

Анализ упругих деформаций	150
Расширение (153). Компоненты напряжений (153).	
Постоянные упругой податливости и упругой жесткости	154
Плотность упругой энергии (155). Постоянные упругой жесткости кубических кристаллов (156). Объемный модуль упругости и сжимаемость (159).	
Упругие волны в кубических кристаллах	159
Волны в направлении [100] (161). Волны в направлении [110] (161).	
Экспериментальное определение упругих постоянных	166
Упругие постоянные третьего порядка (168).	
Задачи	169
Литература	773

Замечание для читателя: Эта глава включена в книгу для полноты охвата материала и ее можно пропустить при первом чтении.

В настоящей главе мы рассмотрим упругие свойства кристаллов. Будем считать кристалл однородной непрерывной средой, не обращая внимания на тот факт, что в действительности кристалл состоит из дискретных частиц — атомов. Данное приближение, часто называемое континуальным, обычно справедливо для упругих волн, длина которых превышает 10^{-6} см, и, соответственно, для частот, меньших 10^{11} или 10^{12} Гц. Более высокие частоты в настоящее время получить при помощи средств электроники довольно трудно; для изучения более коротких упругих волн используются методы неупругого рассеяния, описанные в гл. 5.

Область частот, для которой справедливо континуальное приближение, имеет большое значение в физике твердого тела. Ультразвуковые волны используются для измерения упругих постоянных, для изучения дефектов решетки, электронной структуры металлов и сверхпроводимости. Имеются, кроме того, многочисленные технологические применения упругих волн в твердых телах.

Основные физические идеи проводимого ниже рассмотрения довольно просты: мы используем закон Гука и второй закон Ньютона, хотя формулы выглядят громоздкими из-за большого

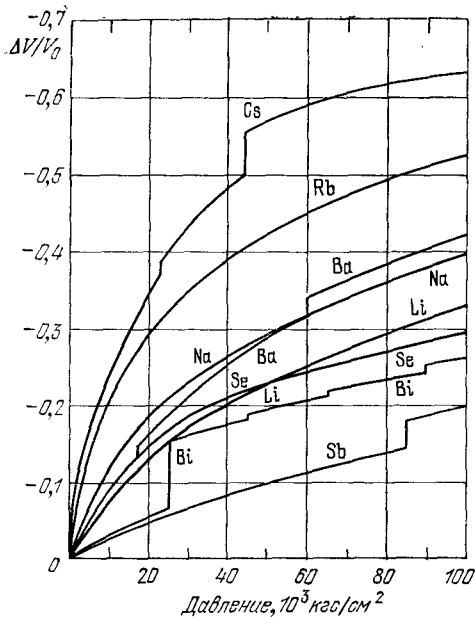


Рис. 4.1. Изменение относительного объема, занимаемого некоторым количеством вещества, в зависимости от изменения давления от 0 до $100\,000 \text{ кг/см}^2$. Значения объемного модуля упругости удовлетворяют закону Гука в той области давлений, в которой начальная ветвь показанных кривых максимально близка к прямой линии, т. е. в пределах до давления порядка 10^1 атмосфер, при котором относительное изменение объема составляет $-0,05$. Вертикальный излом на кривых означает изменение структуры исходного кристалла, а иногда и электронной конфигурации ионных остовов атомов [1]

количества подстрочных индексов. Закон Гука гласит, что в упругом твердом теле деформация прямо пропорциональна напряжению. Закон справедлив только в области малых деформаций (рис. 4.1). Мы говорим, что находимся в *нелинейной области*, когда деформации настолько велики, что закон Гука не выполняется.

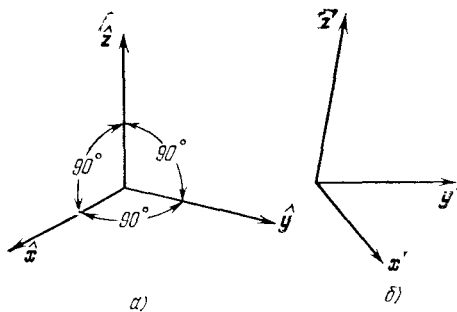
АНАЛИЗ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Обозначим через e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} компоненты тензора деформаций. Определение этим компонентам дадим ниже. Будем рассматривать только бесконечно малые деформации и одинаково обозначать изотермические и адиабатические деформации (измеренные, соответственно, при постоянной температуре и постоянной энтропии). Небольшие различия в значениях изотермических и адиабатических упругих постоянных часто бывают несущественны при комнатной температуре и ниже.

Представим себе, что внутри недеформированного твердого тела помещены три ортогональные оси, определяющиеся единичными векторами \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} (рис. 4.2). Предположим, что в результате малой однородной деформации¹⁾ данная тройка век-

¹⁾ При однородной деформации все элементарные ячейки кристалла деформируются одинаково.

Рис 4.2. Координатные оси для описания упруго деформированного состояния. а) Недеформированное состояние—единичные векторы \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} взаимно перпендикулярны; б) деформированное состояние



торов изменила свою ориентацию, а каждый из векторов — свою длину. Новую тройку векторов обозначим через x' , y' , z' . Новые векторы связаны со старыми соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \epsilon_{xx}) \hat{x} + \epsilon_{xy} \hat{y} + \epsilon_{xz} \hat{z}, \\ y' &= \epsilon_{yx} \hat{x} + (1 + \epsilon_{yy}) \hat{y} + \epsilon_{yz} \hat{z}, \\ z' &= \epsilon_{zx} \hat{x} + \epsilon_{zy} \hat{y} + (1 + \epsilon_{zz}) \hat{z}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Коэффициенты $\epsilon_{\alpha\beta}$ в (4.1) характеризуют деформацию; они безразмерны и величина их при малых деформациях много меньше единицы. Векторы \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} имели единичную длину, но новые векторы x' , y' , z' не обязательно должны иметь единичную длину. Например,

$$x' \cdot x' = 1 + 2\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2, \text{ откуда } x' \approx 1 + \epsilon_{xx} + \dots$$

С точностью до первого порядка величины ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и ϵ_{zz} представляют соответственно относительные изменения длины векторов \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} .

Посмотрим, как повлияет деформация (4.1) на частицу, первоначально расположенную в точке

$$r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Начало координат выбрано в точке, где находится какая-то другая частица. Если деформация однородна (рис. 4.3, а), то после деформации частица окажется в точке¹⁾

$$r' = xx' + yy' + zz'.$$

Поэтому вектор смещения

$$R \equiv r' - r = x(x' - \hat{x}) + y(y' - \hat{y}) + z(z' - \hat{z}), \quad (4.2)$$

¹⁾ Это очевидно, если мы выбираем вектор \hat{x} так, что $r = x\hat{x}$; тогда $r' = xx'$ служит определением x' .

или, из (4.1),

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) \equiv (x\epsilon_{xx} + y\epsilon_{yx} + z\epsilon_{zx})\hat{\mathbf{x}} + (x\epsilon_{xy} + y\epsilon_{yy} + z\epsilon_{zy})\hat{\mathbf{y}} + (x\epsilon_{xz} + y\epsilon_{yz} + z\epsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.3)$$

Выражение для вектора смещения можно записать в более общем виде:

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + v(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + w(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.4)$$

В случае неоднородной деформации (рис. 4.3, б) величины u , v и w должны обозначать локальные деформации. Выбираем начало вектора \mathbf{r} в рассматриваемой области, тогда, сравнивая (4.3) и (4.4) и используя разложение \mathbf{R} в ряд Тейлора (с учетом того, что $\mathbf{R}(0) = 0$), имеем:

$$x\epsilon_{xx} = x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y\epsilon_{yx} = y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{и т. д.} \quad (4.5)$$

Производные в (4.5) не зависят от начала, выбранного для \mathbf{R} .

Обычно пользуются коэффициентами $e_{\alpha\beta}$, а не $\epsilon_{\alpha\beta}$. Определим компоненты деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , используя (4.5), посредством соотношений

$$e_{xx} \equiv \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} \equiv \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{zz} \equiv \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (4.6)$$

Остальные компоненты тензора деформации e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} можно определить как изменения углов между осями: используя (4.1),

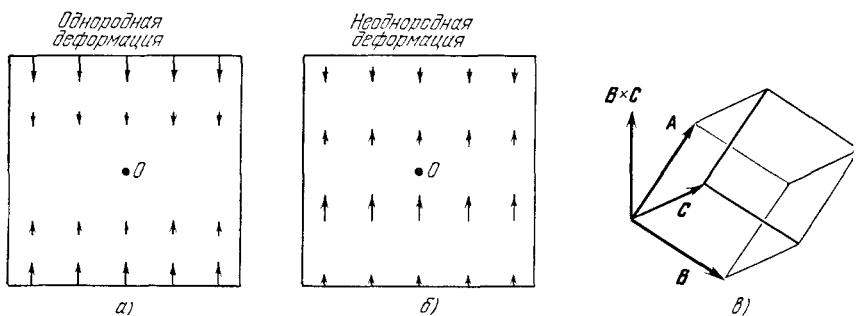


Рис. 4.3. а) Смещение векторов \mathbf{R} [формула (4.4)] при однородной деформации и б) при неоднородной деформации. Начало выбрано в точке O . в) Произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ равно объему параллелепипеда с ребрами \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} . Напомним, что произведение $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ — вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} , и по величине равный площади параллелограмма, построенного на \mathbf{B} и \mathbf{C} как на сторонах.

можно записать:

$$\begin{aligned}
 e_{xy} &\equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \approx \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 e_{yz} &\equiv \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' \approx \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 e_{zx} &\equiv \mathbf{z}' \cdot \mathbf{x}' \approx \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Мы можем заменить знаки приблизительного равенства знаками равенства, если пренебречь членами порядка ε^2 . Шесть коэффициентов $e_{\alpha\beta}$ ($=e_{\beta\alpha}$) полностью определяют деформацию. Определенные таким образом деформации безразмерны.

Расширение. Относительное *увеличение* объема, вызванное деформацией, называется расширением. Расширение отрицательно для гидростатического давления. Единичный куб с ребрами $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ после деформации будет иметь объем

$$V' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \times \mathbf{z}' \tag{4.8}$$

в соответствии с хорошо известной формулой для объема параллелепипеда с ребрами \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' (см. рис. 4.3, в). Из (4.1) имеем:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \times \mathbf{z}' = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & 1 + \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 1 + \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \approx 1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \tag{4.9}$$

При получении выражения (4.9) мы пренебрегли произведениями компонент деформации. Таким образом, для расширения получим:

$$\delta \equiv \frac{V' - V}{V} \approx e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \tag{4.10}$$

Компоненты напряжений. Силу, действующую на единичную площадку в твердом теле, называют напряжением. Имеется девять компонент напряжения: $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$. Большие буквы указывают ось координат, вдоль которой направлено действие силы, а индексы указывают ось координат, вдоль которой направлена нормаль к плоскости, к которой приложена сила. На рис. 4.4 компонента напряжения X_x есть сила, приложенная в направлении оси x к единичной площадке на плоскости, нормаль к которой направлена по оси x . Компонента напряжения X_y есть сила, приложенная в направлении оси x к единичной площадке на плоскости, нормаль к которой направлена по оси y . Нетрудно показать, что число независимых компонент напряжения уменьшается с девяти до шести. Рассмотрим силы, действующие на элементарный куб (рис. 4.5).

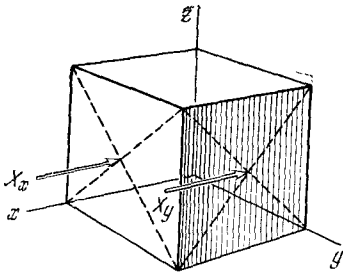


Рис. 4.4. Компонента напряжения X_x есть сила, приложенная в направлении оси x к единичной площадке на плоскости, нормаль к которой направлена по оси x ; компонента напряжения X_y есть сила, приложенная в направлении оси x к единичной площадке на плоскости, нормаль к которой направлена по оси y .

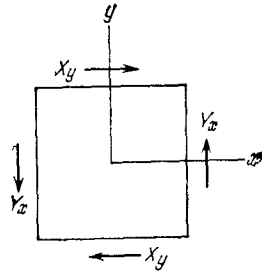


Рис. 4.5. Схема, поясняющая смысл условия $Y_x = X_y$ для тела, находящегося в равновесии. Сумма сил, действующих в направлении оси x , равна нулю. Сумма сил, действующих в направлении оси y , также равна нулю. Полный вращающий момент относительно начала координат также равен нулю, если $Y_x = X_y$.

Из условия, что угловое ускорение отсутствует¹⁾, следует, что полный момент должен быть равен нулю; следовательно,

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \quad (4.11)$$

Итак, в качестве независимых компонент напряжения остаются лишь $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$.

Компоненты напряжения имеют размерность силы на единицу площади или энергии на единицу объема. Компоненты деформации равны отношениям длин и поэтому они безразмерны.

ПОСТОЯННЫЕ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ И УПРУГОЙ ЖЕСТКОСТИ

Закон Гука утверждает, что если деформации достаточно малы, то они пропорциональны напряжениям, т. е. компоненты деформаций являются линейными функциями компонент напряжений:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= S_{11}X_x + S_{12}Y_y + S_{13}Z_z + S_{14}Y_z + S_{15}Z_x + S_{16}X_y, \\ e_{yy} &= S_{21}X_x + S_{22}Y_y + S_{23}Z_z + S_{24}Y_z + S_{25}Z_x + S_{26}X_y, \\ e_{zz} &= S_{31}X_x + S_{32}Y_y + S_{33}Z_z + S_{34}Y_z + S_{35}Z_x + S_{36}X_y, \\ e_{yz} &= S_{41}X_x + S_{42}Y_y + S_{43}Z_z + S_{44}Y_z + S_{45}Z_x + S_{46}X_y, \\ e_{zx} &= S_{51}X_x + S_{52}Y_y + S_{53}Z_z + S_{54}Y_z + S_{55}Z_x + S_{56}X_y, \\ e_{xy} &= S_{61}X_x + S_{62}Y_y + S_{63}Z_z + S_{64}Y_z + S_{65}Z_x + S_{66}X_y. \end{aligned} \quad (4.12)$$

¹⁾ Указанное обстоятельство не исключает задач, в которых есть угловое ускорение; это лишь означает, что для определения упругих постоянных можно использовать статический подход.

С другой стороны, компоненты напряжений являются линейными функциями компонент деформаций:

$$\begin{aligned}
 X_x &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{zx} + C_{16}e_{xy}, \\
 Y_y &= C_{21}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{zx} + C_{26}e_{xy}, \\
 Z_z &= C_{31}e_{xx} + C_{32}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{zx} + C_{36}e_{xy}, \\
 Y_z &= C_{41}e_{xx} + C_{42}e_{yy} + C_{43}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{zx} + C_{46}e_{xy}, \\
 Z_x &= C_{51}e_{xx} + C_{52}e_{yy} + C_{53}e_{zz} + C_{54}e_{yz} + C_{55}e_{zx} + C_{56}e_{xy}, \\
 X_y &= C_{61}e_{xx} + C_{62}e_{yy} + C_{63}e_{zz} + C_{64}e_{yz} + C_{65}e_{zx} + C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Величины S_{11}, S_{12}, \dots называются *постоянными упругой податливости*, или упругими постоянными; величины C_{11}, C_{12}, \dots называются *постоянными упругой жесткости*, или модулями упругости. Применяются и другие наименования.

Размерность величин S_{ij} :

$$[S_{ij}] = \frac{[\text{площадь}]}{[\text{сила}]} \quad \text{или} \quad [S_{ij}] = \frac{[\text{объем}]}{[\text{энергия}]}.$$

Размерность величин C_{ij} :

$$[C_{ij}] = \frac{[\text{сила}]}{[\text{площадь}]} \quad \text{или} \quad [C_{ij}] = \frac{[\text{энергия}]}{[\text{объем}]}.$$

Плотность упругой энергии. Число постоянных S_{ij} и C_{ij} , которое в общем случае равно 36 [уравнения (4.12) и (4.13)], можно уменьшить с помощью некоторых соображений. Плотность упругой энергии U в приближении закона Гука является квадратичной функцией деформаций (вспомните выражение для энергии растянутой пружины). Таким образом, для U можно записать следующее выражение:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^6 \sum_{\mu=1}^6 \tilde{C}_{\lambda\mu} e_{\lambda} e_{\mu}, \tag{4.14}$$

где индексы от 1 до 6 определяются как

$$1 \equiv xx; \quad 2 \equiv yy; \quad 3 \equiv zz; \quad 4 \equiv yz; \quad 5 \equiv zx; \quad 6 \equiv xy. \tag{4.15}$$

Как мы увидим ниже [формула (4.17)], коэффициенты \tilde{C} просто связаны с введенными ранее коэффициентами C [см. (4.13)].

Компоненты напряжений можно найти из производных упругой энергии по соответствующей компоненте деформаций, что следует из определения потенциальной энергии. Рассмотрим напряжение X_x , приложенное к одной из граней единичного куба таким образом, что противоположная грань остается неподвижной. Тогда

$$X_x = \frac{\partial U}{\partial e_{xx}} \equiv \frac{\partial U}{\partial e_1} = \tilde{C}_{11}e_1 + \frac{1}{2} \sum_{\beta=2}^6 (\tilde{C}_{1\beta} + \tilde{C}_{\beta 1}) e_{\beta}. \tag{4.16}$$

Заметим, что в соотношения (4.16), которые связывают напряжения и деформации, входит только комбинация $1/2(\tilde{C}_{\alpha\beta} + \tilde{C}_{\beta\alpha})$. Из этого следует, что постоянные упругой жесткости симметричны относительно перестановки индексов:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{C}_{\alpha\beta} + \tilde{C}_{\beta\alpha}) = C_{\beta\alpha}. \quad (4.17)$$

В результате из 36 постоянных упругой жесткости остается лишь 21.

Постоянные упругой жесткости кубических кристаллов. Число независимых постоянных упругой жесткости может быть уменьшено и дальше, если кристалл обладает теми или иными элементами симметрии. Покажем сейчас, что для кубических кристаллов остаются лишь три независимые постоянные.

Плотность упругой энергии кубического кристалла можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} C_{11} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2} C_{44} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + \\ + C_{12} (e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy}). \quad (4.18)$$

Это выражение не содержит никаких других квадратичных членов, т. е. в нем отсутствуют члены

$$(e_{xx}e_{xy} + \dots), (e_{yz}e_{zx} + \dots), (e_{xx}e_{yz} + \dots). \quad (4.19)$$

Кубические кристаллы имеют, как минимум, четыре поворотные оси симметрии третьего порядка¹⁾. Эти оси совпадают с направлениями типа $\langle 111 \rangle$ (рис. 4.6). Вращение на угол $2\pi/3$ вокруг этих четырех осей приводит к следующим перестановкам осей x, y, z :

$$\begin{aligned} x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, & \quad -x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow -x, \\ x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow x, & \quad --x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow -x, \end{aligned} \quad (4.20)$$

в зависимости от того, какую из осей выбрать за ось вращения. Если воспользоваться, например, первой из этих перестановок, то

$$e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 \rightarrow e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + e_{xx}^2.$$

Аналогичные операции могут быть выполнены и для других членов выражения (4.18), заключенных в круглые скобки. Таким образом, выражение (4.18) является инвариантным относительно рассмотренных операций. Но каждая из сумм в (4.19) является непарной в отношении одного и более индексов. Среди перестановок (4.20) может быть найдена такая, которой соответствует вращение, при котором будет изменяться знак сумм

¹⁾ См. стандартные стереографические проекции элементов симметрии точечных групп кристаллов кубической сингонии в книгах по кристаллографии; класс кубических кристаллов, имеющий наименьшее число осей симметрии, обозначается 23.

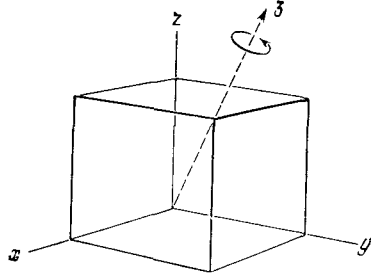


Рис. 4.6. Вращение кубического кристалла вокруг оси z на угол $2\pi/3$ приводит к перестановке осей: $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$

в (4.19), так как, например, $e_{xy} = -e_{x(-y)}$. Таким образом, суммы в (4.19) не являются инвариантными относительно рассматриваемых операций.

Теперь остается только проверить, правильны ли числовые коэффициенты в (4.18). Используя (4.16), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{xx}} = X_x = C_{11}e_{xx} + C_{12}(e_{yy} + e_{zz}). \quad (4.21)$$

Появление в (4.21) члена $C_{11}e_{xx}$ согласуется с (4.13). При дальнейшем сравнении мы видим, что

$$C_{12} = C_{13}, \quad C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0. \quad (4.22)$$

Далее, из (4.18) получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{xy}} = X_y = C_{44}e_{xy}; \quad (4.23)$$

сравнивая с (4.13), имеем

$$C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = C_{65} = 0; \quad C_{66} = C_{44}. \quad (4.24)$$

Таким образом, из выражения (4.18) следует, что для кубических кристаллов набор постоянных упругой жесткости сводится к следующей матрице:

$$\begin{array}{c}
 e_{xx} \quad e_{yy} \quad e_{zz} \quad e_{yz} \quad e_{zx} \quad e_{xy} \\
 \begin{array}{|cccccc}
 X_x & C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 Y_y & C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 Z_z & C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 Y_z & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\
 Z_x & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\
 X_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.25)$$

Для кубических кристаллов постоянные упругой жесткости и податливости связаны между собой следующими соотношениями:

$$C_{44} = 1/S_{44}, \quad C_{11} - C_{12} = (S_{11} - S_{12})^{-1}, \quad C_{11} + 2C_{12} = (S_{11} + 2S_{12})^{-1}. \quad (4.26)$$

Эти соотношения получаются из вычисления матрицы, обратной (4.25).

Изотермические объемные модули упругости и сжимаемость элементов при комнатной температуре

H [a]																		He [e]																	
0.002																		0.00																	
500																		1168																	
Li		Be																		B		C [d]		N [e]		O		F		Ne [a]					
0.116		1.003																		1.78		5.45		0.012						0.010					
8.62		0.997																		0.562		0.183		80						100					
Na		Mg																		Al		Si		P [t]		S [c]		Cl		Ar [a]					
0.068		0.354																		0.722		0.988		0.304		0.178				0.016					
14.7		2.82																		1.385		1.012		3.29		5.62				93.8					
K		Ca		Sc		Ti		V		Cr		Mn		Fe		Co		Ni		Cu		Zn		Ga [b]		Ge		As		Se		Br		Kr [a]	
0.032		0.152		0.435		1.051		1.619		1.901		0.596		1.683		1.914		1.86		1.37		0.598		0.569		0.772		0.394		0.091		0.018			
31.		6.58		2.30		0.951		0.618		0.526		1.65		0.594		0.522		0.538		0.73		1.67		1.76		1.29		2.54		11.0		56			
Rb		Sr		Y		Zr		Nb		Mo		Tc		Ru		Rh		Pd		Ag		Cd		In		Sn [a]		Sb		Te		I		Xe	
0.031		0.116		0.366		0.833		1.702		2.725		(2.97)		3.208		2.704		1.808		1.007		0.467		0.411		1.11		0.383		0.230					
32.		8.62		2.73		1.20		0.587		0.366		(0.34)		0.311		0.369		0.553		0.993		2.14		2.43		0.901		2.61		4.35					
Cs		Ba		La		Hf		Ta		W		Re		Os		Ir		Pt		Au		Hg [a]		Tl		Pb		Bi		Po		At		Rn	
0.020		0.103		0.243		1.09		2.00		3.232		3.72		(4.18)		3.55		2.783		1.732		0.382		0.359		0.430		0.315		(0.26)					
50.		9.97		4.12		0.92		0.50		0.309		0.269		(0.24)		0.282		0.359		0.577		2.60		2.79		2.33		3.17							
Fr		Ra		Ac		Ce [c]		Pr		Nd		Pm		Sm		Eu		Gd		Tb		Dy		Ho		Er		Tm		Yb		Lu			
(0.020)		(0.132)		(0.25)		0.239		0.306		0.327		(0.15)		0.294		0.147		0.383		0.399		0.384		0.397		0.411		0.397		0.133		0.411			
(50.)		(7.6)		(4)		4.18		3.27		3.06		(2.85)		3.40		6.80		2.61		2.51		2.60		2.52		2.43		2.52		7.52		2.43			
Th		Pa		U		Np		Pu		Am		Cm		Bk		Cf		Es		Fm		Md		No		Lw									
0.543		(0.76)		0.987		(0.68)		0.54																											
1.84		(1.3)		1.01		(1.5)		1.9																											

← Объемный модуль упругости, 10^{12} дин/см² (или 10^{11} Н/м²) →
 ← Сжимаемость, 10^{-12} см²/дин (или 10^{-11} м²/Н) →

Таблица составлена по Гшнайнеру [2]. Некоторые значения взяты у Берча из справочника [3]. Если какой-то величиной модуля или сжимаемости необходимо воспользоваться в процессе исследования, то значение этой величины из таблицы нужно проверить по работе-первоисточнику. В круглых скобках приводятся расчетные величины модулей и сжимаемости. Буквы в круглых скобках обозначают кристаллическую форму элемента. Буквы в квадратных скобках обозначают определенную температуру: [a] = -77 °К; [b] = 273 °К; [c] = 1 °К; [d] = 4 °К; [e] = 81 °К.

Объемный модуль упругости и сжимаемость. Рассмотрим однородное расширение $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \delta/3$. Для такой деформации плотность энергии [выражение (4.18)] кубического кристалла равна

$$U = \frac{1}{6} (C_{11} + 2C_{12}) \delta^2. \quad (4.27)$$

Объемный модуль упругости B можно определить с помощью соотношения

$$U = \frac{1}{2} B \delta^2, \quad (4.28)$$

которое эквивалентно выражению $-V dp/dV$, использованному в гл. 3. Для кубического кристалла имеем:

$$B = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}). \quad (4.29)$$

Сжимаемость K определяется как величина, обратная B : $K \equiv 1/B$. Значения величин B и K даны в табл. 4.1.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Рассматривая силы, действующие на элемент объема в кристалле (рис. 4.7), мы можем получить уравнение движения для смещения в направлении оси x :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad (4.30)$$

где ρ — плотность и u — смещение в направлении оси x . Аналогичные уравнения будут иметь место для осей y и z . Из соотношений (4.13) и (4.25) следует, что для кубического кристалла справедливо выражение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + C_{12} \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + C_{44} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} \right); \quad (4.31)$$

направления координатных осей x , y , z параллельны ребрам куба.

Используя выражения (4.6) и (4.7) для компонент деформации, имеем:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right), \quad (4.32a)$$

где u , v , w — компоненты вектора смещения \mathbf{R} [см. выражение (4.4)].

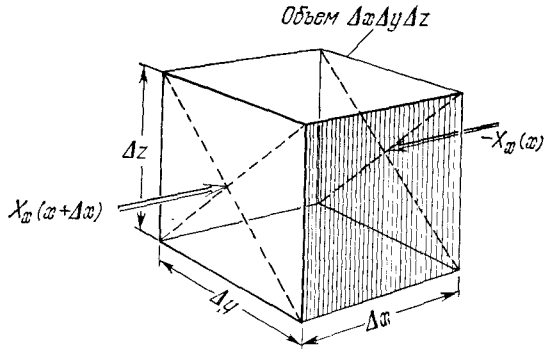


Рис. 4.7. На элемент объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ кубической формы действует напряжение $-X_x(x)$ на грань x и $X_x(x + \Delta x) \approx X_x(x) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Delta x$ на параллельную грань $x + \Delta x$. Результирующая сила равна $\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z$. Другие силы, действующие в направлении оси x , вызваны изменением внутри куба напряжений X_y и X_z , которые на рисунке не показаны. Результирующая x -компонента силы, действующей на куб, равна

$$F_x = \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Сила равна массе куба, умноженной на x -компоненту ускорения. Масса равна $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, а ускорение $\partial^2 u / \partial t^2$.



Рис. 4.8. Если пружины A и B растянуты одинаково, то результирующая сила, действующая на блок, расположенный между ними, равна нулю. Это служит иллюстрацией того, что результирующая сила, действующая на элемент объема в твердом теле в условиях действия однородного напряжения X_x , равна нулю. Если пружина B растянута сильнее, чем пружина A , то блок, расположенный между ними, будет двигаться с ускорением под действием силы $X_x(B) - X_x(A)$.

Соответствующие уравнения движения для смещений v и w получаются непосредственно из (4.32а) круговой перестановкой:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right), \quad (4.32б)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right). \quad (4.32в)$$

Найдем теперь простые решения этих уравнений для некоторых частных случаев.

Волны в направлении [100]. Одним из решений уравнения (4.32а) будет служить продольная волна

$$u = u_0 \exp [i(Kx - \omega t)], \quad (4.33)$$

где u — это x -компонента смещения частицы. Волновой вектор и смещение частицы направлены вдоль ребра куба, совпадающего по направлению с осью x . Здесь $K = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор и $\omega = 2\pi\nu$ — угловая частота. Подставляя (4.33) в (4.32а), получим:

$$\omega^2 \rho = C_{11} K^2; \quad (4.34)$$

следовательно, скорость распространения продольной волны в направлении [100] равна

$$v_s = \nu \lambda = \omega/K = (C_{11}/\rho)^{1/2}. \quad (4.35)$$

Другим решением будет служить поперечная волна или волна сдвига с волновым вектором, направленным вдоль ребра куба, совпадающего по направлению с осью x ; смещение частицы v происходит в направлении оси y :

$$v = v_0 \exp [i(Kx - \omega t)]. \quad (4.36)$$

Это второе решение дает после подстановки в (4.32б) дисперсионное соотношение

$$\omega^2 \rho = C_{44} K^2, \quad (4.37)$$

из которого следует, что скорость поперечной волны ω/K в направлении [100] равна

$$v_s = (C_{44}/\rho)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Аналогичное выражение для скорости получается при движении частиц вдоль оси z . Таким образом, для волнового вектора K , параллельного направлению [100], две независимые волны сдвига имеют равные скорости. Этот вывод не справедлив, если волновой вектор имеет произвольное направление в кристалле.

Волны в направлении [110]. Особый интерес представляет случай распространения упругих волн в направлении диагонали грани куба в кубическом кристалле, так как в этом случае довольно просто определить все три упругие постоянные, если известны скорости распространения трех типов волн в этом направлении.

Рассмотрим волну сдвига, распространяющуюся в плоскости xy ; смещение w частицы направлено вдоль оси z :

$$w = w_0 \exp [i(K_x x + K_y y - \omega t)]; \quad (4.39)$$

тогда, используя (4.32в), получаем:

$$\omega^2 \rho = C_{44} (K_x^2 + K_y^2) = C_{44} K^2. \quad (4.40)$$

Значения адиабатических постоянных упругой жесткости ряда кубических кристаллов при низких температурах и при комнатной температуре

Кристалл	Постоянные упругой жесткости, 10^{12} дин/см ² (10^{11} Н/м ²)			T, °K	Плотность, г/см ³
	C_{11}	C_{12}	C_{44}		
W	5,326	2,049	1,631	0	19,317
	5,233	2,045	1,607	300	—
Ta	2,663	1,582	0,874	0	16,696
	2,609	1,574	0,818	300	—
Cu	1,762	1,249	0,818	0	9,018
	1,684	1,214	0,754	300	—
Ag	1,315	0,973	0,511	0	10,635
	1,240	0,937	0,461	300	—
Au	2,016	1,697	0,454	0	19,488
	1,923	1,631	0,420	300	—
Al	1,143	0,619	0,316	0	2,733
	1,068	0,607	0,282	300	—
K	0,0416	0,0341	0,0286	4	
	0,0370	0,0314	0,0188	295	
Pb	0,555	0,454	0,194	0	11,599
	0,495	0,423	0,149	300	—
Ni	2,612	1,508	1,317	0	8,968
	2,508	1,500	1,235	300	—
Pd	2,341	1,761	0,712	0	12,132
	2,271	1,761	0,717	300	—
V	2,324	1,194	0,460	0	6,051
	2,280	1,187	0,426	300	—
LiF	1,246	0,424	0,649	0	2,646
	1,112	0,420	0,628	300	—
KCl	0,483	0,054	0,066	4	2,038
	0,403	0,066	0,063	300	—
BaF ₂	0,981	0,448	0,254	0	—
	0,891	0,400	0,254	300	4,886

Величины постоянных при 0 °K получены экстраполяцией измерений, выполненных при 4 °K. Данные для таблицы собраны с помощью профессора Смита. Ссылки на исходные работы даны в статье Киттеля в сборнике [4].

Значения адиабатических постоянных упругой жесткости ряда кубических кристаллов при комнатной температуре (300 °К)

Кристалл	Постоянные упругой жесткости, 10^{12} дин/см ² (10^{11} Н/м ²)		
	C_{11}	C_{12}	C_{44}
Алмаз	10,76	1,25	5,76
Na	0,073	0,062	0,042
Li	0,135	0,114	0,088
Ge	1,285	0,483	0,680
Si	1,66	0,639	0,796
GaSb	0,885	0,404	0,433
InSb	0,672	0,367	0,302
MgO	2,83	0,87	1,48
NaCl	0,487	0,124	0,126
RbBr	0,317	0,042	0,039
RbI	0,256	0,031	0,029
CsBr	0,300	0,078	0,076
CsI	0,246	0,067	0,062

Приводимые в таблице значения взяты главным образом из работы Хантингтона [7]; см. также [8].

подставляем первый корень в уравнение (4.42); получаем:

$$\frac{1}{2} (C_{11} + C_{12} + 2C_{44}) K^2 u = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{44}) K^2 u + \frac{1}{2} (C_{12} + C_{44}) K^2 v, \quad (4.45)$$

откуда получаем, что $u = v$. Таким образом, смещение частицы происходит вдоль направления [110] параллельно вектору \mathbf{K} (рис. 4.9). Подставляя второй корень в уравнение (4.42), получаем:

$$\frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) K^2 u = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{44}) K^2 u + \frac{1}{2} (C_{12} + C_{44}) K^2 v, \quad (4.46)$$

откуда $u = -v$. Направление смещения частицы совпадает с направлением [110] и перпендикулярно к вектору \mathbf{K} .

Значения адиабатических постоянных упругой жесткости C_{11} , C_{12} и C_{44} ряда кубических кристаллов при низких температурах и при комнатной температуре приведены в табл. 4.2. Отметим общую тенденцию для постоянных упругой жесткости: они уменьшаются с увеличением температуры. Температурная зависимость постоянных упругой жесткости серебра показана на рис. 4.10, а BaF_2 — на рис. 4.11. Постоянные упругой жесткости для других кубических кристаллов при комнатной температуре приведены в табл. 4.3.

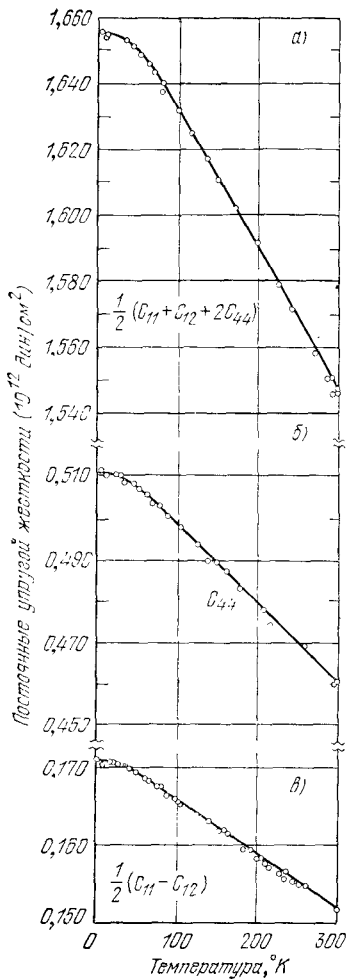


Рис. 4.10. Температурная зависимость постоянных упругой жесткости серебра [5]: а) $\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})$; б) C_{44} ; в) $\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Эти комбинации постоянных находятся из измерения скоростей трех типов упругих волн, распространяющихся в направлении [110].

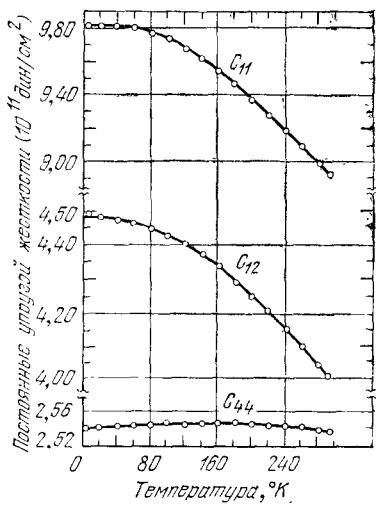


Рис. 4.11. Температурная зависимость постоянных упругой жесткости BaF_2 [6].

Полезные таблицы упругих постоянных приведены в работах [7, 9, 10].

Для волнового вектора \mathbf{K} , имеющего данную величину и данное направление, в кристалле имеются три вида собственных колебаний. Вообще говоря, направление этих колебаний (их поляризация) не строго параллельно или перпендикулярно \mathbf{K} . Для частных направлений распространения упругих волн в кубическом кристалле — направлений [100], [111] и [110] — два вида собственных колебаний (из трех) таковы, что для данного волнового вектора \mathbf{K} направление колебания строго перпендикулярно к \mathbf{K} , а в третьем направлении колебания строго параллельно \mathbf{K} . Анализировать характер распространения упругих волн в кристаллах в этих частных направлениях намного проще, чем в произвольных направлениях (см. [11]).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ

Классические методы измерения упругих постоянных кристаллов описаны в обзоре Хирмона [12]. После появления этого обзора получил широкое распространение метод ультразвуковых импульсов (см., например, работы [13, 14]), который отличается большими удобствами и может быть использован в самых разнообразных экспериментальных условиях. Используются, однако, и многие другие, не менее подходящие методы. В ультразвуковом методе ультразвуковой импульс от кварцевого¹⁾ преобразователя проходит через исследуемый кристалл и, отразившись от его задней грани, возвращается обратно к преобразователю (рис. 4.12). Интервал времени между испусканием импульса и его приемом измеряется с помощью стандартной электронной схемы (рис. 4.13—4.15). Скорость распространения получается от деления общего пути на время прохождения. В описываемом устройстве частота может составлять 15 МГц, а продолжительность импульса 1 мксек. Длина волны порядка $3 \cdot 10^{-2}$ см. Линейные размеры образца могут быть порядка 1 см. Библиография по ультразвуковой экспериментальной методике на микроволновых частотах дана Якобсоном (E. N. Jacobsen) в книге Бэка [16]; см. также [17, 18].

Три постоянные упругой жесткости C_{11} , C_{12} и C_{44} можно определить, зная скорость распространения трех типов волн, которые были нами отмечены выше. Для всех трех типов волн может быть использован кристаллический образец одной и той же

¹⁾ Пластина из кристалла кварца может быть вырезана таким образом, что через нее будет распространяться либо продольная, либо поперечная волна при возбуждении высокочастотным электрическим полем. Это поле подается на пластинку через электроды, расположенные на ее противоположных поверхностях. Теория пьезоэлектрического возбуждения кратко рассматривается в гл. 13.

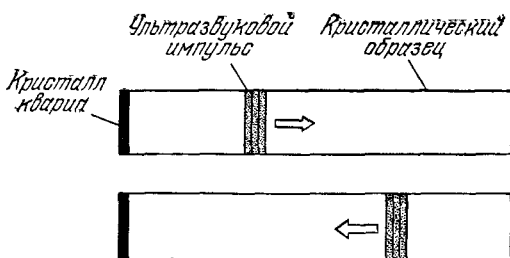


Рис. 4.12. В методе ультразвуковых импульсов, используемом для определения скоростей упругих волн, ультразвуковой импульс генерируется пьезоэлектрическим преобразователем. Импульс проходит через исследуемый кристалл и, отразившись от его задней грани, возвращается обратно к преобразователю. Фиксируется интервал времени между моментом испускания импульса и его приемом.

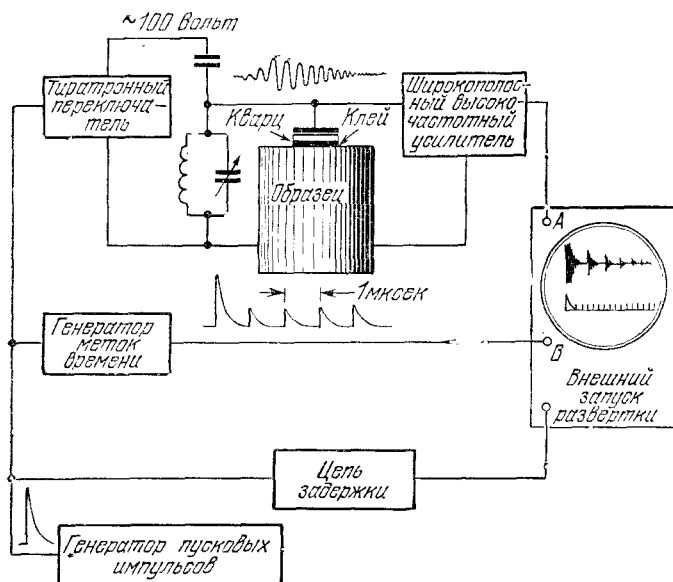


Рис. 4.13. Блок-схема установки, используемой для измерения скорости звука методом отраженного ультразвукового импульса [15]. Генератор пусковых импульсов с периодом 1000 мксек запускает тиратронный переключатель, который разряжает конденсатор через LC-цепочку, и импульс указанной (на рисунке вверху) формы прикладывается к кварцевому преобразователю, приклеенному к образцу. Высокочастотный радиосигнал преобразуется в ультразвуковой импульс, который распространяется внутри образца, образуя серию отраженных сигналов на экране осциллографа. Генератор меток времени и внешний запуск развертки запускаются так, чтобы время между несколькими последовательными отраженными сигналами было измерено достаточно точно.

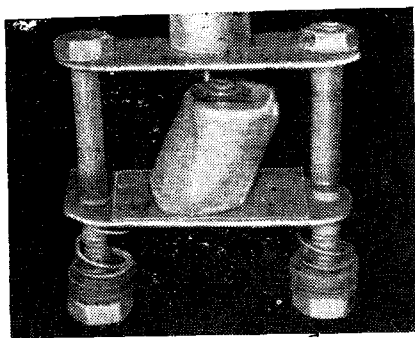


Рис. 4.14. Фотография монокристалла алюминия, помещенного в пружинный держатель для измерения скорости звука методом отраженных ультразвуковых импульсов. Верхняя поверхность кристалла — это плоскость (110). К этой поверхности приклеен кварцевый преобразователь с металлическим электродом для подачи высокочастотного электрического поля.

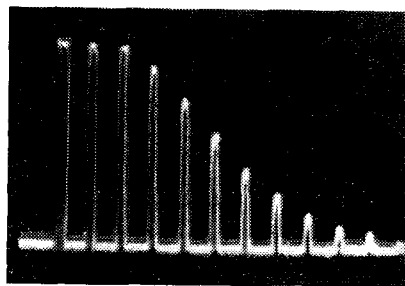


Рис. 4.15. Последовательные ультразвуковые импульсные сигналы, отраженные от граней кристалла. Интервал времени между последовательными импульсами измеряется при наблюдении картины на экране осциллографа. Этот интервал — время прохождения ультразвуковым импульсом двойной длины образца. Затухание волны можно найти по уменьшению высоты последовательных импульсов с учетом потерь на отражение на гранях образца. Напряжение, снимаемое с преобразователя, прямо пропорционально механическому напряжению в ультразвуковой волне. (Н. J. McSkimin.)

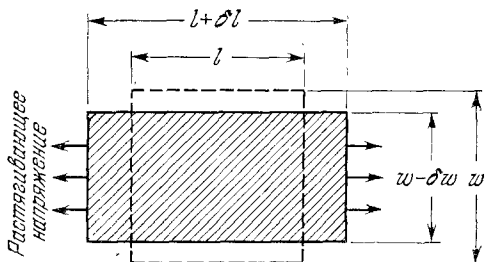
ориентировки, но необходимо изменять срез и установку кварцевого кристаллического преобразователя, для того чтобы создать требуемое направление движения частицы в кристаллическом образце.

Упругие постоянные третьего порядка. В области применимости закона Гука плотность упругой энергии квадратична относительно компонент деформации [см. выражение (4.14)]. Вне этой области появляются произведения деформаций более высокого порядка. Постоянные упругой жесткости третьего порядка связывают упругую энергию с произведениями трех компонент деформации. Эти постоянные являются постоянными самого низшего порядка из всех постоянных, входящих в описание нелинейных эффектов (гл. 6), таких, например, как взаимодействие фононов и термическое расширение. Эти постоянные третьего порядка могут быть определены из измерения скоростей звуковых волн с малыми амплитудами в статически напряженной среде. В [19, 20] установлено, что экспериментально определенные постоянные упругой жесткости третьего порядка находятся в хорошем соответствии с теоретическими предсказаниями.

ЗАДАЧИ

4.1. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Кубический кристалл подвергнут растяжению в направлении $[100]$. Найти выражения для модуля Юнга и коэффициента Пуассона через постоянные упругой жесткости. Определение модуля Юнга и коэффициента Пуассона для рассматриваемого случая содержится в подписи под рис. 4.16.

Рис. 4.16 Для показанного на рисунке случая, когда на образец действует одноосное растягивающее напряжение, модуль Юнга определяется как отношение напряжения к деформации; стороны образца не закреплены. Коэффициент Пуассона при этом определяется как $(\delta w/w) : (\delta l/l)$.



4.2. Скорость продольной волны. Показать, что скорость продольной волны, распространяющейся в направлении $[111]$ в кубическом кристалле, равна

$$v_s = [1/3 (C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})/\rho]^{1/2}.$$

Указание: Для такой волны $u = v = w$. Положить

$$u = u_0 \exp \{iK(x + y + z)/\sqrt{3}\} \exp(-i\omega t)$$

и использовать уравнение (4.32а).

4.3. Скорость поперечной волны. Показать, что скорость поперечных волн, распространяющихся в направлении $[111]$ в кубическом кристалле, равна

$$v_s = [1/3 (C_{11} - C_{12} + C_{44})/\rho]^{1/2}.$$

Указание: См. задачу 4.2

4.4. Эффективная постоянная сдвига. Показать, что постоянная сдвига $(C_{11} - C_{12})/2$ в кубическом кристалле определяется из условия, что $e_{xx} = -e_{yy} = e/2$, а все другие компоненты деформации равны нулю (см. рис. 4.17). *Указание:* Воспользоваться выражением (4.18) для плотности упругой энергии; искать постоянную C' из условия, что $U = C'e^2/2$.

4.5. Детерминантный подход (метод определителей). Известно¹⁾, что R -мерная квадратная матрица, все элементы которой равны единице, имеет корни R и 0 , причем значению R равен один корень, а нулю равны $R - 1$ корней. Если все элементы имеют величину p , то корни равны Rp и 0 .

а) Показать, что если диагональные элементы равны q , а все другие элементы равны p , то имеется один корень, равный $(R - 1)p + q$, и $R - 1$ корней, равных $q - p$.

¹⁾ Элементы детерминанта равны $a_{ij} = 1 - \lambda \delta_{ij}$, где λ — корень детерминантного уравнения; см. Приложение L. Здесь δ_{ij} — дельта-функция Кронекера.

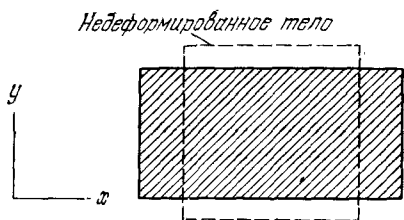


Рис. 4.17. Показанная на рисунке деформация является результатом совместного действия двух сдвиговых деформаций $e_{xx} = -e_{yy}$.

б) Показать (используя уравнения (4.32)) для волны, распространяющейся в направлении $[111]$ в кубическом кристалле, что детерминантное уравнение, в котором ω^2 рассматривается как функция K , имеет вид

$$\begin{vmatrix} q - \omega^2 \rho & p & p \\ p & q - \omega^2 \rho & p \\ p & p & q - \omega^2 \rho \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$q \equiv \frac{1}{3} K^2 (C_{11} + 2C_{44}), \quad p \equiv \frac{1}{3} K^2 (C_{12} + C_{44}).$$

Это отвечает условию, что система из трех линейных однородных алгебраических уравнений для трех компонент смещения u , v , w имеет нетривиальные решения. Используя результат, полученный в пункте (а), найти три корня ω^2 ; сравнить с результатами, полученными в задачах 4.2 и 4.3.

4.6. Произвольное направление распространения упругой волны. а) Подстановкой в (4.32) найти детерминантное уравнение, которое отвечает условию, что смещение

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = [u_0 \hat{x} + v_0 \hat{y} + w_0 \hat{z}] \exp [i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

является решением уравнений для упругой волны в кубическом кристалле.

б) Сумма корней детерминантного уравнения равна сумме диагональных элементов a_{ii} . Показать, используя результат (а), что сумма квадратов скоростей трех типов упругих волн, распространяющихся в произвольном направлении в кубическом кристалле, равна $(C_{11} + 2C_{44})/\rho$. Напомним, что $v_s^2 = \omega^2/K^2$.

4.7*. Критерий устойчивости. Критерием устойчивости кубического кристалла, имеющего один атом в элементарной ячейке, под действием малых однородных деформаций является положительность значения плотности энергии (4.18) для всех комбинаций компонент деформации. Какие ограничения тем самым накладываются на значения постоянных упругой жесткости? (Математически задача сводится к нахождению условий, при которых действительная симметричная квадратичная функция будет иметь положительное значение. Решение содержится в курсах алгебры; см. также [21].)

Ответ: $C_{44} > 0$, $C_{11} > 0$, $C_{11}^2 - C_{12}^2 > 0$ и $C_{11} + 2C_{12} > 0$.

Пример неустойчивости, которая наблюдается, когда $C_{11} \approx C_{12}$, приведен в [22].