

Поток  $\Phi$  квантуется в целом; однако на поток от внешних источников  $\Phi_{\text{ext}}$  обычно не накладывается каких-либо условий квантования, в то время как поток  $\Phi_{\text{sc}}$  должен «самоподгоняться» так, чтобы полный поток  $\Phi$  имел лишь квантованные значения.

## К. ЭФФЕКТЫ ДЖОЗЕФСОНА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Квантовое туннелирование <sup>1)</sup> неспаренных электронов сквозь слой диэлектрика из сверхпроводника в металл в сверхпроводящем или нормальном состоянии обсуждалось в гл. 12. Описанные там результаты типичны для экспериментов по туннелированию, если конструирование перехода выполнено с должной тщательностью.

При надлежащих условиях удастся наблюдать заметные эффекты, связанные с туннелированием сверхпроводящих электронных пар из сверхпроводника через слой диэлектрика в другой сверхпроводник (рис. К.1). Эффекты, связанные с туннелированием пар, совершенно не похожи на эффекты туннелирования неспаренных электронов. Речь идет о следующих эффектах.

*Стационарный эффект Джозефсона.* Через переход течет постоянный ток в отсутствие какого-либо электрического и магнитного поля.

*Нестационарный эффект Джозефсона.* Когда к переходу приложено постоянное напряжение, через переход течет осциллирующий ток. Этот эффект был использован для точного определения величины отношения  $\hbar/e$ . Кроме того возможна ситуация, когда переменное напряжение вместе с приложенным ранее постоянным напряжением приведет к возникновению постоянного тока через переход.

*Макроскопическая квантовая интерференция.* Постоянное магнитное поле, приложенное вдоль участка цепи из сверхпроводников, в котором имеется два перехода, приводит к появлению максимума сверхпроводящего тока, что свидетельствует об интерференционных эффектах, зависящих от величины напряженности магнитного поля. Этот эффект может быть использован в чувствительных магнетометрах.

Приводимое ниже рассмотрение явлений в джозефсоновских переходах является продолжением рассмотрения, начатого в Приложении J.

**Стационарный эффект Джозефсона.** Пусть  $\psi_1$  — амплитуда вероятности (волновая функция) электронной пары на одной стороне перехода, а  $\psi_2$  — на другой. Для простоты будем считать, что по обе стороны от перехода сверхпроводник один и тот же. Будем считать, что оба конца находятся при нулевом потенциале. Уравнение Шредингера, зависящее от времени,  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$ , в применении к  $\psi_1$  и  $\psi_2$  дает великолепный результат, чрезвычайно упрощающий задачу:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1. \quad (\text{К.1})$$

<sup>1)</sup> Любое туннелирование есть квантовый эффект. Под туннелированием мы подразумеваем проникновение частицы сквозь потенциальный барьер, т. е. через область, которая по классической механике «запрещена» для прохождения.

Рис. К.1а. Туннельный переход, состоящий из двух сверхпроводников, разделенных тонким слоем диэлектрика. Этим слоем может служить слой окислов толщиной порядка  $10 \text{ \AA}$  на поверхности одного из сверхпроводников.

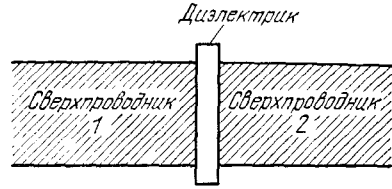
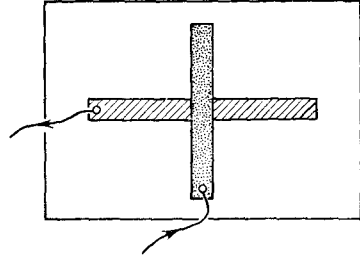


Рис. К.1б. Реальный туннельный переход может быть выполнен в виде двух скрещенных полосок свинца, нанесенных осаждением на стеклянную пластинку. Первая полоска выдерживается на воздухе до образования пленки окисла; затем перпендикулярно к первой наносится тем же путем вторая полоска. Электросопротивление перехода может быть порядка  $1 \text{ Ом}$ ; площадь контакта  $10^{-4} \text{ см}^2$ ; максимальный джозефсоновский ток — порядка  $1 \text{ мА}$ . Земное магнитное поле вызывает вредный эффект дефазировки на контакте, поэтому в опыте необходимо принимать меры по экранированию этого поля.



Здесь  $\hbar T$  — оператор, описывающий взаимодействие электронных пар или *взаимодействие переноса* пар через слой диэлектрика в переходе. Величина  $T$  имеет размерность частоты (или быстроты) и служит мерой «перетекания»  $\psi_1$  в область 2 и  $\psi_2$  — в область 1. Если слой диэлектрика очень толстый, то величину  $T$  надо считать равной нулю; это значит, что никакого туннелирования пар не происходит.

Пусть функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют следующий вид:

$$\psi_1 = n_1^{1/2} e^{i\theta_1}, \quad \psi_2 = n_2^{1/2} e^{i\theta_2}. \quad (\text{К.2})$$

Тогда, используя первое из соотношений (К.1) в форме  $\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -iT\psi_2$ , имеем:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\theta_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\psi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT\psi_2. \quad (\text{К.3})$$

Подобным же образом, используя второе из соотношений (К.1), имеем:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} e^{i\theta_2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i\psi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT\psi_1. \quad (\text{К.4})$$

Умножив (К.3) на  $n_1^{1/2} e^{-i\theta_1}$ , а (К.4) на  $n_2^{1/2} e^{-i\theta_2}$  и обозначая  $\theta_2 - \theta_1 \equiv \delta$ , получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{i\delta}, \quad (\text{К.5})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + in_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{-i\delta}. \quad (\text{К.6})$$

Приравнявая вещественную и мнимую части слева и справа в (К.5) и (К.6), получим:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T (n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta, \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T (n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta, \quad (\text{К.7})$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -T \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} \cos \delta, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \cos \delta. \quad (\text{К.8})$$

Если слева (область 1) и справа (область 2) от перехода сверхпроводник один и тот же, т. е.  $n_1 \approx n_2$ , то из (К.8) следует, что

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (\text{К.8a})$$

Соответственно, из (К.7) следует, что

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t}. \quad (\text{К.9})$$

Итак, ток, текущий из области 1 в область 2, пропорционален  $\partial n_2 / \partial t$  или, что то же,  $-\partial n_1 / \partial t$ . Поэтому из (К.7) надо заключить, что ток  $J$  сверхпроводящих электронных пар через переход зависит от разности фаз  $\delta$  по закону

$$J = J_0 \sin \delta = J_0 \sin (\theta_2 - \theta_1), \quad (\text{К.10})$$

где  $J_0$  пропорционально величине  $T$  — взаимодействию переноса. Ток  $J_0$  является максимальным значением тока при нулевом внешнем напряжении, который может течь через переход.

При отсутствии внешнего напряжения через переход будет течь постоянный ток, величина которого может принимать какое-то значение между  $J_0$  и  $-J_0$  в зависимости от разности фаз  $\theta_2 - \theta_1$  (см. рис. К.2). Это и есть стационарный эффект Джозефсона.

**Нестационарный эффект Джозефсона.** Пусть к переходу перпендикулярно к его плоскости приложено постоянное напряжение  $V$ . Это всегда можно сделать, поскольку существенной составляющей перехода является слой диэлектрика. Каждая электронная пара с зарядом  $q = -2e$ , пересекая переход,

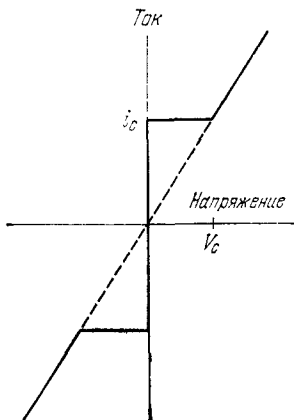


Рис. К.2. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода. Постоянный ток при нулевом внешнем напряжении течет до тех пор, пока не достигнет критического значения  $i_c$ . Это — стационарный эффект Джозефсона. При подаче на контакт внешнего напряжения, превышающего критическое  $V_c$ , переход приобретает конечное электросопротивление, но ток имеет осциллирующую составляющую, частота осцилляций  $\omega = 2eV/\hbar$ . Это — нестационарный эффект Джозефсона.

приобретает потенциальную энергию  $qV$ . Можно сказать, что если пара на одной стороне перехода имеет потенциальную энергию  $-eV$ , то на другой  $+eV$ . Уравнения движения в этом случае будут иметь иной, чем (К.1), вид, а именно:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 - eV \psi_1; \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 + eV \psi_2. \quad (\text{К.11})$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, вместо (К.5) получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = ieV n_1 \hbar^{-1} - iT (n_1 n_2)^{1/2} e^{i\delta}. \quad (\text{К.12})$$

Вещественная часть этого уравнения даст соотношение

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T (n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta, \quad (\text{К.13})$$

которое имеет точно тот же вид, что и при отсутствии внешнего напряжения  $V$ , а мнимая часть даст соотношение

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{eV}{\hbar} - T \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} \cos \delta, \quad (\text{К.14})$$

которое отличается от (К.8) членом  $eV/\hbar$ .

Далее, распространяя (К.6) на данный случай, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + in_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -ieV n_2 \hbar^{-1} - iT (n_1 n_2)^{1/2} e^{-i\delta}, \quad (\text{К.15})$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T (n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta, \quad (\text{К.16})$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{eV}{\hbar} - T \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \cos \delta. \quad (\text{К.17})$$

Для случая  $n_1 \approx n_2$  из (К.14) и (К.17) имеем:

$$\frac{\partial (\theta_2 - \theta_1)}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{2eV}{\hbar}. \quad (\text{К.18})$$

Интегрирование (К.18) даст в результате, что приложение к переходу внешнего напряжения приводит к изменению со временем фаз волновых функций электронных пар по закону

$$\delta(t) = \delta(0) - \frac{2eVt}{\hbar}. \quad (\text{К.19})$$

Величину тока получим из (К.10) с учетом закона для фазы (К.19):

$$J = J_0 \sin \left( \delta(0) - \frac{2eVt}{\hbar} \right). \quad (\text{К.20})$$

Итак, ток осциллирует с частотой

$$\omega = 2eV/\hbar. \quad (\text{К.21})$$

Это и есть *нестационарный эффект Джозефсона*. Например, напряжение величиной 1 мкВ соответствует частоте 483,6 МГц.

Из выражения для частоты (К.21) следует, что фотон с энергией  $\hbar\omega = 2cV$  будет испускаться или поглощаться при пересечении барьера электронной парой. Из измерений напряжения и частоты можно получить весьма точное значение отношения  $e/\hbar$  (см. работу Паркера и др. [19]).

**Макроскопическая квантовая интерференция.** В Приложении J мы установили, что разность фаз  $\theta_2 - \theta_1$  после прохождения по замкнутому контуру, пересекаемому полным магнитным потоком  $\Phi$ , выражается соотношением

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2e}{\hbar c} \Phi. \quad (\text{К.22})$$

Этот поток является суммой двух: один — от внешних полей, второй — от токов, текущих в самом этом контуре. Рассмотрим участок цепи, в который параллельно включены два джозефсоновских перехода (рис. К.3). Какие-либо внешние напряжения отсутствуют.

Пусть разность фаз между точками 1 и 2 на пути через переход  $a$  равна  $\delta_a$ , а на пути через переход  $b$  — соответственно  $\delta_b$ . В отсутствие магнитного поля эти две фазы должны быть равны. Пусть, далее, внутреннюю часть цепи пересекает магнитный поток  $\Phi$ . Это можно осуществить, вводя внутрь цепи прямой соленоид перпендикулярно к плоскости рисунка К.3. Тогда из (К.22) для данного случая имеем:

$$\delta_b - \delta_a = \frac{2e}{\hbar c} \Phi, \quad (\text{К.23})$$

или

$$\delta_b = \delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi, \quad \delta_a = \delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi. \quad (\text{К.24})$$

Полный ток через этот участок цепи равен сумме токов  $J_a$  и  $J_b$ , для каждого из которых можно воспользоваться выражением (К.10) для тока через переход; итак,

$$J_{\text{tot}} = J_0 \left\{ \sin \left( \delta_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi \right) + \sin \left( \delta_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi \right) \right\} = 2 \left( J_0 \sin \delta_0 \right) \cos \frac{e\Phi}{\hbar c}. \quad (\text{К.25})$$

Видно, что величина тока зависит от магнитного потока  $\Phi$ . Ток достигает максимальных значений при

$$\frac{e\Phi}{\hbar c} = r\pi, \quad \text{где } r \text{ — целое число.} \quad (\text{К.26})$$

Примеры графиков периодической зависимости тока от напряженности магнитного поля показаны на рис. К.4. Более короткий период (случай В)

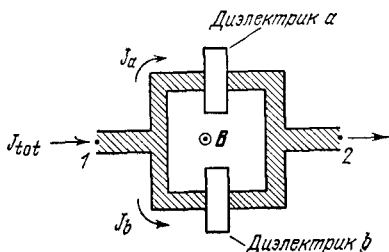


Рис. К.3. Схема эксперимента (два включенных параллельно джозефсоновских перехода) по обнаружению макроскопической квантовой интерференции. Магнитный поток  $\Phi$  проходит через внутреннюю часть петли (магнитное поле  $B$  направлено перпендикулярно к плоскости рисунка на читателя).

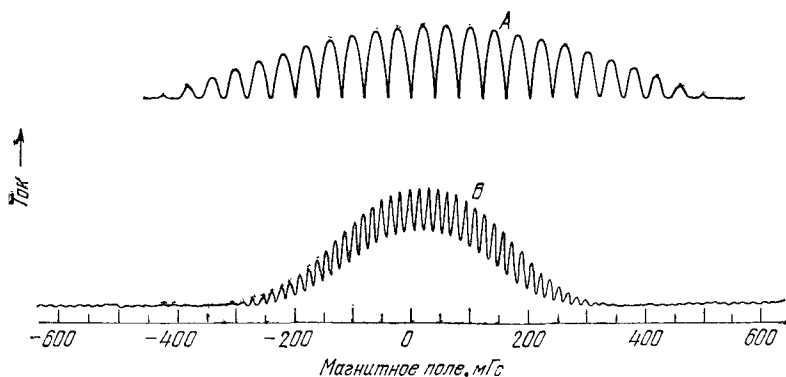


Рис. К.4. Полученная экспериментально запись зависимости тока  $I_{\max}$  от напряженности магнитного поля, иллюстрирующая эффекты интерференции и дифракции для двух пар джозефсоновских переходов. Периодичность изменения поля 39,5 мГс (для случая *A*) и 16 мГс (для случая *B*). Приближенная оценка максимальных токов дает 1 мА (для *A*) и 0,5 мА (для *B*). В обоих случаях расстояние между переходами 3 мм, а толщина самих переходов 0,5 мм. (Из работы Яклевича и др. [20].)

соответствует интерференционному эффекту двух переходов и отвечает соотношениям (К.25) и (К.26). Более длинный период (случай *A*) — случай дифракционного эффекта и является следствием конечных размеров каждого перехода; по этой причине  $\Phi$  зависит от конкретного пути интегрирования.

Дифракционный эффект весьма затруднял наблюдение туннелирования пар в ранних экспериментах по туннелированию неспаренных электронов. Дифракционные эффекты на неспаренных (отдельных) электронах не удавалось обнаружить, пока не были приняты особые меры предосторожности (как при конструировании установки, так и по экранированию посторонних магнитных полей); следует также иметь в виду, что вклад туннелирования пар сильно искажается дифракционными эффектами.

## Л. ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДНИКА С ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЦЕЛЬЮ (ТЕОРИЯ БКШ)

Теория Бардина — Купера — Шриффера (БКШ) в ее оригинальной форме [21] не трудна для понимания и выглядит еще проще, если при ее изложении использовать метод спиновой аналогии, предложенный П. Андерсоном. Подробное изложение имеется в гл. 8 книги Киттеля [22]. Сущность теории основного состояния можно уснить, не прибегая к сложной математике, а просто сделав дополнительные упрощения в предположениях, служащих базисом теории. Сначала мы сформулируем математическую задачу, полезность которой состоит в том, что она облегчит нам последующее изложение. Эта вспомогательная задача, с которой мы начнем, не есть проблема сверхпроводимости, но достаточно тесно с ней связана.

**Вспомогательная задача на собственные значения.** Рассмотрим некоторую невозмущенную одночастичную систему с таким спектром энергетических