ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными*.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными*.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}, \ q = \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad \left(r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ s = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \ t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (3)$$

Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$A(x, y, u, u_x, u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\ldots)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} +$$
$$+ C(\ldots)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (4)$$

есть квазилинейное уравнение второго порядка.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных производных. Так, например, уравнение

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x, y)u=F(x, y) \qquad (5)$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решением уравнения с частными производными (1) называется всякая функция $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

1) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (6)$$

где c — скорость распространения волны в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \qquad (7)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x, y, z). \qquad (8)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (8) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (9)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

Уравнения (6)—(9) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (6)—(9) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.* Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) *решение должно существовать*, 2) *решение должно быть единственным* и 3) *решение должно быть устойчивым.* Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей.*

Глава I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться*, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

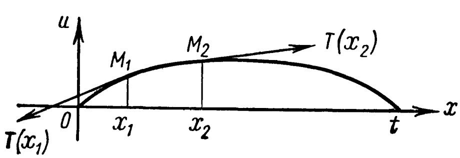

Рис. 1

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox.

Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u(x, t)$, а также