

При малых K и низких ω единицей в правой части (D.21) можно пренебречь. Моды продольных колебаний системы определяются (как мы установили ранее в гл. 5) нулями функции $\epsilon(K, \omega)$. В точках, где функция $\epsilon(K, \omega)$ обращается в нуль (учитывая, что $\epsilon_F \equiv 1/2 m v_F^2$), имеем:

$$\omega^2 = \frac{4\pi n^2 e^2}{M \lambda^2} K^2 = \frac{4\pi n e^2}{M} \frac{\epsilon_F}{6\pi n e^2} K^2 = \frac{m}{3M} v_F^2 K^2, \quad (\text{D.22})$$

или

$$\omega = v K, \quad v = v_F \sqrt{m/3M}. \quad (\text{D.23})$$

Нетрудно заметить, что эти выражения описывают длинноволновые акустические фононы. Приведенная формула для скорости находится в хорошем согласии с экспериментальными значениями скорости продольных волн в щелочных металлах. Например, для калия формула дает $v = 1,8 \cdot 10^5$ см/сек, а наблюдаемое значение для скорости продольных волн в направлении [100] равно $2,2 \cdot 10^5$ см/сек (при 4°K). Поскольку $v \ll v_F$, условие применимости диэлектрической функции (D.19) к электронному газу, а именно условие $\omega < v_F K$, в данном случае выполняется.

Имеется, однако, и другой тип нуля функции $\epsilon(K, \omega)$, т.е. другое условие, при котором в задаче о решетке положительных ионов, погруженных в электронный газ, диэлектрическая функция обращается в нуль. В случае высоких частот к диэлектрической функции в виде (D.20) надо добавить диэлектрический вклад электронного газа $-\omega_p^2/\omega^2$ из второго из выражений (D.18) и воспользоваться полученным выражением вместо (D.19). А именно, получим:

$$\epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{4\pi n e^2}{M \omega^2} - \frac{4\pi n e^2}{m \omega^2}. \quad (\text{D.24})$$

Эта функция обращается в нуль при

$$\omega^2 = \frac{4\pi n e^2}{\mu}; \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}. \quad (\text{D.25})$$

Условие (D.25) есть выражение для электронной плазменной частоты, где, однако, вместо массы электрона стоит масса μ , вносящая поправку на движение положительных ионов.

Е. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ — ДИРАКА

Выражение для функции распределения Ферми — Дирака можно легко вывести, имея даже небольшой багаж знаний о статистической физике. Функция распределения Ферми — Дирака $f(\epsilon)$ есть вероятность того, что одночастичное состояние с энергией ϵ является занятым, когда система частиц, для которой указанное состояние — одно из возможных, находится в тепловом равновесии при температуре T . Воспользуемся распределением Гиббса, которое является обобщением распределения Больцмана; согласно Гиббсу¹⁾ вероятность $P(N, \epsilon_i)$ того, что система содержит N частиц и ее полная энергия равна ϵ_i , пропорциональна

$$\exp [(\mu N - \epsilon_i)/k_B T]. \quad (\text{E.1})$$

¹⁾ См. книгу Киттеля [10].

Здесь μ — химический потенциал, который должен быть определен так, чтобы соответствовать полному числу частиц системы N (см. обсуждение этого вопроса в гл. 7).

Применим выражение (E.1) к случаю состояния, в котором может находиться не более одного электрона. Когда состояние не занято, будем считать энергию равной нулю; отсюда следует, что

$$P(0, 0) \sim e^0 = 1. \quad (E.2)$$

Когда состояние занято электроном (в силу сказанного выше — единственным), то

$$P(1, \varepsilon) \sim \exp[(\mu - \varepsilon)/k_B T]. \quad (E.3)$$

Следовательно, вероятность того, что данное состояние занято, можно записать в виде

$$f(\varepsilon) = \frac{P(1, \varepsilon)}{P(0, 0) + P(1, \varepsilon)} = \frac{\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1}. \quad (E.4)$$

Это и есть тот результат, который мы хотели получить.

Г. ПРИБЛИЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ

Вопрос об образовании разрешенных и запрещенных полос полезно рассмотреть также с иной точки зрения, не так, как это было сделано в основном тексте. Рассмотрим систему нейтральных изолированных атомов и их энергетические уровни. Попытаемся выяснить, что будет происходить с уровнями, если распределения зарядов соседних атомов перекрываются, когда атомы сближаются, образуя металл.

Причины расширения энергетических уровней свободных атомов в зоны при сближении атомов можно понять, рассматривая систему из двух атомов

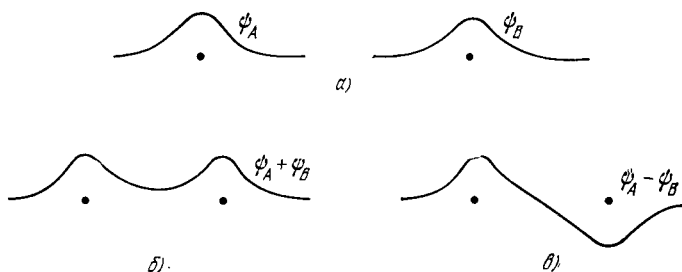


Рис. Г.1. а) Схематическое изображение волновых функций электронов двух атомов водорода, удаленных друг от друга. б) Волновая функция основного состояния двух атомов водорода, сближенных между собой. в) Волновая функция возбужденного состояния.