

Отсюда с учетом (I.43) для  $\Phi_n$  имеем:

$$\Phi_n = \left( \frac{\hbar c}{e} \right)^2 \frac{1}{B} S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar c}{e}. \quad (\text{I. 47})$$

Наконец, получаем, что площади орбит в  $\mathbf{k}$ -пространстве удовлетворяют следующему соотношению:

$$S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar c} B. \quad (\text{I. 48})$$

Этот результат был получен Онсагером и И. М. Лифшицем. В качестве примера на рис. I.1 показаны две орбиты.

## I. КВАНТОВАНИЕ ПОТОКА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ КОЛЬЦЕ

Мы приведем здесь доказательство того, что полный магнитный поток, проходящий через сверхпроводящее кольцо, может принимать лишь дискретные значения, кратные кванту потока, равному  $2\pi\hbar c/q$ , где согласно экспериментальным данным заряд  $|q| = 2e$ . Этот результат подтверждает, что сверхпроводящее состояние возникает благодаря спариванию электронов. Квантование потока — красивый пример макроскопического проявления квантового эффекта. В этом случае, так сказать, когерентность сверхпроводящего состояния охватывает все кольцо или всю обмотку соленоида.

Электромагнитное поле служит примером бозонного поля. Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  можно качественно трактовать как амплитуду поля. Плотность энергии в квазиклассическом приближении можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx n(\mathbf{r}) \hbar\omega,$$

где  $n(\mathbf{r})$  — число фотонов частоты  $\omega$  на единицу объема. Предположим, что полное число фотонов в объеме велико по сравнению с единицей. Тогда для амплитуды можно записать выражение:

$$E(\mathbf{r}) \approx (4\pi\hbar\omega)^{1/2} [n(\mathbf{r})]^{1/2} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad E^*(\mathbf{r}) \approx (4\pi\hbar\omega)^{1/2} [n(\mathbf{r})]^{1/2} e^{-i\theta(\mathbf{r})},$$

где  $\theta(\mathbf{r})$  — фаза поля. Введем теперь для описания бозонов, как частиц, амплитуды вероятностей, однако частицами будем считать электронные пары. (Здесь полной аналогии с фотонами уже нет, но эта аналогия еще полезна.)

Основное состояние сверхпроводника построено из слабо связанных электронных пар, называемых куперовскими парами. Электронная пара будет вести себя как бозон<sup>1)</sup>, хотя отдельный электрон является фермионом. Приведенные соображения применимы к бозонному газу при очень большом числе

<sup>1)</sup> Температура конденсации бозонов, вычисленная для концентраций электронов, типичных для металлов, порядка температуры Ферми, т. е.  $10^4$ — $10^5$  °К. Температура перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное во много раз меньше; при температуре перехода каждая электронная пара распадается на два фермиона. Модель сверхпроводника в виде системы из невзаимодействующих бозонов не следует понимать слишком буквально, поскольку объем, приходящийся на одну куперовскую пару, содержит около  $10^6$  электронов.

бозонов в одном и том же состоянии, и тогда амплитуды вероятности для бозонов можно трактовать как классические величины, подобно тому как для фотонов используется язык описания электромагнитного поля. Однако эти же соображения неприменимы к металлу в нормальном состоянии, поскольку в таком состоянии спаренных электронов нет и каждый электрон ведет себя как фермион.

Покажем сначала, что для заряженного бозонного газа справедливо уравнение Лондонов в форме (12.22). Пусть  $\psi(\mathbf{r})$  — амплитуда вероятности для бозонной частицы. Предположим, что концентрация таких частиц постоянна, т. е.

$$n = \psi^* \psi = \text{const.} \quad (\text{J.1})$$

При абсолютном нуле число  $n$  вдвое меньше концентрации электронов в зоне проводимости, поскольку  $n$  относится к частицам, являющимся электронными парами. Тогда для амплитуд можно записать:

$$\psi = n^{1/2} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad \psi^* = n^{1/2} e^{-i\theta(\mathbf{r})}. \quad (\text{J.2})$$

Для последующего фаза  $\theta(\mathbf{r})$  является весьма важной величиной. Вполне хорошим приближением будет трактовка  $\psi$  как классических амплитуд, а не как квантовых операторов поля.

Для скорости частицы, используя (1.4), имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{1}{m} \left( -i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right). \quad (\text{J.3})$$

Для потока частиц будем иметь соотношение

$$\psi^* \mathbf{v} \psi = \frac{n}{m} \left( \hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right). \quad (\text{J.4})$$

Тогда плотность электрического тока в кольце (которое является многосвязной областью) может быть записана в виде

$$\mathbf{j} = q \psi^* \mathbf{v} \psi = \frac{nq}{m} \left( \hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right). \quad (\text{J.5})$$

Взяв ротор от обеих частей (J.5), получим:

$$\text{rot } \mathbf{j} = - \frac{nq^2}{mc} \mathbf{B}. \quad (\text{J.6})$$

Здесь использован тот факт, что ротор от градиента скалярной функции тождественно равен нулю. Уравнение (J.6) является одной из форм записи уравнения Лондонов.

Квантование магнитного потока в кольце является удивительным следствием соотношения (J.5). Возьмем контур  $C$ , замкнутый внутри сверхпроводящего материала и находящийся достаточно далеко от поверхности кольца (рис. J.1). Эффект Мейснера приводит к тому, что внутри кольца величины  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  равны нулю. Правая часть (J.5) равна нулю при условии

$$\hbar c \nabla \theta = q \mathbf{A}. \quad (\text{J.7})$$

Итак, имеем:

$$\int_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = \theta_2 - \theta_1. \quad (\text{J.8})$$

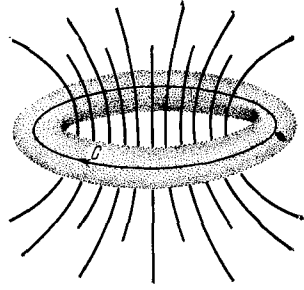


Рис. J.1. Контур интегрирования  $C$  внутри сверхпроводящего кольца.

Это — изменение фазы после одного прохождения по контуру, проходящему по всему кольцу. Амплитуда вероятностей для бозона является в классическом приближении измеримой величиной; амплитуда определяется однозначно, и мы получим:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi s, \tag{J.9}$$

где  $s$  — целое число.

Кроме того, используя теорему Стокса, получим выражение для магнитного потока:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Phi. \tag{J.10}$$

Здесь  $d\boldsymbol{\sigma}$  — элемент площади на поверхности, ограниченной кривой  $C$ , а  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий контур  $C$ . Итак, из (J.7), (J.9) и (J.10) получим:

$$2\pi\hbar cs = q\Phi,$$

или

$$\Phi = \left( \frac{2\pi\hbar c}{q} \right) s. \tag{J.11}$$

Таким образом, поток через кольцо квантуется<sup>1)</sup>, т. е. всегда выражается целым числом «порций» величины  $2\pi\hbar c/q$ . Эксперимент показал, что  $q = -2e$ , это соответствует заряду электронной пары. Для одного кванта потока, таким образом, имеем:

$$\frac{2\pi\hbar c}{2e} \approx 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \tag{J.12}$$

Эту единицу потока называют *флюксондом*. Заметим, что простой результат (J.11) не имеет места, если поток пронизывает само кольцо, например, в том случае, когда кольцо — тонкое.

Поток через кольцо есть сумма двух потоков:  $\Phi_{\text{ext}}$  — от внешних источников и  $\Phi_{\text{sc}}$  — от сверхпроводящего тока, текущего по поверхности кольца:

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{sc}}. \tag{J.13}$$

<sup>1)</sup> Эффект квантования потока был обнаружен экспериментально; см. работы Дивера и Фербенка [17], Долла и Небауера [18].

Поток  $\Phi$  квантуется в целом; однако на поток от внешних источников  $\Phi_{\text{ext}}$  обычно не накладывается каких-либо условий квантования, в то время как поток  $\Phi_{\text{sc}}$  должен «самоподгоняться» так, чтобы полный поток  $\Phi$  имел лишь квантованные значения.

## К. ЭФФЕКТЫ ДЖОЗЕФСОНА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Квантовое туннелирование <sup>1)</sup> неспаренных электронов сквозь слой диэлектрика из сверхпроводника в металл в сверхпроводящем или нормальном состоянии обсуждалось в гл. 12. Описанные там результаты типичны для экспериментов по туннелированию, если конструирование перехода выполнено с должной тщательностью.

При надлежащих условиях удастся наблюдать заметные эффекты, связанные с туннелированием сверхпроводящих электронных пар из сверхпроводника через слой диэлектрика в другой сверхпроводник (рис. К.1). Эффекты, связанные с туннелированием пар, совершенно не похожи на эффекты туннелирования неспаренных электронов. Речь идет о следующих эффектах.

*Стационарный эффект Джозефсона.* Через переход течет постоянный ток в отсутствие какого-либо электрического и магнитного поля.

*Нестационарный эффект Джозефсона.* Когда к переходу приложено постоянное напряжение, через переход течет осциллирующий ток. Этот эффект был использован для точного определения величины отношения  $\hbar/e$ . Кроме того возможна ситуация, когда переменное напряжение вместе с приложенным ранее постоянным напряжением приведет к возникновению постоянного тока через переход.

*Макроскопическая квантовая интерференция.* Постоянное магнитное поле, приложенное вдоль участка цепи из сверхпроводников, в котором имеется два перехода, приводит к появлению максимума сверхпроводящего тока, что свидетельствует об интерференционных эффектах, зависящих от величины напряженности магнитного поля. Этот эффект может быть использован в чувствительных магнетометрах.

Приводимое ниже рассмотрение явлений в джозефсоновских переходах является продолжением рассмотрения, начатого в Приложении J.

**Стационарный эффект Джозефсона.** Пусть  $\psi_1$  — амплитуда вероятности (волновая функция) электронной пары на одной стороне перехода, а  $\psi_2$  — на другой. Для простоты будем считать, что по обе стороны от перехода сверхпроводник один и тот же. Будем считать, что оба конца находятся при нулевом потенциале. Уравнение Шредингера, зависящее от времени,  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$ , в применении к  $\psi_1$  и  $\psi_2$  дает великолепный результат, чрезвычайно упрощающий задачу:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1. \quad (\text{К.1})$$

<sup>1)</sup> Любое туннелирование есть квантовый эффект. Под туннелированием мы подразумеваем проникновение частицы сквозь потенциальный барьер, т. е. через область, которая по классической механике «запрещена» для прохождения.