

Глава 8. СВОБОДНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ ФЕРМИ. II

Диэлектрическая реакция электронного газа	282
Распространение электромагнитных волн в плазме (поперечные оптические моды) (283). Прозрачность щелочных металлов в ультрафиолетовой области спектра (284). Распространение электромагнитных волн в плазме (продольные оптические моды) (286).	
Плазмоны	288
Электростатическое экранирование (290).	
Электрон-электронные столкновения	294
Движение в магнитном поле	297
Циклотронная частота (297). Статическое магнетосопротивление (298). Эффект Холла (300).	
Задачи	303
Литература	777
<i>Приложение, относящееся к данной главе:</i>	
D. Зависимость диэлектрической функции от волнового вектора для ферми-газа свободных электронов	727

В этой главе мы завершим рассмотрение наиболее важных свойств свободного электронного газа. Наша цель состоит в том, чтобы с максимальной физической ясностью осветить все аспекты поведения свободного электронного газа и сделать это до того, как мы перейдем (в гл. 9) к рассмотрению тех модификаций нарисованной картины, которые вносятся эффектами взаимодействия электронов проводимости с кристаллической решеткой. Мы начнем с рассмотрения реакции свободного электронного газа на воздействие внешнего электрического поля. Статическая реакция электронного газа сводится к электростатическому экранированию кулоновского взаимодействия. Динамическая реакция электронного газа проявляется в типичном для металлов отражении света и в возбуждении плазмонов — форме коллективного движения электронного газа.

Уравнение Максвелла, учитывающее диэлектрическую реакцию среды, записывают обычно в виде

$$(СГС) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (8.1a)$$

$$(СИ) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

¹ Здесь σ — электропроводность, \mathbf{H} — магнитное поле, \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{D} — электрическая индукция. Величина \mathbf{D} определяется соотношением: $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ (в СГС) или $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ (в СИ). Поляризация \mathbf{P} есть дипольный электрический момент единицы объема¹). Члены $\sigma\mathbf{E}$ и $\partial\mathbf{P}/\partial t$ обусловлены смещением зарядов; первый — свободных зарядов, второй — связанных. Введение этого различия не обязательно, и мы с тем же успехом можем дать определение величины \mathbf{P} , включив в понятие поляризации смещение и связанных, и свободных зарядов. Тогда уравнение Максвелла можно будет переписать в виде

$$\text{(СГС)} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}); \quad (8.1б)$$

$$\text{(СИ)} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}).$$

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

В отсутствие столкновений уравнение движения свободного электрона в электрическом поле имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -eE. \quad (8.2)$$

Если x и E зависят от времени по периодическому закону $e^{-i\omega t}$, то вместо (8.2) получим:

$$- \omega^2 mx = -eE, \quad x = \frac{eE}{m\omega^2}. \quad (8.3)$$

Дипольный момент p электрона

$$p = -ex = -\frac{e^2E}{m\omega^2}, \quad (8.4a)$$

а для поляризации (определяемой как дипольный момент единицы объема) имеем:

$$P = -nex = -\frac{ne^2}{m\omega^2} E, \quad (8.4б)$$

где n — концентрация электронов.

Введем *диэлектрическую функцию* при частоте ω , определив ее соотношением

$$\text{(СГС)} \quad \epsilon(\omega) \equiv \frac{D(\omega)}{E(\omega)} \equiv 1 + 4\pi \frac{P(\omega)}{E(\omega)}; \quad (8.5)$$

$$\text{(СИ)} \quad \epsilon(\omega) = \frac{D(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)} = 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)},$$

где обозначения подчеркивают тот факт, что величины E , P , D относятся к одной и той же частоте ω . Воспользуемся выраже-

¹) Детальное рассмотрение определений диэлектрических величин дается в гл. 13.

ниями (8.46) и (8.5) для нахождения диэлектрической функции свободного электронного газа; в результате получим:

$$\text{(СГС)} \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}; \quad (8.6)$$

$$\text{(СИ)} \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Плазменную частоту¹⁾ определим выражением

$$\text{(СГС)} \quad \omega_p^2 \equiv \frac{4\pi ne^2}{m}; \quad (8.7)$$

$$\text{(СИ)} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}.$$

Тогда диэлектрическую функцию можно записать в виде

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (8.8)$$

Зависимость этой функции от частоты ω изображена на рис. 8.1.

Распространение электромагнитных волн в плазме (поперечные оптические моды). При всех частотах, меньших ω_p , величина $\varepsilon(\omega)$ отрицательна. Дисперсионный закон

$$\omega^2 \varepsilon(\omega) = c^2 K^2 \quad (8.9)$$

для электромагнитных волн не дает никаких волновых решений при отрицательной диэлектрической проницаемости. Решения имеют вид $\exp(-|K|x)$ в области частот $0 < \omega \leq \omega_p$. Волны, падающие на такую среду (с частотами в указанном интервале), полностью отражаются. Электронный газ действует как частотный фильтр. Электронный газ становится прозрачным лишь для волн с частотами $\omega > \omega_p$, поскольку в этой частотной области диэлектрическая функция положительна. Если для диэлектрической функции мы воспользуемся выражением (8.8), то для дисперсионного закона получим:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 K^2; \quad (8.10)$$

закон в таком виде справедлив для поперечных электромагнитных волн в плазме (см. рис. 8.2а).

¹⁾ Плазма — среда, в которой концентрации положительных и отрицательных зарядов одинаковы, причем по крайней мере один из типов зарядов обладает подвижностью. В твердых телах отрицательные заряды (электроны проводимости) компенсируются положительными зарядами ионных остовов.

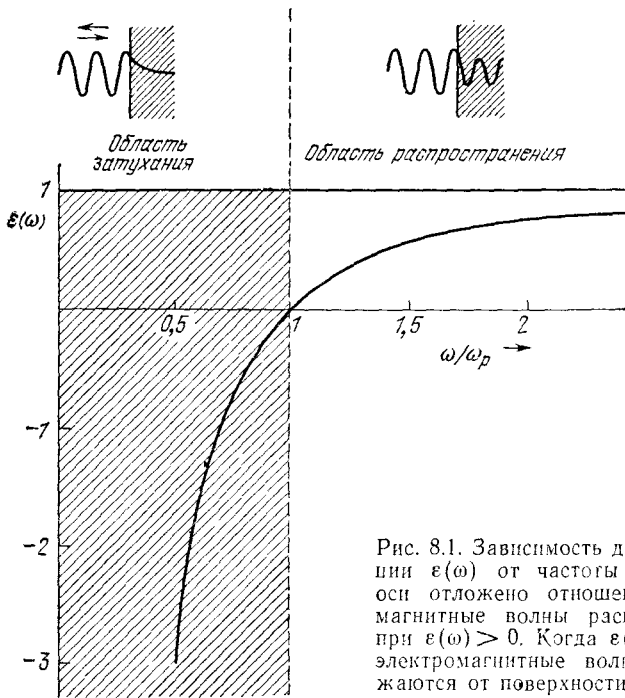


Рис. 8.1. Зависимость диэлектрической функции $\epsilon(\omega)$ от частоты (по горизонтальной оси отложено отношение ω/ω_p). Электромагнитные волны распространяются лишь при $\epsilon(\omega) > 0$. Когда $\epsilon(\omega)$ отрицательна, то электромагнитные волны полностью отражаются от поверхности среды.

Значения плазменной частоты ω_p и длин волн $\lambda_p \equiv 2\pi c/\omega_p$ для представляющих физический интерес концентраций электронов в твердых телах:

n (число электронов в 1 см ³)	10^{22}	10^{18}	10^{14}	10^{10}
ω_p , рад/сек	$5,7 \cdot 10^{15}$	$5,7 \cdot 10^{13}$	$5,7 \cdot 10^{11}$	$5,7 \cdot 10^9$
λ_p , см	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	0,33	33

Электромагнитное излучение будет распространяться в среде только в том случае, если в свободном пространстве длины волн этого излучения будут меньше λ_p . В противном случае будет иметь место отражение.

Прозрачность щелочных металлов в ультрафиолетовой области спектра. Из приведенных выше соображений и результатов, касающихся диэлектрической функции, следует, что простые металлы должны отражать свет в видимой области и быть прозрачными в ультрафиолетовой области спектра. Экспериментально

Рис. 8.2а. Дисперсионный закон для поперечных электромагнитных волн в плазме. Групповая скорость $v_g = d\omega/dk$ численно равна наклону дисперсионной кривой. Хотя диэлектрическая функция принимает значения между нулем и единицей, групповая скорость меньше скорости света в вакууме.

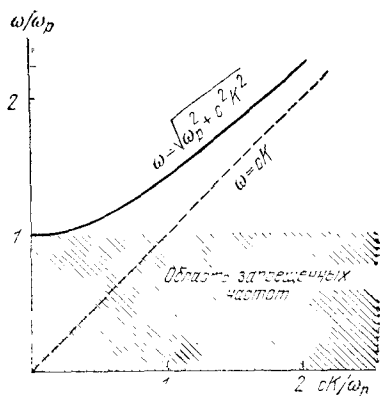
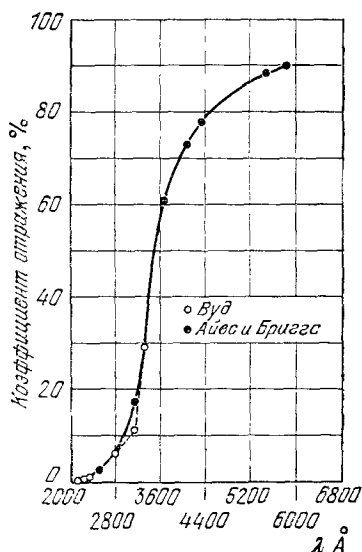


Рис. 8.2б. Коэффициент отражения для калия. Ниже 3000 Å большая часть излучения, падающего на тонкую пленку металлического калия, проходит сквозь пленку. Светлыми кружками показаны данные Вуда, черными — данные Айвса и Бриггса [3].



это было установлено Вудом¹⁾, объяснение дал Зинер [5]. Сравнение вычисленных и наблюдаемых значений граничных длин волн дано в табл. 8.1.

Отражение света от металлов полностью аналогично отражению радиоволн от ионосферы, поскольку наличие свободных электронов в ионосфере приводит к тому, что диэлектрическая проницаемость ионосферной плазмы становится отрицательной для низких частот. Для калия экспериментальная зависимость отражательной способности от длины волны приведена на рис. 8.2б.

¹⁾ См. работы Вуда [1], Вуда и Люкенса [2], Айвса и Бриггса [3, 3а]. Обзор оптических свойств металлов дан в статье Гивенса [4].

Прозрачность щелочных металлов в ультрафиолетовой области спектра (предельные значения длины волны, Å)

Пленки тех же металлов прозрачны при $\lambda < \lambda_p$.

Металл	Li	Na	K	Rb	Cs
λ_p (вычисл. *)	1550	2090	2870	3220	3620
λ_p (экспер.)	1550	2100	3150	3400	—

*) При вычислении λ_p масса электрона принималась равной массе m свободного электрона.

Распространение электромагнитных волн в плазме (продольные оптические моды). Мы уже видели в гл. 5, что нули диэлектрической функции определяют частоты продольных оптических мод. Иначе говоря, условие

$$\epsilon(\omega_L) = 0 \quad (8.11)$$

определяет частоту продольных волн ω_L (это условие рассмотрено также в Приложении D). Для случая равенства нулю диэлектрической функции электронного газа мы имеем:

$$\epsilon(\omega_L) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} = 0, \quad (8.12)$$

откуда

$$\omega_L = \omega_p. \quad (8.13)$$

Итак, имеем свободное продольное колебание электронного газа (см. рис. 8.3), частота которого равна плазменной частоте, определенной ранее как граница пропускания (8.10) поперечных электромагнитных волн¹⁾.

Схематически продольные плазменные колебания изображены на рис. 8.4 в виде однородных смещений электронного газа в тонкой металлической пластинке. Электронный газ смещается как целое по отношению к положительному ионному фону. Смещение u создает электрическое поле $E = 4\pi n e u$, которое действует как возвращающая сила. Уравнение движения единицы объема электронного газа запишется в виде

$$\text{(СГС)} \quad nm \frac{d^2 u}{dt^2} = -neE = -4\pi n^2 e^2 u, \quad (8.14)$$

или

$$\text{(СГС)} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_p^2 u = 0; \quad \omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}. \quad (8.15)$$

¹⁾ Теория и анализ плазменных колебаний в металлах были разработаны в основном в исследованиях Бома и Пайнса (см., например, книгу Пайнса [6]).

Рис. 8.3. Схема плазменных колебаний с конечной длиной волны (меньшей толщины пластинки). Стрелками показаны направления смещения электронов.

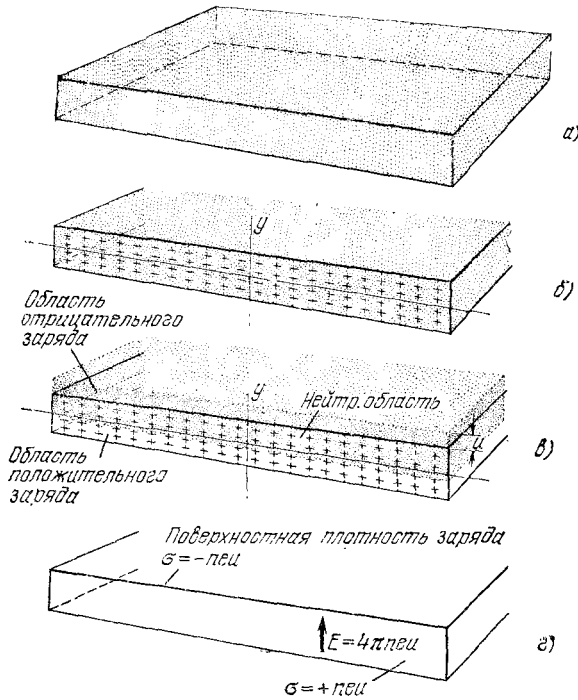
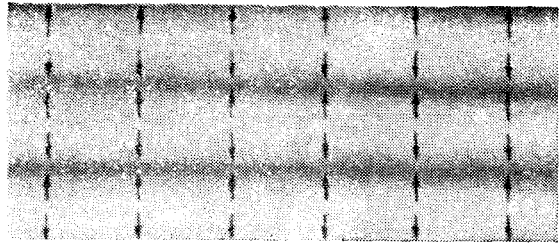


Рис. 8.4. К теории плазменных колебаний. а) Схема образца в виде тонкой металлической пластинки или пленки. б) Вертикальное сечение этой пластинки, где знаками «+» изображены положительные ионы, а электронная жидкость, заполняющая пластинку (заряженная отрицательно), изображена в виде серого фона; пластинка в целом электрически нейтральна. в) Ситуация, когда отрицательный заряд, как показано на схеме, однородно смещен вверх на небольшое расстояние u . г) Схема, поясняющая электрическое состояние пластинки в ситуации в. В результате смещения на верхней плоскости пластинки возникает поверхностная плотность заряда, равная $-ne_i u$, а на нижней соответственно $+ne_i u$ (n — исходная концентрация электронов). Следовательно, внутри пластинки образуется электрическое поле $E = 4\pi ne_i u$. Это поле стремится возвратить электронную жидкость в исходное равновесное состояние, описываемое схемой б. В единицах СИ имеем $E = ne_i u/\epsilon_0$.

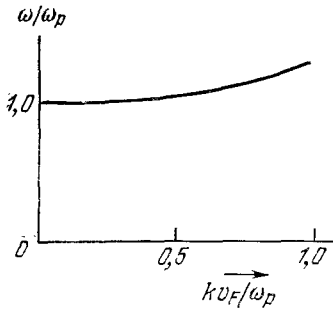


Рис. 8.5. Теоретический дисперсионный закон для продольных волн в плазме, т. е. зависимость их частоты ω от волнового числа k . Здесь ω_p — плазменная частота (частота при $k \rightarrow 0$), v_F — скорость электронов на поверхности Ферми.

Это уравнение имеет точно тот же вид, что и уравнение движения гармонического осциллятора с собственной частотой ω_p . Частоту ω_p называют плазменной частотой.

Выражение для ω_p получилось точно такое же, как и (8.7), полученное выше из совершенно других соображений. В единицах СИ смещение u создает электрическое поле $E = neu/\epsilon_0$, а выражение для ω_p примет вид: $\omega_p = (ne^2/\epsilon_0 m)^{1/2}$.

Плазменные колебания с малыми волновыми векторами имеют частоту, равную приблизительно ω_p . Оказывается, что для продольных плазменных колебаний при малых волновых векторах зависимость частоты от волнового вектора, т. е. дисперсионный закон, можно приближенно записать в следующем виде:

$$\omega \approx \omega_p \left(1 + \frac{3k^2 v_F^2}{10\omega_p^2} + \dots \right); \quad (8.16)$$

здесь v_F — скорость электрона, когда его энергия равна энергии Ферми. График этой зависимости приведен на рис. 8.5.

ПЛАЗМОНЫ

Плазменные колебания в металле есть коллективные продольные возбуждения газа электронов проводимости. Плазмонами называют квантованные плазменные колебания. Мы можем возбудить плазмон, пропуская электрон через тонкую металлическую пластинку (рис. 8.6) или в результате отражения электрона (или фотона) от металлической пленки. Наличие у электрона заряда связывает флуктуации электростатического поля с колебаниями плазмы. Электрон, проходящий через пленку или отражающийся от нее, будет терять энергию, причем не непрерывно, а порциями, кратными энергии плазмона. На рис. 8.7 приведены спектры потерь энергии, полученные в экспериментах на Al и Mg.

Рис. 8.6. Схема, иллюстрирующая образование плазмона в металлической пленке при неупругом рассеянии электрона, падающего нормально к поверхности пленки. Типичные энергии падающих электронов составляют от 1 до 10 кэВ. Энергия образуемого плазмона может быть порядка 10 эВ. Схема справа — возможный случай образования сразу двух плазмонов.

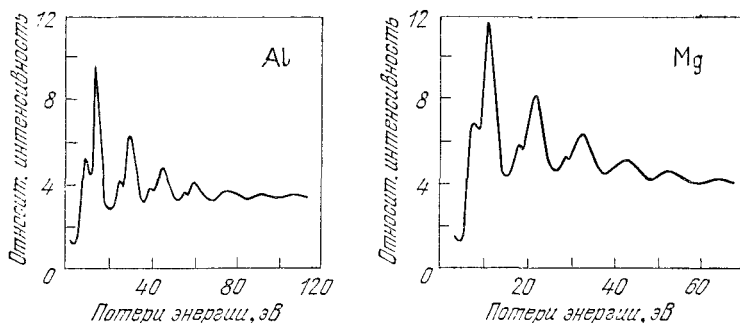
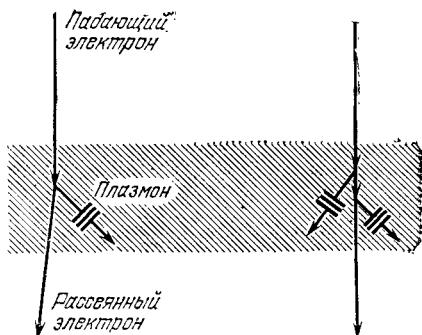


Рис. 8.7. Спектр потерь энергии электронами, отражающимися от пленок алюминия и магния. Энергия первичных (падающих) электронов равна 2020 эВ. В случае Al наблюдалось 12 пиков, обусловленных комбинациями потерь при энергиях 10,3 и 15,3 эВ; энергия 10,3 эВ связана с поверхностными плазмонами (см. задачу 8.5), а энергия 15,3 эВ — с объемными плазмонами, частоты которых описываются формулой для ω_p в (8.15). В случае Mg наблюдалось 10 пиков, обусловленных комбинациями поверхностных плазмонов с энергией 7,1 эВ и объемных с энергией 10,6 эВ. (Из работ Пауэлла и Свана [8, 9].)

В табл. 8.2 приведены для сравнения экспериментальные и вычисленные¹⁾ значения энергии плазмонов. Дополнительные сведения имеются в статьях, цитируемых в обзоре Рэтера [7].

¹⁾ Поправки к энергии плазмона, обусловленные поляризацией ионного остова, делаются исходя из того, что при частоте, равной частоте плазменных колебаний, последняя совпадает с корнем уравнения, получаемого приравниванием нулю диэлектрической функции:

$$(СГС) \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{core}} - \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2} = 0. \quad (8.17)$$

Следовательно, для частоты плазмона, «исправленной» на поляризацию ионного остова, имеем:

$$(СГС) \quad \omega'_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{\epsilon_{\text{core}} m} \right)^{1/2}; \quad (СИ) \quad \omega'_p = \left(\frac{n e^2}{\epsilon_{\text{core}} \epsilon_0 m} \right)^{1/2}. \quad (8.18)$$

Значения поляризуемости ионных остовов даны в табл. 13.1, а значения ϵ_{core} можно вычислить при помощи выражения (13.35). Например, для Na и K значения ϵ_{core} соответственно равны 1,14 и 1,24.

Энергия плазмонов

Вещество образца	Экспериментальное значение $\hbar\omega_p$, эВ	Вычисленное значение $\hbar\omega_p$, эВ		Литература
		для свободного электрона, см. (8.7)	с учетом поправок на поляризацию	
<i>Металлы</i>				
Li	7,12	8,02	7,96	[11]
Na	5,71	5,95	5,58	[11]
	5,85			[12]
K	3,72	4,29	3,86	[11]
	3,87			[13]
Mg	10,6	10,9		[9]
Al	15,3	15,8		[8]
<i>Диэлектрики *) (полупроводниковые пленки)</i>				
Si	16,4—16,9	16,0		
Ge	16,0—16,4	16,0		
InSb	12,0—13,0	12,0		

*) Эти данные взяты из работы Филиппа и Эренрайха [10]. В столбце, где приведены экспериментальные значения, левые значения получены из оптических измерений, правые — из измерений потерь энергии электронами.

Коллективные плазменные колебания можно возбудить также в диэлектрических пленках; результаты для диэлектрических пленок трех полупроводников приведены в той же табл. 8.2. Расчет энергии плазмонов в Si, Ge и InSb производился исходя из того, что на каждый атом приходится четыре валентных электрона. В диэлектриках плазменные колебания физически точно такие же, что и в металлах; электронная жидкость из валентных электронов смещается по отношению к ионным островам то в одну, то в другую (противоположную) сторону.

Электростатическое экранирование. Если мы «погрузим» пробный точечный заряд q в состоянии покоя внутрь металла, то электронная концентрация вблизи этого пробного заряда испытает возмущение, в результате которого электрическое поле заряда окажется в значительной мере скомпенсированным полем, индуцированным нарушением однородности электронной концентрации. В этом случае говорят, что пробный заряд экранируется электронным газом. Для описания этого явления вводится характеристика, именуемая *длиной экранирования*; на расстояниях, меньших этой длины, экранирование эффективно не проявляется, а на больших расстояниях становится все более и более полным.

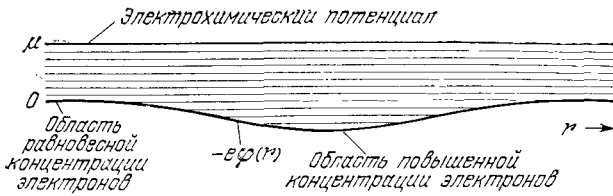


Рис. 8.8. Схема, иллюстрирующая постоянство электрохимического потенциала. При тепловом равновесии и равновесии концентраций (нет диффузии) электрохимический потенциал постояен по всему объему. Чтобы поддерживать его постоянным, мы увеличиваем концентрацию электронов в области пространства, где низкий потенциал, и уменьшаем в области, где потенциал высокий.

Можно теперь дать приближенную трактовку статического экранирования. Запишем известное из электростатики уравнение Пуассона:

$$(СГС) \quad \nabla^2 \varphi = 4\pi e [n(\mathbf{r}) - n_0], \quad (8.19)$$

$$(СИ) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{e}{\varepsilon_0} [n(\mathbf{r}) - n_0],$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — электростатический потенциал, $n(\mathbf{r}) - n_0$ характеризует отклонение концентрации электронов от однородного распределения.

Мы можем составить другое уравнение, связывающее электростатический потенциал с концентрацией электронов, исходя из того, что электрохимический потенциал электронного газа при равновесии (см. гл. 7) должен сохранять постоянную величину независимо от положения. В той части объема образца, где электростатический потенциал отсутствует, электрохимический потенциал согласно (7.21) связан с однородной концентрацией n_0 (при абсолютном нуле) соотношением

$$\mu = \varepsilon_F^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}. \quad (8.20a)$$

А в той области объема образца, где электростатический потенциал равен $\varphi(\mathbf{r})$, для электрохимического потенциала имеем:

$$\mu = \varepsilon_F(\mathbf{r}) - e\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{\hbar^2}{2m} [3\pi^2 n(\mathbf{r})]^{2/3} - e\varphi(\mathbf{r}). \quad (8.20б)$$

Это выражение для электрохимического потенциала является приближенным (такое приближение называют приближением Томаса — Ферми); оно должно быть справедливым и для электростатического потенциала, когда последний мало изменяется на расстояниях порядка длины волны электрона. Если электрохимический потенциал сохраняет свою величину при изменении электростатического потенциала, мы должны иметь (рис. 8.8):

$$\frac{\hbar^2}{2m} [3\pi^2 n(\mathbf{r})]^{2/3} - e\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} [3\pi^2 n_0]^{2/3}. \quad (8.21)$$

При разложении (8.21) в ряд Тейлора получим:

$$\frac{d\varepsilon_F}{dn_0} [n(r) - n_0] \approx e\varphi(r). \quad (8.21a)$$

Согласно (8.20a) $d\varepsilon_F/dn_0 = 2\varepsilon_F/3n_0$, откуда следует, что

$$n(r) - n_0 \approx \frac{3}{2} n_0 \frac{e\varphi(r)}{\varepsilon_F}. \quad (8.21b)$$

Итак, (8.19) примет вид

$$(СГС) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{6\pi n_0 e^2}{\varepsilon_F} \varphi = \lambda^2 \varphi, \quad (8.22)$$

$$(СИ) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{3n_0 e^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_F} \varphi = \lambda^2 \varphi,$$

где

$$(СГС) \quad \lambda^2 \equiv \frac{6\pi n_0 e^2}{\varepsilon_F} = \frac{4\pi e^2 n_0^{1/3}}{h^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \approx \frac{4n_0^{1/3}}{a_0}. \quad (8.23)$$

Здесь a_0 — боровский радиус.

Мы ищем потенциал, обладающий сферической симметрией; такие потенциалы являются решениями уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}\right) \varphi(r) = \lambda^2 \varphi(r), \quad (8.24)$$

где дифференциальный оператор в левой части есть радиальная часть оператора ∇^2 в сферических координатах. Искомый потенциал, удовлетворяющий (8.24), имеет вид

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{qe^{-\lambda r}}{r}}. \quad (8.25)$$

Действительно, путем прямого дифференцирования получим:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{qe^{-\lambda r}}{r} \left(\lambda + \frac{1}{r}\right); \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{qe^{-\lambda r}}{r} \left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2}{r^2}\right). \quad (8.26)$$

Потенциал (8.25) называют *экранированным кулоновским потенциалом*.

Длина экранирования определяется как величина, обратная постоянной λ , т. е. $1/\lambda$ (см. рис. 8.9). На рис. 8.10 приведена ее зависимость от концентрации электронов n . Для меди, у которой $n_0 = 8,5 \cdot 10^{22}$ электронов/см³, длина экранирования равна 0,55 Å.

Более строгие расчеты эффектов экранирования рассмотрены в книге автора [14].

Часто оказывается удобным рассматривать эффекты экранирования в электронном газе, вводя некоторый внешний потенциал синусоидальной формы. Такой анализ проведен в Приложении D, где результаты выражены через *диэлектрическую*

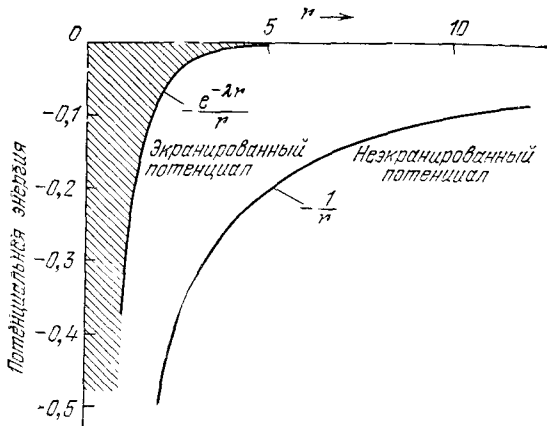


Рис. 8.9. Сравнение экранированного и неэкранированного кулоновских потенциалов для единичного положительного заряда, помещенного в электронный газ Ферми. Длина экранирования $1/\lambda$ принята здесь равной единице.

функцию $\epsilon(\mathbf{K}, \omega)$, которая описывает реакцию электронного газа на действие внешнего потенциала, характеризуемого волновым вектором \mathbf{K} и частотой ω . В теории твердых тел широко распространен прием перехода путем преобразования Фурье от функций $u(\mathbf{K}, \omega)$ к функциям от координат и времени (и обратно). Поэтому величины типа диэлектрической функции, которые описывают реакцию системы как функцию \mathbf{K} и ω , оказываются важными во многих теоретических построениях.

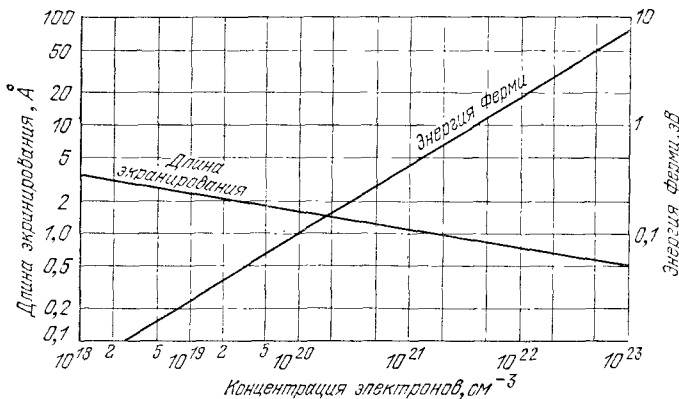


Рис. 8.10. Длина экранирования $1/\lambda$ (шкала слева) и энергия Ферми (шкала справа) как функции концентрации электронов. Все шкалы — логарифмические. Зависимость для длины экранирования построена для модели Томаса — Ферми [см. формулу (8.23)], зависимость для энергии Ферми — по формуле (7.21).

ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Поразительным в металлах является то, что электроны проводимости, находясь в среднем на расстояниях 1—3 Å друг от друга, проходят в металле относительно большие расстояния, не сталкиваясь между собой. При электрон-электронных столкновениях средняя длина свободного пробега при комнатных температурах превышает 10^4 Å, а при 1°K — более 10 см. Столь большой свободный пробег обусловлен двумя обстоятельствами, без которых модель свободных электронов в металле не имела бы большой ценности. Первое, наиболее важное, — принцип Паули (см. рис. 8.11), а второе — экранирование кулоновского взаимодействия между двумя электронами.

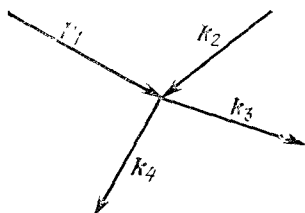


Рис. 8.11. Схема акта столкновения двух электронов с волновыми векторами k_1 и k_2 . После столкновения электроны имеют волновые векторы k_3 и k_4 . Принцип Паули допускает лишь такие столкновения, в которых конечные состояния, характеризуемые векторами k_3 и k_4 , были до столкновения вакантными (незанятыми).

Сейчас мы покажем, как принцип Паули понижает частоту столкновений электронов с низкой энергией возбуждения ϵ_1 вие заполненной сферы Ферми (рис. 8.12). Оценим влияние принципа Паули в случае двухчастичного столкновения:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

Эта схема описывает столкновение электрона в возбужденном состоянии 1 с электроном в состоянии 2 внутри сферы Ферми. Удобно отсчитывать энергии от уровня Ферми μ , приняв его за нулевой; тогда ϵ_1 будет положительной, а ϵ_2 — отрицательной величиной. В силу принципа Паули состояния 3 и 4 электронов после столкновения должны находиться вне сферы Ферми, поскольку все состояния внутри сферы уже заняты. Следовательно, энергии ϵ_3 и ϵ_4 должны быть положительными.

Закон сохранения энергии требует, чтобы $|\epsilon_2| < \epsilon_1$, так как в противном случае условие $\epsilon_3 + \epsilon_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2$ (где обе стороны положительны) не может быть выполнено. Это означает, что столкновения возможны в том случае, если состояние 2 лежит внутри слоя толщиной ϵ_1 внутри поверхности Ферми (см. рис. 8.12, а). Таким образом, подходящей «мишенью» для электрона 1 является не любой электрон, а лишь какой-то один из заполненного слоя, в котором число электронов составляет долю $\approx \epsilon_1/\epsilon_F$ всего их числа¹⁾. Но даже если «электрон-мишень» 2

¹⁾ Эти расчеты были выполнены Морелем и Нозьером [15].

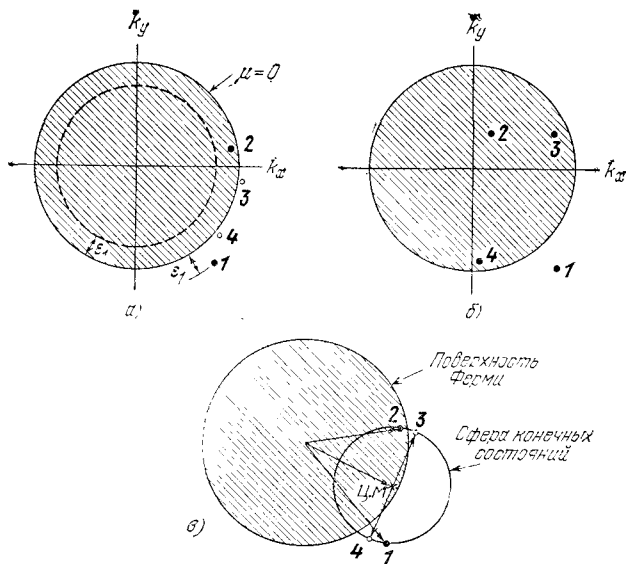


Рис. 8.12. Пояснение процесса столкновения двух электронов. а) Электроны сталкиваются в состояниях, характеризуемых в k -пространстве точками 1 и 2. Если показанные на схеме состояния 3 и 4 до столкновения были вакантными (незанятыми), то электроны 1 и 2 после столкновения могут перейти в состояния 3 и 4. Энергия и импульс при этом, разумеется, сохраняются. б) Ситуация неосуществимости столкновения. Для электронов в начальных состояниях 1 и 2 не имеется подходящих вакантных конечных состояний, которые допускали бы выполнение законов сохранения при столкновении. Вообще говоря, среди состояний 3 и 4 можно было бы найти такие, для которых законы сохранения энергии и импульса выполнялись бы, но состояния 3 и 4, показанные на схеме, находясь в глубине сферы Ферми, не могут быть вакантными, потому что они уже заняты обычно другими электронами, и столкновение неосуществимо из-за принципа Паули. в) Здесь крестик обозначает конец волнового вектора центра масс частиц 1 и 2. Для всех пар состояний 3 и 4 импульс и энергия сохраняются в том случае, если эти пары лежат на противоположных концах диаметра малой сферы. Центр малой сферы выбран в центре масс частиц 1 и 2. Не все пары точек 3 и 4 разрешены принципом Паули; допустимы лишь пары, лежащие вне сферы Ферми (этот случай и показан на схеме); доля таких разрешенных состояний приближенно равна отношению ϵ_1/ϵ_F .

находится в слое нужной энергии, лишь небольшая часть конечных состояний оказывается совместимой с требованиями закона сохранения энергии и импульса и допустима по принципу Паули. Это обстоятельство уменьшает допустимое количество еще на множитель ϵ_1/ϵ_F . На рис. 8.12, в показана малая сфера, на поверхности которой все пары состояний 3, 4 на противоположных концах диаметра удовлетворяют требованиям законов сохранения, но столкновения возможны только такие, в результате которых оба состояния 3, 4 оказываются вне сферы Ферми. В результате понижающий множитель равен $(\epsilon_1/\epsilon_F)^2$. Если ϵ_1

отвечает 1°К , а ϵ_F — температуре $5 \cdot 10^4^\circ\text{К}$, то $(\epsilon_1/\epsilon_F) \approx 4 \cdot 10^{-10}$. Это и есть фактор, который характеризует величину уменьшения частоты столкновений, вызванного влиянием принципа Паули.

Высказанные соображения сохраняют силу и для распределения электронов при конечных, но низких температурах $k_B T \ll \epsilon_F$. Если ϵ_1 порядка тепловой энергии, т. е. $\approx k_B T$, то уменьшение частоты электрон-электронных столкновений относительно классической величины будет характеризоваться множителем $(k_B T/\epsilon_F)^2$, а для эффективного сечения столкновений получим выражение

$$\sigma_{\text{el-el}} \approx \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \sigma_0, \quad (8.27)$$

где σ_0 — сечение для экранирования кулоновского взаимодействия. Взаимодействие одного из электронов с любым другим имеет порядок длины экранирования $1/\lambda$. Численные расчеты эффективного сечения столкновений между электронами (с учетом экранирования) дают величину порядка 10^{-15} см^2 , или 10 \AA^2 для типичных металлов. Влияние экранирования сильно сказывается при электрон-электронных столкновениях, уменьшая сечение рассеяния ниже величины, которой можно было ожидать из формулы Резерфорда для случая неэкранированного кулоновского потенциала. Однако наибольшее уменьшение связано с влиянием принципа Паули, оно характеризуется множителем $(k_B T/\epsilon_F)^2$.

При комнатных температурах у типичных металлов отношение $k_B T/\epsilon_F$ порядка 10^{-2} , а следовательно, $\sigma \sim 10^{-4} \sigma_0 \sim 10^{-19} \text{ см}^2$. Средняя длина свободного пробега при комнатной температуре для электрон-электронных столкновений равна тогда по порядку величины 10^{-4} см ; действительно,

$$l_{\text{el-el}} \approx \frac{1}{n\sigma} \sim 10^{-4} \text{ см}.$$

Это значение $l_{\text{el-el}}$ по крайней мере в 10 раз больше, чем средняя длина свободного пробега для электрон-фононных взаимодействий при комнатной температуре; это значит, что электроны сталкиваются преимущественно с фононами. При температурах жидкого гелия вклад в сопротивление пропорционален T^2 (это было установлено для индия и алюминия в работе Гарланда и Бауэрса [16]), а также температурная зависимость согласуется с выражением для сечения при рассеянии электронов на электронах [см. (8.27)]. Средняя длина свободного пробега электронов в индии при 2°К оказалась порядка 30 см (как и ожидали). Отсюда видно, что принцип Паули дает ответ на одну из центральных проблем теории металлов: почему электроны проходят в металле такие большие расстояния, не сталкиваясь между собой.

ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В соответствии с соображениями, высказанными при установлении соотношения (7.45), мы полагаем, что на частицы действует сила \mathbf{F} , в результате чего все точки сферы Ферми испытывают смещение в \mathbf{k} -пространстве на $\delta\mathbf{k}$; уравнение движения имеет вид:

$$\hbar \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta\mathbf{k} = \mathbf{F}. \quad (8.28)$$

Член $\hbar(d/dt)\delta\mathbf{k}$ описывает ускорение свободной частицы, а эффект столкновений (аналог трения) описывается членом $\hbar\delta\mathbf{k}/\tau$, где τ — время между столкновениями. Рассмотрим теперь движение системы в однородном магнитном поле \mathbf{B} . На каждый электрон будет действовать сила Лоренца

$$\text{(СГС)} \quad \mathbf{F} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (8.29)$$

$$\text{(СИ)} \quad \mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Поскольку $m\delta\mathbf{v} = \hbar\delta\mathbf{k}$, то уравнение движения примет вид

$$\text{(СГС)} \quad m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta\mathbf{v} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (8.30)$$

Приращение скорости $\delta\mathbf{v}$, фигурирующее в правой (силовой) части уравнения (8.30), представляет собой среднее значение \mathbf{v} , взятое по поверхности Ферми.

Циклотронная частота. Рассмотрим уравнения движения для случая, когда поле \mathbf{B} направлено вдоль оси z . Для простоты будем считать $\tau \rightarrow \infty$ и положим $\mathbf{E} = 0$. Заметим попутно, что столь же просто можно было бы решить уравнения и для конечного τ . Условие существования хорошо выраженной резонансной линии¹⁾ выполняется при $\omega_c\tau > 1$, где ω_c дается приводимой ниже формулой (8.33). Итак, в рассматриваемом случае уравнение (8.30), записанное в компонентах по осям x и y , примет вид

$$\text{(СГС)} \quad m \frac{d}{dt} \delta v_x = -\frac{eB}{c} \delta v_y; \quad m \frac{d}{dt} \delta v_y = \frac{eB}{c} \delta v_x. \quad (8.31)$$

¹⁾ Это условие подобно условию острого резонанса для системы типа затухающего гармонического осциллятора, уравнение движения для которого имеет вид

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) = Ee^{-i\omega t}.$$

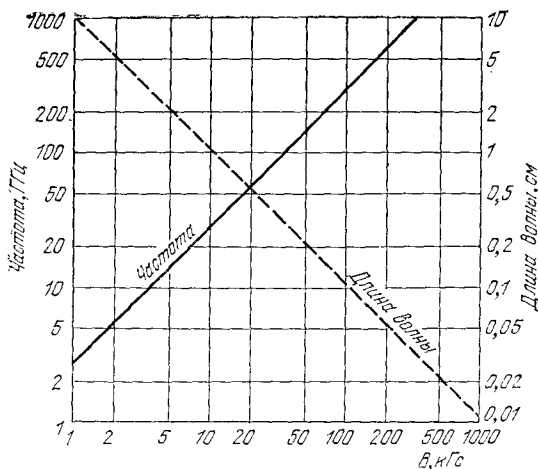


Рис. 8.13. Зависимость частоты циклотронного резонанса f_c (в ГГц) от величины магнитного поля (в кГс) для свободных электронов. Штриховой линией показана связь между длиной электромагнитной волны λ (при осуществлении циклотронного резонанса) и магнитным полем.

Решения этой системы уравнений имеют вид

$$\delta v_x = v_0 \cos \omega_c t; \quad \delta v_y = v_0 \sin \omega_c t, \quad (8.32)$$

где

$$(\text{СГС}) \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{mc}, \quad (\text{СИ}) \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{m}. \quad (8.33)$$

Эта частота ω_c и есть *циклотронная частота* для свободного электрона. Численные значения ω_c (в МГц) в согласии с графиками на рис. 8.13 можно определять по формуле

$$f_c (\text{МГц}) \approx 2,80 B (\text{гауссы}) = 2,80 \cdot 10^{-4} B (\text{тесла}), \quad (8.34)$$

где $f_c \equiv \omega_c/2\pi$. Амплитудное значение скорости v_0 в (8.32) не является скоростью Ферми; это просто величина какой-то начальной дрейфовой скорости электрона на поверхности Ферми.

Для свободного электрона в поле 10 кГс получим: $\omega_c = 1,76 \cdot 10^{11}$ рад/сек. Если время релаксации (как для чистой меди) равно $2 \cdot 10^{-14}$ сек при 300°К и $2 \cdot 10^{-9}$ сек при 4°К, то для Си имеем соответственно $\omega_c \tau = 3,5 \cdot 10^{-3}$ и $3,5 \cdot 10^2$. Следовательно, циклотронная орбита при комнатной температуре никогда не может сформироваться, а при гелиевых температурах электрон до столкновения проходит по орбите много витков.

Статическое магнетосопротивление. Важную роль во многих ситуациях играет случай, когда постоянное магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z (т. е. перпендикулярно к плоскости xy).

Тогда для электронов уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta v_x &= -e \left(E_x + \frac{B}{c} \delta v_y \right), \\ m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta v_y &= -e \left(E_y - \frac{B}{c} \delta v_x \right), \\ m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta v_z &= -e E_z. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Те же уравнения в системе СИ получим, заменив c на 1. В стационарных условиях производная по времени равна нулю, и вместо (8.35) получим:

$$\begin{aligned} \delta v_x &= -\frac{e\tau}{m} E_x - \omega_c \tau \delta v_y; & \delta v_y &= -\frac{e\tau}{m} E_y + \omega_c \tau \delta v_x; \\ \delta v_z &= -\frac{e\tau}{m} E_z. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Решая эту систему уравнений относительно δv_x и δv_y , найдем:

$$\begin{aligned} \delta v_x &= -\frac{e\tau/m}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_x - \omega_c \tau E_y), \\ \delta v_y &= -\frac{e\tau/m}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_y + \omega_c \tau E_x). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Плотность тока для электронов описывается соотношением $\mathbf{j} = n(-e)\delta\mathbf{v}$. Для компонент вектора плотности электрического тока соответственно имеем:

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_x - \omega_c \tau E_y), \\ j_y &= \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} (\omega_c \tau E_x + E_y), \\ j_z &= \sigma_{zz} E_z = \sigma_0 E_z, \end{aligned} \quad (8.38)$$

где $\sigma_0 \equiv ne^2\tau/m$. Компонента плотности тока по оси z , очевидно, не существенна, если магнитное поле направлено вдоль оси z , но для полноты мы ее выписали в (8.38). Плотность тока можно записать также и в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (\omega_c \tau)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

Из выражений (8.38) видно, что диагональные элементы тензора проводимости, а именно σ_{xx} и σ_{yy} , характеризующие

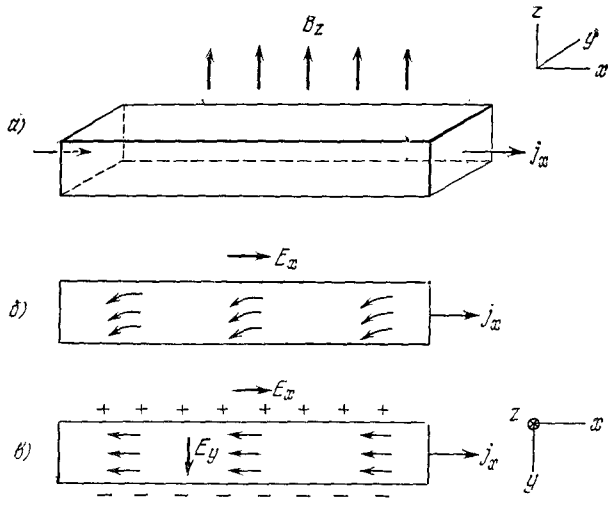


Рис. 8.14. К описанию эффекта Холла. Обычно для описания эффекта Холла используется так называемая стандартная геометрия. а) Образец в форме прямоугольного бруска (параллелепипеда) располагается в магнитном поле, направленном по оси z , так, чтобы одна из плоскостей бруска была перпендикулярна к магнитному полю, а электрическое поле E (направление исходного тока j) совпадало с осью x . Электрическое поле E_x , приложенное к электродам на торцах бруска, вызывает ток с плотностью j_x , текущий вдоль бруска. б) Сечение, перпендикулярное к оси z ; момент, когда дрейфовая скорость только возникла. Схема иллюстрирует тот факт, что при приложении внешнего электрического поля электроны сразу приобретают некую дрейфовую скорость. Отклонение электронов к оси $-y$ вызывается действием магнитного поля. Электроны накапливаются на одной грани бруска (отрицательный заряд), а на противоположной грани «обнажившиеся» положительные ионы приводят к накоплению избыточного (по отношению к нейтральной ситуации) положительного заряда. Этот процесс продолжается до тех пор, пока образующееся поперечное электрическое поле (поле Холла) не скомпенсирует силы, действующие на электроны со стороны магнитного поля. Устанавливается стационарное состояние (при фиксированном внешнем электрическом и магнитном полях). в) То же сечение, что и в случае б; дрейфовая скорость постоянна; уже установилось стационарное состояние.

эффект магнетосопротивления, при уменьшении величины магнитного поля B (или ω_c) монотонно убывают. Нondiagonальные элементы σ_{xy} и σ_{yx} при увеличении величины магнитного поля B сначала возрастают, а затем убывают. Однако, чтобы определить экспериментально электросопротивление в магнитном поле, следует специально выбирать геометрию опыта (см. задачу 8.4).

Эффект Холла. Рассмотрим образец в виде бруска, помещенный в продольное (вдоль оси бруска) электрическое поле E_x и поперечное (перпендикулярное к оси бруска) магнитное поле B (см. рис. 8.14). Поскольку ток не может «вытекать» из бруска

в направлении оси y , то следует положить $j_y = 0$. Согласно уравнениям (8.38) это возможно, лишь когда поперечное электрическое поле (т. е. компонента E_y) имеет величину

$$\text{(СГС)} \quad E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{mc} E_x, \quad (8.40)$$

$$\text{(СИ)} \quad E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{ni} E_x.$$

Величину этого поперечного поля E_y можно определить, измеряя разность потенциалов на противоположных гранях бруска (перпендикулярных к оси x). Поле E_y называют *полем Холла*, а величину

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} \quad (8.41)$$

называют *коэффициентом* (или *постоянной*) *Холла*. Чтобы оценить величину R_H в нашей простой модели, подставим (8.40) в первое из уравнений (8.38); в результате получим:

$$\text{(СГС)} \quad R_H = -\frac{eB\tau E_x/mc}{ne^2\tau E_x B/m} = -\frac{1}{nec}; \quad (8.42)$$

$$\text{(СИ)} \quad R_H = -\frac{1}{ne},$$

т. е. R_H для свободных электронов — величина отрицательная, если величину e считать положительной по определению. Чем меньше концентрация носителей, тем больше величина коэффициента Холла. Поэтому измерение R_H дает способ определять концентрацию носителей.

Простой результат (8.42) есть следствие предположения о том, что времена релаксации одинаковы для всех электронов независимо от их скорости. Если же время релаксации зависит от скорости, то в правой части этого выражения для R_H появится численный множитель порядка единицы. Зависимость (8.42) станет несколько сложнее, если вклад в проводимость обусловлен и электронами, и дырками (см. ниже). Вывод соответствующего выражения для R_H предлагается читателю в виде задачи 11.3 (в конце гл. 11). Теория эффекта Холла вновь становится простой в случае сильных магнитных полей¹⁾, когда $\omega_c \tau \gg 1$, где ω_c — частота циклотронного резонанса, τ — время релаксации.

¹⁾ Обзор гальваномагнитных эффектов в сильных полях дан Фосеттом [17].

Сравнение экспериментальных значений коэффициента Холла с вычисленными согласно теории свободных электронов

Металл	Метод	Экспериментальные значения R_H , 10^{-24} ед. СГС	Предполагаемое число носителей на один атом	Вычисленные значения величины $-1/nec$, 10^{-24} ед. СГС
Li	А	-1,89	1 электрон	-1,48
Na	Б	-2,619	1 электрон	-2,603
K	А	-2,3	1 электрон	-4,914
	Б	-4,946		
Rb	А	-4,7	1 электрон	-6,04
	Б	-5,6		
Cu	А	-0,6	1 электрон	-0,82
Ag	А	-1,0	1 электрон	-1,19
Au	А	-0,8	1 электрон	-1,18
Be	А	+2,7	—	—
Mg	А	-0,92	—	—
Al	Б	+1,136	1 дырка	+1,135
	А	-0,43		
In	Б	+1,774	1 дырка	+1,780
As	А	+50	—	—
Sb	А	-22	—	—
Bi	А	-6000	—	—

Экспериментальные значения R_H , полученные традиционными методами (А), взяты из данных об измерениях при комнатной температуре (из таблиц Ландольта-Бернштейна [18]); значения, полученные методом спиральных волн (Б) при 4 °К, заимствованы из работы Гудмена [19]. Значения концентрации носителей (n) брались из табл. 1.5, за исключением значений для Na, K, Al и In, которые были взяты из работы Гудмена [19].

Чтобы перейти от значений R_H в единицах СГС к значениям в единицах В·см/А·Гс, следует умножить первые на $9 \cdot 10^{11}$, а для перехода к значениям в единицах м²/Кл — соответственно на $9 \cdot 10^{13}$.

Наблюдаемые значения коэффициента Холла для некоторых металлов приведены в табл. 8.3; там же для сравнения приведены значения, вычисленные непосредственно по концентрации носителей заряда. Наиболее точные измерения проведены на чистых образцах при низких температурах в сильных магнитных полях методом «спирального резонанса» (см. задачу 8.7).

Видно, что для одновалентных металлов (натрия и калия) точно измеренные значения коэффициента Холла находятся в превосходном согласии со значениями, вычисленными по (8.42) в предположении, что на каждый атом приходится один валентный электрон. Следует, однако, обратить внимание на данные для трехвалентных металлов (алюминия и индия): экспериментальные значения согласуются с вычисленными в предположении о том, что на атом приходится один положительный электронный заряд (или дырка). В предположении о трех валентных электронах на атом мы получили бы для алюминия и индия значения, по знаку и величине отличные от приведенных. Вопрос о причинах положительных коэффициентов Холла возникает также в случае Be и As (значения для них также даны в табл. 8.3), поскольку положительный знак коэффициента Холла ассоциируется с движением положительно заряженных носителей тока. На эту проблему обратили внимание уже давно; еще Г. А. Лорентц высказался по этому поводу следующим образом:

«Казалось бы, это свидетельствует о том, что следует предположить себе два типа свободных электронов, движение положительных преобладает в одних телах, отрицательных — в других».

Однако невозможно допустить, что в одних металлах свободные носители — позитроны, а в других — электроны. В следующей главе мы узнаем, что теория энергетических зон позволяет описать движение электронов в некоторых обстоятельствах так, как если бы они были наделены положительным зарядом. Орбиты таких электронов называют дырочными орбитами. Мы сможем также объяснить большие значения коэффициента Холла в полуметаллах (таких как As, Sb, Bi) и в полупроводниках.

ЗАДАЧИ

8.1. Приближение Томаса — Ферми. В приближении Томаса — Ферми концентрация электронов $n(r)$ связана с электростатическим потенциалом $\varphi(r)$ соотношением

$$n(r) \approx n_0 + \frac{3}{2} n_0 \frac{e\varphi(r)}{e_F},$$

где n_0 — концентрация электронов в области, где $\varphi = 0$, e_F — энергия Ферми.

а) Используя этот результат, показать, что при $x > 0$ электростатический потенциал имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{2\pi\sigma}{k_s} e^{-k_s x},$$

где σ — внешняя плотность заряда на плоскости $x = 0$.

б) Найти выражение для k_s через невозмущенную скорость Ферми v_F и невозмущенную плазменную частоту ω_p .

в) Оценить величину k_s для натрия.

8.2. Формула Хагена — Рубенса для коэффициента отражения инфракрасного излучения от поверхности металла. Комплексный показатель преломления $n + ik$ металла при $\omega t \ll 1$ можно записать в виде

$$(СГС) \quad \varepsilon(\omega) \equiv (n + ik)^2 = 1 + 4\pi\sigma_0/\omega,$$

где σ_0 — проводимость в постоянном электрическом поле.

а) Используя для коэффициента отражения R при нормальном падении выражение

$$(СГС) \quad R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2},$$

показать, что

$$(СГС) \quad R \approx 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi\sigma_0}\right)^{1/2}.$$

Это и есть формула Хагена — Рубенса. Предположить, что $\omega \ll \sigma_0$.

Замечание: Рекомендуется ознакомиться с экспериментами на Al, описанными в работе Беннета и др. [20].

8.3. Показатель преломления для рентгеновских лучей. Оценить диэлектрическую проницаемость и показатель преломления металлического натрия для рентгеновских лучей с энергией 10 кэВ. Энергию ионизации электронов считать пренебрежимо малой по сравнению с энергией рентгеновских фотонов, т. е. считать, что в этих экспериментах все (а не только валентные) электроны Na можно рассматривать как свободные. Предположить, что время релаксации τ бесконечно.

8.4. Магнетосопротивление. Поперечное магнетосопротивление твердого тела при стандартной геометрии опыта определяется отношением E_x/j_x (см. рис. 8.14). Показать, что уравнения (8.38) приводят к соотношению $j_x = \sigma_0 E_x$, поскольку в стандартной геометрии $j_y = 0$. Получается, что сопротивление не зависит от магнитного поля, в то время как в экспериментах в общем случае такая зависимость обнаруживается, причем сопротивление обычно растет при увеличении напряженности магнитного поля. Следовательно, в нашей модели имеется дефект, связанный частично с нереальным предположением о том, что все электроны имеют одно и то же время релаксации τ , не зависящее от скорости электронов.

8.5*. Поверхностные плазмоны. Рассмотрим плазму в бесконечном полупространстве в области положительных значений z (т. е. над плоскостью $z = 0$). Решение уравнения Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ в плазме имеет вид

$$\varphi_i(x, z) = A \cos kx \cdot e^{-kz},$$

откуда для компонент электрического поля имеем:

$$\begin{aligned} E_{zi} &= kA \cos kx \cdot e^{-ikz}, \\ E_{xi} &= kA \sin kx \cdot e^{-kz}. \end{aligned}$$

а) Показать, что в вакууме потенциал

$$\Phi_0(x, z) = A \cos kx \cdot e^{kz}$$

для $z < 0$ удовлетворяет граничному условию непрерывности тангенциальной составляющей \mathbf{E} на границе; для того, чтобы это показать, надо найти E_{x0} .

б) Заметим, что $\mathbf{D}_i = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_i$, $\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}_0$. Показать, что граничное условие непрерывности нормальной составляющей вектора \mathbf{D} на границе требует, чтобы было $\varepsilon(\omega) = -1$, откуда согласно (8.8) получим:

$$\omega_s^2 = \omega_p^2/2, \quad (8.43)$$

где ω_s — частота поверхностных плазменных колебаний. (Подробнее с этим вопросом можно познакомиться по работам Ричи [21] и Стерна и Феррела [22]; эксперименты по плазменному резонансу на поверхности малых сферических частиц серебра и золота обсуждаются в работе Крейбига и Захариаза [23].)

8.6*. **Плазмоны на границе раздела.** Рассмотрим плоскую границу при $z = 0$ между металлом 1 при $z > 0$ и металлом 2 при $z < 0$. Для массивного образца металла 1 плазменная частота равна ω_{p1} , для металла 2 равна ω_{p2} . Диэлектрическую проницаемость обоих металлов считаем равной диэлектрической проницаемости заключенного в них свободного электронного газа. Показать, что поверхностные плазмоны на границе $z = 0$ имеют частоту

$$\omega = \left[\frac{1}{2} (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) \right]^{1/2}. \quad (8.44)$$

Такие плазмоны наблюдались на границе Al/Mg; см. работу Кунца [24].

8.7*. **Спиральные волны.** В чистых металлах при низких температурах обнаруживается необычное распространение электромагнитных волн. Эти так называемые спиральные волны впервые наблюдались Бауэрсом (R. Bowers) и его сотрудниками; они же предложили использовать их для измерений коэффициентов Холла. Пусть постоянное внешнее магнитное поле B_0 приложено в направлении оси z . При частотах $\omega \ll 1/\tau$ компоненты дрейфовой скорости определяются выражениями (8.36).

а) Показать, что выражения (8.36) в этом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \rho_0 j_x - R_H B j_y; \\ E_y &= R_H B j_x + \rho_0 j_y, \end{aligned} \quad (8.45)$$

где статическое удельное электросопротивление $\rho_0 = 1/\sigma_0 = m/ne^2\tau$, а коэффициент Холла $R_H = -1/nec$ (в системе единиц СГС). В выражениях (8.45) мы можем приближенно считать $B_0 = B$.

б) Пренебрегая токами смещения, показать, что из уравнений Максвелла (для немагнитной среды)

$$\text{(СГС)} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.46)$$

можно, имея в виду, что $\text{rot rot } \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$, получить уравнение

$$\text{(СГС)} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (8.47)$$

в) Предположим, что \mathbf{E} и \mathbf{j} периодически зависят от z и t , т. е. имеют вид $\exp i(kz - \omega t)$, и в приближении сильного поля будем считать $R_H B_a \gg \rho_0$. Пренебрегая ρ_0 , показать, что уравнения (8.47) имеют решения, если

$$\text{(СГС)} \quad \omega = k^2 \frac{|R_H| B_a c^2}{4\pi} = k^2 \frac{B_a c}{4\pi n c}. \quad (8.48)$$

Это не что иное, как дисперсионный закон для спиральных волн, из которого можно (зная n) определять коэффициент Холла.