\pm\sqrt{-\xi^3-\xi^2+\mu_1\xi+\mu_2}},\tag{22}$$

где u_1 — еще одна произвольная постоянная.

Для определения постоянных μ_1, μ_2 и u_1 получим три уравнения:

$$\int\limits_{\alpha/2}^{\alpha/2}\rho vr\ d\varphi=6\nu\rho\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}u\ d\varphi=Q,\tag{23}$$

$$u(\varphi)\,\Big|_{\varphi=\frac{\alpha}{2}}=0,\qquad u(\varphi)\,\Big|_{\varphi=-\frac{\alpha}{2}}=0,\tag{24}$$

первое из которых выражает требование, чтобы через любое сечение $r=\text{const}$ проходило одинаковое количество $Q>0$ жидкости, а вторые два являются следствием граничного условия (18).

Безразмерную величину

$$R \equiv \frac{Q}{\nu\rho}, \tag{25}$$

характеризующую соотношение между расходом жидкости и ее кинематической вязкостью, называют *числом Рейнольдса* для рассматриваемого течения.

Таким образом, первоначальную задачу мы привели к задаче, в которой неизвестная функция u определяется некоторыми интегральными соотношениями. Оказывается, что при этом мы получаем возможность изучить ряд свойств решения первоначальной задачи.

Найдем условия, при которых движение жидкости симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и скорость жидкости v на каждой из поверхностей $r = \text{const}$ монотонно меняется от 0 при $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ до $v_0 = r u_0$ при $\varphi = 0$.

В точке максимума $\frac{du}{d\varphi} = 0$. Из соотношения (20) поэтому следует, что u_0 — корень уравнения

$$-\xi^3 - \xi^2 + \mu_1 \xi + \mu_2 = 0,$$

вследствие чего выражение под знаком корня в уравнении (22) можно записать в форме

$$-\xi^3 - \xi^2 + \mu_1 \xi + \mu_2 = (u_0 - \xi)\,[\xi^2 + (1 + u_0)\,\xi + q_0],$$

где

$$q_0 \equiv u_0^2 + u_0 - \mu_1.$$

Заметив, что при $\varphi = 0$ должно быть $u = u_0$, запишем уравнение (22) в виде:

$$2\varphi = \int_0^{u_0} \frac{d\xi}{\pm\sqrt{(u_0 - \xi)\,[\xi^2 + (1 + u_0)\,\xi + q_0]}}. \tag{26}$$

Здесь вместо постоянных μ_1 и μ_2 фигурируют две новые неизвестные постоянные u_0 и q_0. Используя граничное условие (24), для их определения получим уравнение

$$\int_0^{u_0} \frac{d\xi}{\sqrt{(u_0 - \xi)\,[\xi^2 + (1 + u_0)\,\xi + q_0]}} = \alpha. \tag{27}$$

Подставив в граничное условие (23) выражение (21) для $d\varphi$ и приняв во внимание, что функция $u(\varphi)$ симметрична относительно плоскости $\varphi = 0$, получим второе уравнение:

$$6\int_0^{u_0} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(u_0 - \xi)\,[\xi^2 + (1 + u_0)\,\xi + q_0]}} = \mathrm{R}. \tag{28}$$

Из уравнения (27) легко видеть, что α — монотонно убывающая функция по каждому из аргументов u_0 и q_0. Следовательно, это уравнение при фиксированном α определяет u_0 как монотонно убывающую функцию q_0. Анализ уравнения (28) показывает, что R, как функция u_0, q_0, монотонно убывает с ростом q_0 и возрастает с ростом u_0.

Фиксируем значение α. Наименьшее возможное значение q_0 равно нулю, так как при $q_0 < 0$ интеграл в левой части формулы (27) становится комплексным. Значению $q_0 = 0$ соответствует наибольшее возможное при данном α значение u_0, определяющее наибольшее, совместимое с данным α, значение $R = R_{кр}$. При этом с ростом α величина $R_{кр}$, очевидно, убывает. При $R > R_{кр}$ движение рассматриваемого типа в диффузоре невозможно, так как становится несовместимым с уравнениями (27) и (28). Более подробный анализ (см. задачу 1) показывает, что при $\alpha \to \pi$ значение $R_{кр}$ стремится к нулю, а при $\alpha \to 0$ значение $R_{кр}$ стремится к бесконечности.

Таким образом, с ростом R при $R = R_{кр}$ симметричное расходящееся ($v \geqslant 0$) при всех φ движение в диффузоре становится невозможным и сменяется другим типом движения. Формальное исследование соотношений (22)—(24) показывает, что функция $u(\varphi)$ при $R > R_{кр}$ имеет несколько максимумов и минимумов, причем с ростом R число чередующихся максимумов и минимумов возрастает, а в точках минимума $u(\varphi) < 0$. Следовательно, должны существовать области как вытекающих, так и втекающих в диффузор потоков. Практически однако такого типа движения, при R заметно превосходящих $R_{кр}$, не реализуются, так как они оказываются неустойчивыми. Именно, при $R > R_{кр}$ малые внешние возмущения, а также малые отклонения граничных условий приводят к резкому изменению движения, приобретающему вследствие этого нестационарный турбулентный характер. Число $R = R_{кр}$ называют *критическим числом Рейнольдса*.

ЗАДАЧИ

1. Вывести формулы:

$$\alpha = 2\sqrt{1-2k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}},$$

$$R_{кр} = -6\alpha\frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}\,d\zeta,$$

параметрически связывающие критическое число Рейнольдса $R_{кр}$ с углом α между стенками диффузора. Опираясь на эти формулы, показать, что: 1) при $\alpha \to \pi$ параметр $k \to 0$ и $R_{кр} \to 0$, 2) при $\alpha \to 0$ параметр $k \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $R_{кр} \to \infty$.

Указание. Следует исходить из формул (27) и (28) при $q_0=0$ и ввести подстановки: $\zeta=u_0\cos^2\zeta$, $k^2=\dfrac{u_0}{1+2u_0}$.

2. Показать, что при конфузорном течении, когда вдоль линии пересечения стенок происходит не истечение, а *сток* вязкой жидкости ($Q<0$), возвратного движения жидкости не возникает, именно движение при $r>0$, $\alpha<\pi$ симметрично относительно плоскости $\varphi=0$ и направлено в сторону линии стока при всех значениях числа Рейнольдса: $\mathrm{R}_{\text{кр}}\equiv\dfrac{|Q|}{\rho\nu}$.

Указание. При конфузорном течении функция $u(\varphi)$ является решением уравнения

$$2\varphi=\pm\int\limits_{-u_0}^{u}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+u_0)\left[-\xi^2-(1-u_0)\,\xi+q_0\right]}},$$

где величины u_0, q_0 определяются из условий

$$\alpha=\int\limits_{-u_0}^{0}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+u_0)\left[-\xi^2-(1-u_0)\,\xi+q_0\right]}},$$

$$\mathrm{R}=6\int\limits_{-u_0}^{0}\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{(\xi+u_0)\left[-\xi^2-(1-u_0)\,\xi+q_0\right]}}.$$