

Магноны

Низколежащие энергетические состояния спиновой системы с обменным взаимодействием имеют волновой характер. Это первоначально было показано Блохом для ферромагнетиков. Такие волны называют спиновыми волнами. Энергия спиновой волны квантуется; квант энергии спиновой волны носит название *магнона*. Спиновые волны изучены для всех типов упорядоченных спиновых расположений, в том числе для ферромагнетиков, ферримагнетиков, антиферромагнетиков, неколлинеарных и спиральных спиновых структур. Мы будем рассматривать спиновые волны в ферромагнетиках и в антиферромагнетиках, взяв за основу сначала атомный гамильтониан, а затем макроскопический.

Ферромагнитные магноны

В случае ферромагнитных магнонов простейший гамильтониан представляет собой сумму обменных (по ближайшим соседям) и зеемановских членов

$$H = -J \sum_{j\delta} \mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+\delta} - 2\mu_0 H_0 \sum_j S_{jz}, \quad (4.1)$$

где вектор δ соединяет j -й атом с его ближайшими соседями в решетке Браве, J — обменный интеграл, который считается положительным, $\mu_0 = (g/2)\mu_B$ — магнитный момент, \mathbf{S}_j — оператор спинового момента j -го атома, H_0 — напряженность статического магнитного поля, направленного вдоль оси z . Мы считаем $H_0 > 0$ для того, чтобы магнитные моменты располагались вдоль положительного направления оси z , когда система находится в основном состоянии.

Интегралами движения для гамильтониана (4.1) являются квадрат полного спина $\mathcal{S}^2 = \left(\sum_j \mathbf{S}_j\right)^2$ и z -компонента полного спина $\mathcal{S}_z = \sum_j S_{jz}$. Основное состояние $|0\rangle$ системы N одинако-

вых атомов со спином S обладает следующими свойствами:

$$\mathbb{S}^2 |0\rangle = NS(NS + 1) |0\rangle, \quad \mathbb{S}_z |0\rangle = NS |0\rangle. \quad (4.2)$$

Преобразование Холстейна — Примакова. Гамильтониан содержит по три компоненты S_{jx} , S_{jy} , S_{jz} каждого спина S_j . Эти компоненты не независимы, а связаны тождеством $S_j S_j = S(S+1)$. Более удобно работать с двумя операторами, которые являются независимыми. Преобразование Холстейна — Примакова [1] позволяет перейти от спиновых операторов к бозе-операторам рождения и уничтожения a_j^\dagger и a_j согласно соотношениям

$$S_j^+ = S_{jx} + iS_{jy} = (2S)^{1/2} \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S}\right)^{1/2} a_j, \quad (4.3)$$

$$S_j^- = S_{jx} - iS_{jy} = (2S)^{1/2} a_j^\dagger \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S}\right)^{1/2}; \quad (4.4)$$

при этом мы требуем выполнения условия

$$[a_j, a_l^\dagger] = \delta_{jl}, \quad (4.5)$$

для того чтобы операторы S^+ и S^- удовлетворяли надлежащим перестановочным соотношениям.

Пользуясь (4.3) — (4.5), можно написать преобразование для оператора S_{jz} . Опуская индекс j , получим

$$\begin{aligned} S_z^2 &= S(S+1) - S_x^2 - S_y^2 = S(S+1) - \frac{1}{2}(S^+ S^- + S^- S^+) = \\ &= S(S+1) - S \left[\left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^{1/2} a a^\dagger \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^{1/2} + a^\dagger \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right) a \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая, что $[a^\dagger a, a^\dagger a] = 0$ и $[a^\dagger a, a] = -a$, преобразуем (4.6) к виду

$$\begin{aligned} S_z^2 &= S(S+1) - S \left[2a^\dagger a \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right) + \left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right) + \frac{a^\dagger a}{2S} \right] = \\ &= (S - a^\dagger a)^2; \end{aligned} \quad (4.7)$$

отсюда видно, что

$$S_{jz} = S - a_j^\dagger a_j. \quad (4.8)$$

Удобно, далее, перейти от атомных переменных a_j^\dagger , a_j к магنونным b_k^\dagger , b_k , определив их разложениями

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ik \cdot x_j} a_j, \quad b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-ik \cdot x_j} a_j^\dagger; \quad (4.9)$$

здесь \mathbf{x}_j — радиус-вектор j -го атома. Имеют место и обратные соотношения, т. е.

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} b_{\mathbf{k}}, \quad a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} b_{\mathbf{k}}^\dagger. \quad (4.10)$$

Знак в показателе экспоненты $\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j$ выбран таким же, как и в работе Холстейна и Примакова. Для операторов $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ справедливы бозевские перестановочные соотношения

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \frac{1}{N} \sum_{j'l'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_{j'}} [a_j, a_{l'}^\dagger] = \frac{1}{N} \sum_j e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}; \quad (4.11)$$

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (4.12)$$

Оператор $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ «создает» магنون с волновым вектором \mathbf{k} , а оператор $b_{\mathbf{k}}$ «уничтожает» магنون с волновым вектором \mathbf{k} . Дискретные значения \mathbf{k} , по которым ведутся все суммирования, получаются из периодических граничных условий.

Теперь выразим операторы S_j^+ , S_j^- , S_{jz} через спин-волновые переменные. Нас будут интересовать главным образом состояния системы, близкие к основному, т. е. такие, в которых число перевернутых спинов мало, что выражается условием

$$\frac{\langle a_j^\dagger a_j \rangle}{S} = \frac{\langle n_j \rangle}{S} \ll 1. \quad (4.13)$$

В этом случае квадратные корни в (4.3) и в (4.4) можно разложить в ряд, а именно, можно записать

$$S_j^+ = (2S)^{1/2} \left[a_j - \frac{a_j^\dagger a_j a_j}{4S} + \dots \right] = \left(\frac{2S}{N} \right)^{1/2} \left[\sum_{\mathbf{k}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j] b_{\mathbf{k}} - \frac{1}{4SN} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}_j] b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}''} + \dots \right], \quad (4.14)$$

$$S_j^- = \left(\frac{2S}{N} \right)^{1/2} \left[\sum_{\mathbf{k}} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j] b_{\mathbf{k}}^\dagger - \frac{1}{4SN} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}_j] b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}''} + \dots \right], \quad (4.15)$$

$$S_{jz} = S - a_j^\dagger a_j = S - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}. \quad (4.16)$$

Заметим, что оператор полного спина всей системы равен

$$NS - \mathfrak{S}_z = NS - \sum_j S_{jz} = \sum_j a_j^\dagger a_j.$$

$$\mathfrak{S}_z = NS - \frac{1}{N} \sum_{j, k, k'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] b_k^\dagger b_{k'} = NS - \sum_k b_k^\dagger b_k.$$

(4.17)

Этот результат является точным.

Итак, величину $b_k^\dagger b_k$ можно рассматривать как оператор чисел заполнения состояния с волновым вектором \mathbf{k} для магнов. Собственные значения оператора $b_k^\dagger b_k$ равны положительным целым числам n_k .

Подчеркнем, что операторы a и b обладают свойствами бозе-амплитуд, несмотря на то, что электроны являются фермионами. Это не более удивительно, чем тот факт, что фононы ведут себя как бозоны, хотя основные составляющие систему частицы (электроны, протоны, нейтроны) также подчиняются статистике Ферми. Амплитуды всех макроскопически наблюдаемых полей — это бозе-амплитуды. Амплитуды полей фермионных состояний могут принимать только одно из двух значений — 0 или 1 и поэтому не могут быть точно измерены.

Гамильтониан в спин-волновых переменных. Если воспользоваться формулами преобразования операторов S^+ , S^- , S_z к спин-волновым переменным, то гамильтониан

$$H = -J \sum_{j\delta} \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+\delta} + 2\mu_0 H_0 \sum_j S_{jz}$$

(если считать, что каждый атом имеет z ближайших соседей) примет следующий вид:

$$H = -JNzS^2 - 2\mu_0 H_0 NS + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1. \quad (4.18)$$

Здесь \mathcal{H}_0 — билинейная форма по спин-волновым переменным, т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & -\frac{JS}{N} \sum_{j\delta k k'} \{ \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] \exp[i\mathbf{k} \cdot \delta] b_k b_{k'}^\dagger + \\ & + \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] \exp[-i\mathbf{k}' \cdot \delta] b_k^\dagger b_{k'} - \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] b_k^\dagger b_{k'} - \\ & - \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{x}_j + \delta)] b_k^\dagger b_{k'} \} + \\ & + \frac{2\mu_0 H_0}{N} \sum_{j k k'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] b_k^\dagger b_{k'}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Выполнив суммирование по j , получим

$$\mathcal{H}_0 = -JzS \sum_{\mathbf{k}} \{ \gamma_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ + \gamma_{-\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} - 2b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \} + 2\mu_0 H_0 \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}, \quad (4.20)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{z} \sum_{\delta} e^{i\mathbf{k} \cdot \delta}. \quad (4.21)$$

Сумма в (4.21) берется по всем z ближайшим соседям. Заметим, что $\sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}} = 0$. Если кристалл имеет центр симметрии, то $\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_{-\mathbf{k}}$ и

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \{ 2JzS(1 - \gamma_{\mathbf{k}}) + 2\mu_0 H_0 \} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}. \quad (4.22)$$

В выражении (4.18) имеются еще члены четвертого и более высоких порядков по магنونным операторам; они обозначены через \mathcal{H}_4 . Когда число возбуждений невелико, оператор \mathcal{H}_4 можно при расчетах опускать.

Перепишем (4.22) в несколько иной форме:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{n}_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = 2JSz(1 - \gamma_{\mathbf{k}}) + 2\mu_0 H_0. \quad (4.23)$$

Выражение для $\omega_{\mathbf{k}}$ представляет собой дисперсионный закон для магновов в спиновой системе, образованной решеткой Браве. Экспериментальные кривые для магнетита приведены на рис. 4.1. Примитивная ячейка спиновой решетки Fe_3O_4 содержит несколько ионов, и поэтому, помимо одной обычной акустической магнонной ветви, имеется еще несколько оптических магнонных ветвей. Эти названия для ветвей заимствованы из теории фононов.

Когда $|\mathbf{k} \cdot \delta| \ll 1$,

$$z(1 - \gamma_{\mathbf{k}}) \approx \frac{1}{2} \sum_{\delta} (\mathbf{k} \cdot \delta)^2 \quad (4.24)$$

и

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx 2\mu_0 H_0 + JS \sum_{\delta} (\mathbf{k} \cdot \delta)^2. \quad (4.25)$$

Для простой, объемноцентрированной и гранецентрированной кубических решеток с постоянной решетки, равной a , имеем

$$\omega_{\mathbf{k}} = 2\mu_0 H_0 + 2JS(ka)^2. \quad (4.26)$$

Заметим, что для магнонной частоты вклад обменного взаимодействия имеет тот же вид, что и дисперсионный закон де Бройля для свободных частиц массы m^* , а именно

$$\omega_k = \frac{1}{2m^*} k^2, \quad (4.27)$$

если положить

$$2JSa^2 = \frac{1}{2m^*}, \text{ или } m^* = \frac{1}{4JSa^2}. \quad (4.28)$$

Для типичных ферромагнетиков, точка Кюри которых находится в области комнатной температуры или выше нее, наблюдаемый дисперсионный закон дает значение m^* порядка десяти электронных масс.

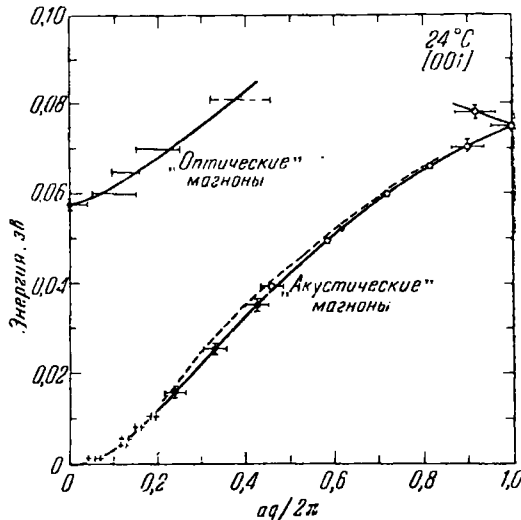


Рис. 4.1. Дисперсионные кривые для акустических и оптических магнонов в магнетите, полученные Брокхаузом и Ватанабе [22] методом неупругого рассеяния нейтронов.

Взаимодействие магнонов. Обменный гамильтониан в спиновых переменных оказывается диагональным лишь в том случае, если мы пренебрежем членами взаимодействия \mathcal{H}_1 в (4.18). Доминирующей частью \mathcal{H}_1 являются биквадратичные члены, которые описывают взаимодействие спиновых волн друг с другом. Сечение столкновения двух спиновых волн с волновыми векторами k_1 и k_2 было вычислено Дайсоном [2] и оказалось пропорциональным $(k_1 a)^2 (k_2 a)^2 a^2$, где a — постоянная решетки. Для магнонов, имеющих микроволновые частоты, ka

порядка 10^{-2} — 10^{-3} , и поэтому для сечения магнон-магнонного обменного рассеяния получаем величину порядка 10^{-25} см², т. е. величину в масштабе атомных процессов очень малую. Физическая интерпретация результатов Дайсона имеется в работе [3].

Используя (4.14)—(4.16) и выполняя простые, но несколько утомительные расчеты и перегруппировки членов, можно с точностью до четвертого порядка по операторам b представить \mathcal{H}_1 в следующем виде:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{zJ}{4N} \sum_{1, 2, 3, 4} b_1^+ b_2^+ b_3 b_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \{2\gamma_1 + 2\gamma_3 - 4\gamma_{1-3}\}, \quad (4.29)$$

где $\Delta(x) = 1$ при $x = 0$ и $\Delta(x) = 0$ во всех остальных случаях. При $\mathbf{k} \cdot \delta \ll 1$ получим

$$2\gamma_1 + 2\gamma_3 - 4\gamma_{1-3} \approx \sum_{\delta} \frac{1}{2z} \{2(\mathbf{k}_1 \cdot \delta)^2 + 2(\mathbf{k}_3 \cdot \delta)^2 - 8(\mathbf{k}_1 \cdot \delta)(\mathbf{k}_3 \cdot \delta)\}. \quad (4.30)$$

Отсюда видно, что вероятность перехода, содержащая $|\langle \mathcal{H}_1 \rangle|^2$, пропорциональна $(ka)^4$, где a — постоянная решетки. Таким образом, обменный гамильтониан, диагонализированный в спин-волновых переменных, может служить исключительно хорошим приближением для описания длинных спиновых волн ($ka \ll 1$), которые являются доминирующим типом возбуждений при низких температурах.

Обсуждение эффектов магнон-магнонного обменного взаимодействия на основе перенормированных выражений для энергий магновов дается ниже (после формулы (4.131)).

Магنونная теплоемкость. Положим $N=0$, пренебрежем взаимодействием между магнонами и предположим, что $ka \ll 1$. Тогда дисперсионный закон (4.26) примет вид

$$\omega_{\mathbf{k}} = Dk^2, \quad D \equiv 2SJa^2. \quad (4.31)$$

Внутренняя энергия единицы объема магнонного газа в состоянии теплового равновесия при температуре T определяется выражением

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle_T = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\omega_{\mathbf{k}}/T} - 1} = \frac{1}{2\pi^3} \int dk^3 Dk^2 \frac{1}{e^{Dk^2/T} - 1}, \quad (4.32)$$

где $\tau \equiv k_B T$. Или, обозначив $Dk^2/\tau = x$, получим

$$U = \frac{\tau^{3/2}}{4\pi^2 D^{3/2}} \int_0^{\infty} dx x^{3/2} \frac{1}{e^x - 1}; \quad (4.33)$$

здесь верхний предел можно взять равным бесконечности, если нас интересует только область, где $\tau \ll \omega_{\text{макс}}$. Тогда интеграл в (4.33) будет равен $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}; 1\right)$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а $\zeta(S, a)$ — дзета-функция Римана (см. [4]). Численные значения этих функций для данных аргументов, а именно $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3\pi^{1/2}/4$ и $\zeta\left(\frac{5}{2}; 1\right) = 1,341$, можно найти в математических таблицах, например в справочнике Янке и Эмде. Итак, получим

$$U = \frac{3\tau^{5/2}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{2(4\pi D)^{3/2}} \approx \frac{0,45\tau^{5/2}}{\pi^2 D^{3/2}}. \quad (4.34)$$

Тогда теплоемкость единицы объема равна

$$C = \frac{dU}{dT} = 0,113k_B \left(\frac{k_B T}{D}\right)^{3/2}. \quad (4.35)$$

Если теплоемкость состоит только из двух частей — маглонной, пропорциональной $T^{3/2}$, и фононной, пропорциональной T^3 , то

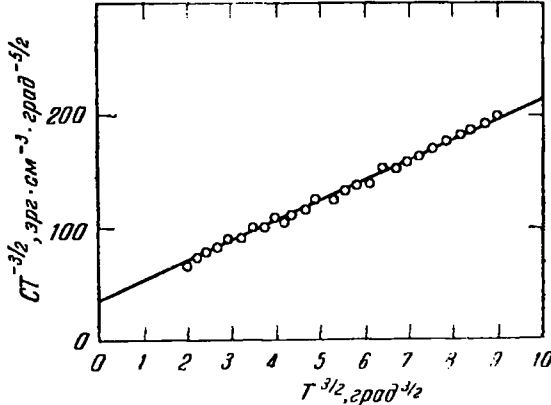


Рис. 4.2. Теплоемкость феррита-граната иттрия.

График построен так, что позволяет разделить маглонный и фононный вклады в теплоемкость. Прямая отсекает на оси ординат отрезок, соответствующий маглонному вкладу.

график зависимости $CT^{-3/2}$ от $T^{3/2}$ будет иметь вид прямой линии (рис. 4.2). Пересечение этой прямой с осью ординат при $T=0$ даст чисто маглонную часть теплоемкости, а наклон прямой — чисто фононную ее часть. Например, измерения Шинозаки,

проведенные на двух образцах иттриевого феррита-граната, дали следующие результаты: $D=0,81 \cdot 10^{-28}$ эрг·см² и $D=0,85 \cdot 10^{-28}$ эрг·см², что соответствует $m^* \approx 6m$.

Изменение намагниченности. Число перевернутых спинов определяется средним значением спин-волновых чисел заполнения. Поэтому, сохраняя те же предположения, что и для теплоемкости, получим для намагниченности насыщения (на единицу объема)

$$M_s = 2\mu_0 S_z = 2\mu_0 (NS - \sum b_k^+ b_k) \quad (4.36)$$

и

$$M_s(0) - M_s(T) \equiv \Delta M = 2\mu_0 \sum_k \langle n_k \rangle = \frac{2\mu_0}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{Dk^2/\tau} - 1}. \quad (4.37)$$

При низких температурах, при которых выполняется условие $Dk_{\text{макс}}^2 \gg \tau$, для ΔM получим

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \left(\frac{\tau}{D}\right)^{3/2} \int_0^\infty dx x^{1/2} \frac{1}{e^x - 1}, \quad (4.38)$$

где интеграл равен $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Следовательно,

$$\Delta M = 0,117\mu_0 \left(\frac{k_B T}{D}\right)^{3/2} = 0,117 \left(\frac{\mu_0}{a^3}\right) \left(\frac{k_B T}{2SJ}\right)^{3/2}. \quad (4.39)$$

Напомним, что $\mu_0 = (g/2)\mu_B$, где μ_B — магнетон Бора. Заметим еще, что $2S\mu_0/a^3 = \eta M_s(0)$, где $\eta = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ для простой, объемноцентрированной и гранецентрированной кубических решеток соответственно.

В другой работе Дайсона [5] рассмотрены члены разложения ΔM по $k_B T/J$ более высокого порядка, а именно члены с показателями $5/2$ и $7/2$, которые получаются при использовании полного выражения для γ_k с учетом в разложении $1 - \gamma_k$ членов более высокой степени, чем $k_{i,j}^2$. Однако, если мы хотим включить члены с $T^{5/2}$ и $T^{7/2}$, то при нахождении численного значения интеграла по d^3k следует брать фактическую область изменений значений k , а не заменять верхний предел бесконечностью. Первый дополнительный член в ΔM обусловлен неидеальностью магнетонного газа, т. е. магнетон-магнетонным обменным взаимодействием, и равен по порядку величины $(k_B T/J)^4$.

Кеффер и Лаудон [3] дали простое объяснение причинам возникновения члена с T^4 . Исходя из динамических соображе-

ний, они считают, что в (4.39) должно стоять \bar{S} вместо S ; величина \bar{S} — это среднее по ансамблю от проекции спина на направление соседнего, т. е.

$$\bar{S} = \frac{\langle S_j S_{j+\delta} \rangle}{S}.$$

Тогда, согласно (4.34), $S - \bar{S} \sim T^{3/2}$. Если теперь в главном члене закона изменения намагниченности (4.36) заменить S на \bar{S} , т. е. взять $\left(\frac{k_B T}{2\bar{S}J}\right)^{3/2}$ и разложить эту величину в ряд, то уже следующий член будет порядка $\left(\frac{k_B T}{2\bar{S}J}\right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{2\bar{S}J}\right)^{5/2} \sim T^4$. Отсюда видно, что магнон-магнонное взаимодействие слабо влияет на температурную зависимость намагниченности насыщения, за исключением области температур вблизи точки Кюри (область высоких температур рассмотрена в работе Блоха [6]).

Мы не будем обсуждать здесь эффектов, которые в ферромагнитных металлах могут обуславливаться тепловым перераспределением электронных состояний в зонах. Херринг и Киттель [7] показали, что для таких металлов теория согласуется с опытом: низкотемпературная теплоемкость, пропорциональная T , обусловлена в основном возбуждением одноэлектронных состояний, а изменение намагниченности, описываемое законом $T^{3/2}$, обусловлено в основном возбуждением магнонов.

Читателям, специально интересующимся различными аспектами теории ферромагнитных магнонов, можно порекомендовать обзоры [8—11], в которых приведена обширная библиография работ по этому вопросу.

Имеются многочисленные экспериментальные исследования, в которых было осуществлено возбуждение магнонов различных типов и их идентификация; к числу таких экспериментов относится спин-волновой резонанс в тонких пленках, параллельная накачка, возбуждение за счет магнон-фононной связи, неупругое рассеяние нейтронов, распространение магнонных импульсов в дисках.

Антиферромагнитные магноны¹⁾

Рассмотрим гамильтониан

$$H = J \sum_{j\delta} S_j S_{j+\delta} - 2\mu_0 H_A \sum_j S_{jz}^2 + 2\mu_0 H_A \sum_j S_{jz}^4, \quad (4.40)$$

где J — обменный интеграл для ближайших соседей; в принятой записи (обменный член взят с плюсом) знак самой вели-

¹⁾ См. работы [12—16].

чины J для антиферромагнетиков считается положительным. В настоящем разделе мы всюду будем пренебрегать эффектами, обусловленными взаимодействием ионов с соседями, следующими за ближайшими, хотя в реальных антиферромагнетиках эти эффекты могут быть существенными. Спиновую структуру кристалла мы можем представлять себе в виде двух подрешеток a и b , вставленных друг в друга так, что у каждого атома подрешетки a все ближайшие соседи являются атомами подрешетки b и наоборот. Столь простая модель, разумеется, не может описывать все структуры. Величина H_A положительна и соответствует фиктивному магнитному полю, которое аппроксимирует магнитную кристаллографическую анизотропию. В этом поле спины, имеющие положительный магнитный момент μ_0 в подрешетке a , располагаются в положительном направлении оси z , а спины подрешетки b — в противоположном направлении ($-z$). Мы вводим величину H_A главным образом для того, чтобы ориентация спинов параллельно преимущественной оси, а именно оси z , соответствовала устойчивому состоянию спиновой системы. Ниже, однако, будет показано, что такая конфигурация спинов, соответствующая намагниченности насыщения в каждой подрешетке, не является истинным основным состоянием.

Прделаем преобразование Холстейна — Примакова

$$S_{aj}^+ = (2S)^{1/2} \left(1 - \frac{a_j^+ a_j}{2S}\right)^{1/2} a_j; \quad S_{aj}^- = (2S)^{1/2} a_j^+ \left(1 - \frac{a_j^+ a_j}{2S}\right)^{1/2}, \quad (4.41)$$

$$S_{bl}^+ = (2S)^{1/2} b_l^+ \left(1 - \frac{b_l^+ b_l}{2S}\right)^{1/2}, \quad S_{bl}^- = (2S)^{1/2} \left(1 - \frac{b_l^+ b_l}{2S}\right)^{1/2} b_l. \quad (4.42)$$

Здесь b_l^+ и b_l — операторы рождения и уничтожения, относящиеся к атому с номером l в подрешетке b ; они не являются магнетными переменными. Далее имеем

$$S_{jz}^a = S - a_j^+ a_j, \quad -S_{jz}^b = S - b_l^+ b_l, \quad (4.43)$$

где для S_{jz}^b взят знак минус согласно допускаемой (4.7) второй возможности для выбора знака. Причины этого очевидны, так как оператор b^+ ассоциируется с S_b^+ , а оператор a^+ с S_a^+ .

Теперь введем следующие спин-волновые переменные:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ik \cdot x_j} a_j, \quad c_k^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-ik \cdot x_j} a_j^+, \quad (4.44)$$

$$d_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{-ik \cdot x_l} b_l, \quad d_k^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{ik \cdot x_l} b_l^+. \quad (4.45)$$

Суммы для операторов c берутся по всем N атомам j подрешетки a , а суммы для операторов d — по всем N атомам l подрешетки b . Запишем разложения для (4.41) и (4.42), оставляя лишь основные члены:

$$\left. \begin{aligned} S_{aj}^+ &= (2S/N)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j] c_{\mathbf{k}} + \dots \right), \\ S_{aj}^- &= (2S/N)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \exp[+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j] c_{\mathbf{k}}^+ + \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{bl}^+ &= (2S/N)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_l] d_{\mathbf{k}}^+ + \dots \right), \\ S_{bl}^- &= (2S/N)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \exp[+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_l] d_{\mathbf{k}} + \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{jz}^a &= S - N^{-1} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j] c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}'}, \\ S_{lz}^b &= -S + N^{-1} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_l] d_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}'}. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Если число ближайших соседей равно z , то для гамильтониана в магнетонных переменных получим

$$H = -2NzJS^2 - 4N\mu_0 H_A S + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (4.49)$$

где \mathcal{H}_0 — билинейная форма по магнетонным переменным, т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = 2JzS \sum_{\mathbf{k}} [\gamma_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}}^+ + c_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}) + (c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}})] + \\ + 2\mu_0 H_A \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^+ d_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Здесь

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{z} \sum_{\delta} e^{i\mathbf{k} \cdot \delta} = \gamma_{-\mathbf{k}}, \quad (4.51)$$

поскольку предполагается, что система имеет центр симметрии. Величиной \mathcal{H}_1 , содержащей члены более высокого порядка, мы пренебрегаем.

Теперь будем искать преобразование, которое позволит диагонализировать \mathcal{H}_0 . Перейдем к новым операторам рождения и уничтожения α^+ , α , β^+ , β , удовлетворяющим перестановочным соотношениям $[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^+] = 1$, $[\beta_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}^+] = 1$, $[\alpha_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}] = 0$ и т. д. Эта задача идентична задаче Боголюбова, рассмотренной в гл. 2, если в (2.91) произвести замену

$$\alpha_{\mathbf{k}} \rightarrow c_{\mathbf{k}}, \quad \alpha_{\mathbf{k}}^+ \rightarrow c_{\mathbf{k}}^+, \quad \alpha_{-\mathbf{k}} \rightarrow d_{\mathbf{k}}, \quad \alpha_{-\mathbf{k}}^+ \rightarrow d_{\mathbf{k}}^+, \quad (4.52)$$

$$\omega_0 \rightarrow 2JzS + 2\mu_0 H_A, \quad \omega_1 \rightarrow 2JzS\gamma_{\mathbf{k}}. \quad (4.53)$$

Тогда искомое преобразование определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^+, & \alpha_{\mathbf{k}}^+ &= u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}, \\ \beta_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+, & \beta_{\mathbf{k}}^+ &= u_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Здесь $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ — вещественные величины, удовлетворяющие условию $u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1$.

По аналогии с (2.98) для собственных частот магновов $\omega_{\mathbf{k}}$ имеем

$$\boxed{\omega_{\mathbf{k}}^2 = (\omega_e + \omega_A)^2 - \omega_e^2 v_{\mathbf{k}}^2} \quad (4.55)$$

где

$$\omega_e \equiv 2JzS, \quad \omega_A = 2\mu_0 H_A. \quad (4.56)$$

Формула (4.55) представляет собой дисперсионный закон для антиферромагнитных магновов. Если считать $\omega_{\mathbf{k}}$ положительными величинами, то билинейная часть гамильтониана примет вид

$$\mathcal{H}_0 = -N(\omega_e + \omega_A) + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^+ \beta_{\mathbf{k}} + 1), \quad (4.57)$$

где при преобразовании (4.50) использованы соотношения, обратные (4.54). Каждому значению \mathbf{k} соответствуют два вырожденных собственных колебания: одно — связанное с операторами α , другое — с операторами β . Окончательно полный гамильтониан (4.49) примет вид

$$H = -2NzJS(S+1) - 4\mu_0 H_A \left(S + \frac{1}{2}\right) + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{H}_1, \quad (4.58)$$

где в суммах каждое значение \mathbf{k} берется дважды из-за двукратного вырождения; $n_{\mathbf{k}}$ — положительные целые числа.

Если пренебречь ω_A и считать $ka \ll 1$, то для простой кубической решетки $(1 - v_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} ka$, и мы получим

$$\boxed{\omega_{\mathbf{k}} \approx 4\sqrt{3}JSka.} \quad (4.59)$$

Это — дисперсионный закон для антиферромагнетиков в предельном случае длинных волн и в предположении, что $\omega_{\mathbf{k}}/\omega_e \gg 1$.

При антиферромагнитном резонансе для однородного колебания $\gamma_0=1$ и мы получим

$$\omega_0 = [(2\omega_e + \omega_A)\omega_A]^{1/2}, \quad (4.60)$$

т. е. обычный результат.

В однородном внешнем магнитном поле H , наложенном параллельно оси намагниченности, для резонансных частот, как легко показать, получим

$$\omega_k = \omega_k \pm \omega_H, \quad \omega_H = \frac{ge}{2mc} H, \quad (4.61)$$

где ω_H — соответствующая данному значению H ларморовская частота.

Энергия нулевых колебаний. В спин-волновом приближении, пренебрегая H_A и \mathcal{H}_1 , получим для обменной энергии антиферромагнитной системы при абсолютном нуле

$$E_0 = -2NzJS(S+1) + \sum_k \omega_k, \quad (4.62)$$

причем в данном случае каждое значение k берется в сумме один раз. Напомним, что полное число спинов в системе равно $2N$ (две подрешетки). Обычно выражение для E_0 записывают, вводя константу β , в виде

$$E_0 = -2NzJS(S + \beta/z). \quad (4.63)$$

Константа β , с учетом (4.55), определяется соотношением

$$\frac{\beta}{z} = \frac{1}{N} \sum_k [1 - (1 - \gamma_k^2)^{1/2}]. \quad (4.64)$$

Для простой кубической решетки $\beta=0,58$.

Намагниченность подрешетки при абсолютном нуле. Характерной чертой теории антиферромагнетиков является отличие магнитного момента подрешетки при абсолютном нуле от величины $2NS\mu_0$, соответствующей, согласно элементарным соображениям, состоянию насыщения подрешетки. Имеются экспериментальные данные, основанные на исследовании ядерного магнитного резонанса, указывающие, что уменьшение магнитного момента подрешетки несколько меньше, чем это следует из приводимых ниже расчетов.

Согласно (4.48) и (4.54) величину \mathcal{S}_z^a можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_z^a &= \sum_j S_{jz}^a = NS - \sum_k c_k^+ c_k = \\ &= NS - \sum_k (u_k^2 a_k^+ a_k + v_k^2 \beta_k \beta_k^+ + \text{недиагональные члены}). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Здесь мы опять использовали соотношения, обратные (4.54), а именно

$$c_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^+, \quad d_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^+. \quad (4.66)$$

При абсолютном нуле все $n_{\mathbf{k}}=0$; учитывая каждое значение \mathbf{k} один раз, получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{S}_z = NS - \langle \mathcal{S}_z \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\operatorname{ch} 2\chi_{\mathbf{k}} - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [(1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2)^{-1/2} - 1]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь мы приняли $\omega_A=0$ и воспользовались, с надлежащей модификацией, результатами задачи 2.5. Следовательно, на единицу объема

$$\Delta \mathcal{S}_z = -\frac{1}{2} N + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k (1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2)^{-1/2}, \quad (4.68)$$

где интеграл берется по всем допустимым значениям \mathbf{k} . В случае простой кубической решетки, выполнив интегрирование, получим, согласно Андерсону,

$$\Delta \mathcal{S}_z = 0,078N. \quad (4.69)$$

Температурная зависимость намагниченности подрешетки. Полагая $\omega_A=0$ и беря каждое значение \mathbf{k} один раз, получим из (4.65)

$$\langle \mathcal{S}_z(0) \rangle - \langle \mathcal{S}_z(T) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \operatorname{ch} 2\chi_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle (1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2)^{-1/2}, \quad (4.70)$$

где

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{k_B T}\right) - 1}. \quad (4.71)$$

В соответствующей области температур величину $\omega_{\mathbf{k}}$, введенную соотношением (4.59), можно записать в виде

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx \frac{k_B \Theta_N k}{k_{\max}}, \quad (4.72)$$

если взять надлежащий интервал значений \mathbf{k} . Здесь Θ_N — характерная температура, близкая по порядку величины к температуре Нееля. Для простой кубической решетки $k_{\max} = \pm\pi/a$ вдоль любого ребра куба. Удобно переопределить k_{\max} аналогично тому, как это делается для фононного спектра в теории Дебая:

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_{\max}^3, \quad (4.73)$$

где n — число атомов одной подрешетки, приходящееся на единицу объема.

Для зависящей от температуры части спиновой плотности подрешетки (см. (4.70)) получим выражение

$$\frac{3^{1/2}}{\pi^2 a} \int_0^{k_{\text{макс}}} dk \cdot k \left\{ \exp\left(\frac{k}{k_{\text{макс}}} \frac{\Theta_N}{T}\right) - 1 \right\}^{-1} \approx$$

$$\approx \frac{3^{1/2} \Omega}{\pi^2 a k_{\text{макс}}^2} \left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}, \quad (4.74)$$

справедливое для интервала температур $T \ll \Theta_N$. Намагниченность подрешетки уменьшается с температурой по закону $(T/\Theta_N)^2$. Значения числовых констант для решеток типа NaCl и CsCl приведены в работе Кубо [15].

Теплоемкость. Теплоемкость антиферромагнетика, для которого справедлив дисперсионный закон

$$\omega_{\mathbf{k}} = [(\omega_e + \omega_A)^2 - \omega_e^2 \gamma_{\mathbf{k}}^2]^{1/2},$$

при низких температурах зависит от температуры в основном по экспоненциальному закону с показателем $-1/T$ до тех пор, пока $k_B T > \omega_0$, где $\omega_0 = [(2\omega_e + \omega_A)\omega_A]^{1/2}$. При более высоких (но не чересчур высоких) температурах дисперсионный закон примет вид (4.72). Каждому значению \mathbf{k} отвечают два антиферромагнитных магнона (вместо трех фононов). Если умножить обычный дебаевский результат для фононной теплоемкости на $2/3$, то мы получим вклад магнонов в теплоемкость (на единицу объема), равный

$$C_{\text{маг}} = \frac{4\pi^4}{5} (2nk_B)^3 \left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^3. \quad (4.75)$$

Этот результат относится к области температур $T \ll \Theta_N$, но при этом для $T \gg \omega_0/k_B$. Не следует забывать, что величина Θ_N , определенная соотношением (4.72), не совпадает с температурой Нееля.

Другие вопросы, связанные с ферромагнитными магнонами

Макроскопическая теория магнонов. Во многих случаях при изучении явлений ферромагнитного резонанса и релаксации удобнее и физически более оправдано работать с намагниченностью как с векторным полем $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, отвлекаясь от ее связи со спинами \mathbf{S}_j . Границы применимости макроскопической теории поля определяются той областью \mathbf{k} -пространства, которая

далека от краев бриллюэновской зоны. Мы можем использовать макроскопическую теорию, когда $ka \ll 1$, где a — параметр решетки. Преимущество макроскопической теории состоит в том, что она не связана явно с модельными представлениями, когда каждый электрон следует считать «привязанным» к какому-то атому. В макроскопической теории анизотропию, магнетоупругую и магнетостатическую энергии легко описывать при помощи феноменологических констант.

Рассмотрим векторный оператор спиновой плотности $\mathbf{s}(\mathbf{x})$, определяемый соотношением

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_j \boldsymbol{\sigma}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (4.76)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_j$ — матрица Паули для j -го электрона, находящегося в точке \mathbf{x}_j . Оператор $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ описывает плотность спинового момента в точке \mathbf{x} , поскольку

$$\int_{\Omega} d^3x \mathbf{s}(\mathbf{x})$$

есть полный спин в объеме Ω . Используя соотношения $[\sigma_{jx}, \sigma_{ly}] = 2i\sigma_{jz}\delta_{jl}$, рассмотрим коммутатор

$$\begin{aligned} [s_x(\mathbf{x}), s_y(\mathbf{x}')] &= \frac{i}{2} \sum_{jl} \sigma_{jz} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_l) = \\ &= \frac{i}{2} \sum_j \sigma_{jz} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j) = i s_z(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Здесь мы применили тождество

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j) \equiv \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ введем при помощи следующего соотношения:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = g\mu_B \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mu_0 \mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad \mu_0 = \frac{g\mu_B}{2}. \quad (4.78)$$

Тогда

$$[M_x(\mathbf{x}), M_y(\mathbf{x}')] = i2\mu_0 M_z(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.79)$$

откуда, вводя $M^{\pm}(\mathbf{x}) = M_x(\mathbf{x}) \pm iM_y(\mathbf{x})$, получим

$$[M^+(\mathbf{x}), M^-(\mathbf{x}')] = 4\mu_0 M_z(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.80)$$

Теперь выразим $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ через полевые переменные $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}^+(\mathbf{x})$ типа переменных Холстейна и Примакова, предполагая, что

они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a(x), a^+(x')] = \delta(x - x'). \quad (4.81)$$

Если, далее, ввести $M = |\mathbf{M}(x)|$, то для $M^+(x)$, $M^-(x)$, $M_z(x)$ получим

$$M^+(x) = (4\mu_0 M)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{\mu_0}{M} a^+(x) a(x) \right\}^{1/2} a(x), \quad (4.82)$$

$$M^-(x) = (4\mu_0 M)^{1/2} a^+(x) \left\{ 1 - \frac{\mu_0}{M} a^+(x) a(x) \right\}^{1/2} \quad (4.83)$$

$$M_z(x) = M - 2\mu_0 a^+(x) a(x). \quad (4.84)$$

Читатель может сам легко убедиться в том, что для компонент $\mathbf{M}(x)$ удовлетворяются перестановочные соотношения (4.79) или (4.80). В макроскопической теории мы можем считать величину $M = M_s$ константой.

Переход от $a^+(x)$, $a(x)$ к магنونным полевым переменным b_k^+ , b_k (отнесенным к единице объема) осуществляется по формулам

$$a(x) = \sum_k e^{-ik \cdot x} b_k, \quad a^+(x) = \sum_k e^{ik \cdot x} b_k^+, \quad (4.85)$$

или

$$b_k = \int d^3x a(x) e^{ik \cdot x}, \quad b_k^+ = \int d^3x a^+(x) e^{-ik \cdot x}. \quad (4.86)$$

Перестановочные соотношения для b_k , b_k^+ имеют обычный вид, т. е.

$$\begin{aligned} [b_k, b_{k'}^+] &= \int d^3x d^3x' [a(x), a^+(x')] \exp[i(k \cdot x - k' \cdot x')] = \\ &= \int d^3x \exp[i(k - k') \cdot x] = \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Для компонент намагниченности (4.82) — (4.84), выраженных через b_k^+ , b_k , имеем

$$\begin{aligned} M^+(x) &= (4\mu_0 M)^{1/2} \left[\sum_k \exp[-ik \cdot x] b_k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_0}{2M} \sum_{kk'k''} \exp[i(k - k' - k'') \cdot x] b_k^+ b_{k'} b_{k''} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} M^-(x) &= (4\mu_0 M)^{1/2} \left[\sum_k e^{ik \cdot x} b_k^+ - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_0}{2M} \sum_{kk'k''} \exp[i(-k + k' + k'') \cdot x] b_k b_{k'}^+ b_{k''}^+ + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$M_z(x) = M - 2\mu_0 \sum_{kk'} \exp[i(k - k') \cdot x] b_k^+ b_{k'}. \quad (4.90)$$

Ниже было показано, что в случае кубического кристалла макроскопическая форма для плотности обменной энергии в качестве основного члена содержит

$$\mathcal{H}_{\text{обм}} = C \frac{\partial M_x}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x_\mu}, \quad (4.91)$$

где C — константа; такая запись подразумевает суммирование по повторяющимся греческим индексам, принимающим значения x, y, z . Для билинейных членов имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^+}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial M^-}{\partial x_\mu} &= 4\mu_0 M \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \exp [i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^+; \\ \frac{\partial M_z}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial x_\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Следовательно, плотность обменной энергии (4.91) в первом порядке равна

$$\mathcal{H}_{\text{обм}}^{(1)} = 2C\mu_0 M \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp [i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] (b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^+ + b_{\mathbf{k}'}^+ b_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'). \quad (4.93)$$

Следующие члены более высокого порядка

$$\mathcal{H}_{\text{обм}}^{(2)} = 2C\mu^2 \sum (\hat{k}^2 + \hat{k}'^2 - 4\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \Delta(-\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^+ b_{\mathbf{k}'}. \quad (4.94)$$

имеют тот же вид, что и в выражении (4.29), полученном для локализованных спинов, т. е. для гейзенберговской модели.

Если поле \mathbf{H} направлено вдоль оси z , то для плотности зеemanовской энергии получим

$$\mathcal{H}_z = -H_0 M_z = 2\mu_0 H_0 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp [i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}, \quad (4.95)$$

где постоянный член, равный $-H_0 M$, опущен.

Плотность энергии анизотропии для направлений, близких к оси легкого намагничивания (пусть эта ось совпадает с осью z), описывается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K &= \left(\frac{K}{M_s^2} \right) (M_x^2 + M_y^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{M_s^2} \right) (M^+ M^- + M^- M^+) = \\ &= 2\mu_0 \frac{K}{M_s} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \exp [i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] (b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^+). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Имеется ряд важных эффектов, вызываемых размагничивающим полем спиновых волн. В первом порядке теории возмущений при разложении по магنونным амплитудам спиновая волна

с $\mathbf{k} \parallel z$ не создает размагничивающего поля, но волна с \mathbf{k} другого направления создает поле \mathbf{H}_d . Будем искать решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (4.97)$$

Если \mathbf{M} и \mathbf{H}_d взять в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \Delta \mathbf{M}_0 \exp[-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_d^0 \exp[-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad (4.98)$$

то уравнение (4.97) удовлетворяется при условии

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_d^0 = -4\pi \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{M}_0, \quad (4.99)$$

которое эквивалентно условию

$$\mathbf{H}_d = -\frac{4\pi(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{M})}{k^2} \mathbf{k}. \quad (4.100)$$

Для системы магновнов

$$\mathbf{H}_d = -2\pi(4\mu_0 M)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} (k^- e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}} + k^+ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}}^+) k^{-2} \mathbf{k}, \quad (4.101)$$

где $k^\pm = k_x \pm ik_y$. Плотность энергии размагничивания с множителем $1/2$ соответствует собственной энергии

$$\mathcal{H}_d = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M}; \quad (4.102)$$

удобно записать \mathcal{H}_d в частном случае, когда $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathcal{H}_{dx} = 2\pi\mu_0 M \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}}^+) (e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}'} + e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} b_{\mathbf{k}'}^+). \quad (4.103)$$

Принтегрируем полученные выражения для плотности энергии по единичному объему и опустим вклад нулевых колебаний. Выпишем члены, билинейные по операторам b

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \int d^3x (\mathcal{H}_{обм}^{(1)} + \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_{dx}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \{A_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+ + B_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}\}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

где при $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{x}}$

$$\left. \begin{aligned} A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}} &= 2\mu_0 M_s [2Ck^2 + (H/M_s) + (2K/M_s^2) + 2\pi], \\ B_{\mathbf{k}} = B_{-\mathbf{k}} &= 2\pi\mu_0 M_s. \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

Диагонализация формы (4.104) снова выполняется точно так же, как и в задаче Боголюбова (2.91). После небольшой модификации указанной процедуры можно выписать уравнение

движения в виде

$$\left. \begin{aligned} i\dot{b}_{\mathbf{k}} &= [b_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}_0] = A_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}} + 2B_{\mathbf{k}}b_{-\mathbf{k}}^+, \\ i\dot{b}_{-\mathbf{k}}^+ &= [b_{-\mathbf{k}}^+, \mathcal{H}_0] = -A_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}^+ - 2B_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

Ищем решение этих уравнений, предполагая, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$. Собственные частоты мы получим как корни секулярного уравнения

$$\begin{vmatrix} \omega_{\mathbf{k}} - A_{\mathbf{k}} & -2B_{\mathbf{k}} \\ 2B_{\mathbf{k}} & \omega_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\omega_{\mathbf{k}} = (A_{\mathbf{k}}^2 - 4B_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}. \quad (4.107)$$

Теперь рассмотрим несколько частных случаев. Если \mathbf{k} мало, а анизотропия отсутствует ($K=0$), то

$$\omega_0 = g\mu_B [H_0(H_0 + 4\pi M)]^{1/2}, \quad (4.108)$$

что полностью согласуется с классическим результатом.

Если члены с k^2 и H_0 преобладают, то

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx g\mu_B (H_0 + 2CM_s k^2), \quad (4.109)$$

что совпадает с полученным выше результатом микроскопической теории (4.26).

Заметим, что, согласно (4.26) и (4.31), $2JSa^2 = 2g\mu_B M_s C = 4\mu_0 M_s C = D$. В общем случае, когда вектор \mathbf{k} расположен под углом $\theta_{\mathbf{k}}$ к оси z , секулярное уравнение надо брать в форме (4.107) и для $A_{\mathbf{k}}$ и $B_{\mathbf{k}}$ получим

$$\left. \begin{aligned} A_{\mathbf{k}} &= 2\mu_0 M_s \{ 2Ck^2 + (H_0/M_s) + (2K/M_s^2) + 2\pi \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} \}, \\ B_{\mathbf{k}} &= 2\pi\mu_0 M_s \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Здесь, как и выше, H_0 — внешнее статическое магнитное поле H_a с учетом статического размагничивающего поля образца. Если образец имеет форму сферы, то в качестве H_0 следует взять $(H_a - \frac{4\pi}{3}M_s)$. Если же $\theta_{\mathbf{k}}=0$, то

$$\omega_{\mathbf{k}} = g\mu_B [2CM_s k^2 + H_0 + (2K/M_s)]. \quad (4.111)$$

Обсуждение выражения (4.91) для обменной энергии. Нам необходимо знать явный вид выражения для обменной энергии при неоднородном макроскопическом распределении направлений

локальной намагниченности. Из общих соображений ясно, что для этого необходима детальная количественная теория обменного взаимодействия в твердом теле, точно так же, как для построения общей теории упругих деформаций необходимо детальное решение проблемы энергии сцепления. Известно, однако, что многие задачи теории упругих свойств можно трактовать, пользуясь макроскопическими упругими константами, если характеристическая длина волны, связанная с деформацией, достаточно велика по сравнению с межатомными расстояниями и если относительные деформации малы. Подобно этому, и магнитные деформации можно трактовать при помощи макроскопических обменных констант, если выполняются те же ограничивающие условия, что и при использовании упругих констант. Тот факт, что в некоторых ферромагнитных металлах носители магнитного момента могут обладать подвижностью, ограничивает возможности макроскопической трактовки не в большей степени, чем высокая подвижность электронов проводимости в щелочных или благородных металлах ограничивает применимость к ним макроскопической теории упругости.

Выражение для макроскопической изотропной плотности обменной энергии должно быть инвариантным по отношению к поворотам спинов. Неинвариантные вклады в эту энергию дает лишь магнитная кристаллографическая анизотропия. Искомое выражение должно быть инвариантным при изменении знаков компонент деформации, обусловленной намагничиванием; в противном случае состояние однородной намагниченности не может быть основным состоянием системы. Мы ищем выражение наименьшего порядка, составленное из производных \mathbf{M} , совместимое с симметрией кристалла. В случае изотропной среды имеются три величины, квадратичные по производным \mathbf{M} и инвариантные при поворотах системы координат, а именно $(\operatorname{div} \mathbf{M})^2$, $(\operatorname{rot} \mathbf{M})^2$ и $|\operatorname{grad} \mathbf{M}|^2$. Если линии равной намагниченности представляют собой концентрические окружности, то $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ и тогда величину $(\operatorname{div} \mathbf{M})^2$ следует исключить. Если линии \mathbf{M} направлены по радиусам, то $\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0$ и надо исключить величину $(\operatorname{rot} \mathbf{M})^2$. Тогда остается выражение

$$|\operatorname{grad} \mathbf{M}|^2 = (\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2, \quad (4.112)$$

удовлетворяющее всем требованиям. Итак, в изотропной среде

$$\mathcal{H}_{\text{обм}} = C \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\mu}, \quad (4.113)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Форма (4.113) инвариантна по отношению к операциям симметрии кубической точечной группы. В общем случае

кристалла произвольной симметрии имеем

$$\mathcal{H}_{\text{обм}} = C_{\mu\nu} \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\nu}, \quad (4.114)$$

где $C_{\mu\nu}$ — тензор, имеющий структуру, соответствующую симметрии кристалла. Если $M_\alpha M_\alpha$ — инвариант, то и эта форма, очевидно, инвариантна по отношению к поворотам полного спина системы.

В случае антиферромагнетиков мы должны принять во внимание наличие отдельных подрешеток и обменное взаимодействие внутри подрешеток и между ними. Каганов и Цукерник [17] обобщили выражение (4.114) на случай антиферромагнетиков и получили

$$\mathcal{H}_{\text{обм}} = C_{iklm}^{ss'} \frac{\partial M_{st}}{\partial x_k} \frac{\partial M_{s't}}{\partial x_m}, \quad (4.115)$$

где s, s' — индексы подрешеток. Можно сравнить макроскопическую плотность обменной энергии (4.114) с плотностью упругой энергии

$$\mathcal{H}_{\text{упр}} = c_{\alpha\mu\beta\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\nu}. \quad (4.116)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор смещения частицы, а $c_{\alpha\mu\beta\nu}$ — компоненты тензора упругих постоянных.

Возбуждение ферромагнитных магновов методом параллельной накачки. Пусть небольшой сферический образец из ферромагнитного диэлектрика помещен в магнитное поле $H = H_0 + h \sin 2\omega t$, причем и статическое H_0 , и переменное $h \sin 2\omega t$ поля параллельны оси z . Вычислим энергию, которую может поглотить образец из переменного поля $h \sin 2\omega t$ благодаря наличию каких-то собственных магнонных колебаний, и покажем, что суммарная поглощаемая мощность в некотором приближении неограниченно возрастает, когда h приближается к критическому значению h_c . Подчеркнем, что между частотой ω (или 2ω) и величиной поля H_0 никакой резонансной связи нет.

Рассмотрим какую-то стоячую волну с волновым вектором \mathbf{k} , направленным вдоль оси x :

$$M_x = m_1 \sin kx \sin \omega t, \quad M_y = m_2 \sin kx \cos \omega t. \quad (4.117)$$

Процесс состоит в поглощении одного фотона частоты 2ω и последующего испускания двух магновов с волновыми векторами \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ и с частотой ω . Эти два магнона с одинаковыми по абсолютной величине, но противоположно направленными волновыми векторами и образуют стоячую волну.

Теперь вычислим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = -4\pi m_1 k \cos kx \sin \omega t, \quad (4.118)$$

$$H_x = -4\pi m_1 \sin kx \sin \omega t, \quad H_y = 0. \quad (4.119)$$

Запишем z-компоненту уравнения движения $\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ в виде

$$\begin{aligned} \dot{M}_z = \gamma (M_x H_y - M_y H_x) &= 4\pi \gamma m_1 m_2 \sin^2 kx \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= 2\pi \gamma m_1 m_2 \sin^2 kx \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Средняя мощность (энергия в единицу времени), поглощаемая образцом объемом Ω , равна

$$\mathcal{P} = H \cdot \dot{M} \Omega = 2\pi \gamma h m_1 m_2 \Omega \sin^2 kx \sin^2 2\omega t. \quad (4.121)$$

Усреднение по времени величины $\sin^2 2\omega t$ дает $1/2$; усреднение по объему величины $\sin^2 kx$ тоже дает $1/2$. Окончательно получим

$$\mathcal{P} = \frac{\pi}{2} \gamma h m_1 m_2 \Omega. \quad (4.122)$$

Удобно выразить $m_1 m_2$ через квантовые числа $n_{\mathbf{k}}$ возбуждаемых колебаний. Пренебрегая нулевыми колебаниями, имеем

$$n_{\mathbf{k}} g \mu_B = \langle (M_s - M_z) \Omega \rangle_{\mathbf{k}}, \quad (4.123)$$

поскольку в приближении $m_1 \approx m_2$ при возбуждении каждого магнона магнитный момент уменьшается на $g \mu_B$. Угловые скобки в (4.123) означают усреднение по времени и по объему только для возбужденного собственного колебания с \mathbf{k} . Итак, положив $m_1 \approx m_2 \approx m$, напишем

$$\begin{aligned} \langle M_z \Omega \rangle &= \Omega \langle [M_s^2 - M_x^2 - M_y^2]^{1/2} \rangle \approx \\ &\approx M_s \Omega \left(1 - \frac{\langle M_x^2 + M_y^2 \rangle}{2M_s^2} \right) = M_s \Omega \left(1 - \frac{m}{4M_s^2} \right). \end{aligned} \quad (4.124)$$

Отсюда

$$n_{\mathbf{k}} \approx \frac{m^2 \Omega}{4g M_s \mu_B}. \quad (4.125)$$

Тогда вместо (4.122) получим

$$\mathcal{P} = 2\pi \gamma M_s h g \mu_B n_{\mathbf{k}}. \quad (4.126)$$

Сохранение энергии волны с \mathbf{k} выражается условием

$$\frac{dE_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{1}{T_{\mathbf{k}}} (E_{\mathbf{k}} - \bar{E}_{\mathbf{k}}) + \mathcal{P}, \quad (4.127)$$

где \bar{E}_k — тепловое среднее энергии E_k волны с \mathbf{k} , а T_k — время релаксации этой волны. Полагая $E_k = n_k \omega_k$ и используя (4.126), получим

$$\omega_k \frac{dn_k}{dt} = -\frac{\omega_k}{T_k} (n_k - \bar{n}_k) + 2\pi\gamma M_s h g \mu_B n_k. \quad (4.128)$$

В стационарном состоянии $dn_k/dt = 0$, и тогда

$$n_k = \frac{\bar{n}_k}{1 - 2\pi\gamma M_s h g \mu_B T_k / \omega_k}. \quad (4.129)$$

Это выражение имеет особенность при

$$h_c = \frac{\omega_k}{2\pi\gamma M_s g \mu_B T_k}. \quad (4.130)$$

Таким образом, определение h_c эквивалентно измерению T_k . Мы предполагали, что наименьшее пороговое значение h_c достигается тогда, когда спиновая волна образует с осью z угол $\theta_k = \pi/2$.

Температурная зависимость эффективного обмена. Эта проблема сводится к оценке диагональных членов четвертого порядка по операторам b_k в обменном гамильтониане. Она очень близка к рассмотренной в гл. 2 задаче о жидком гелии, с тем лишь отличием, что там невозмущенная система находилась в основном состоянии. Из (4.29) имеем

$$\mathcal{H}_1 = \frac{Jz}{4N} \sum_{1234} b_1^+ b_2^+ b_3 b_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) [2\gamma_1 + 2\gamma_3 - 4\gamma_{1-3}]. \quad (4.131)$$

Недиагональные члены обуславливаются магнон-магнонным рассеянием; диагональные члены обеспечивают перенормировку энергии. Диагональные члены содержат только два \mathbf{k} , которые мы обозначим через \mathbf{k}_a и \mathbf{k}_b .

В (4.131) имеется два типа диагональных членов:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_a, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_b, \quad \sum (4\gamma_a - 4\gamma_0) n_a n_b, \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_a, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_b, \quad \sum (2\gamma_a + 2\gamma_b - 4\gamma_{a-b}) n_a n_b. \end{aligned}$$

Таким образом, диагональная часть (4.131) имеет вид

$$E_1 = \frac{Jz}{N} \sum_{ab} (\gamma_a + \gamma_b - \gamma_0 - \gamma_{a-b}) n_a n_b = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{1\mathbf{k}}, \quad (4.132)$$

где

$$\epsilon_{1\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}} \left[\frac{2Jz}{N} \right] \sum_{\mathbf{b}} (\gamma_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{b}} - \gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{b}}) n_{\mathbf{b}}. \quad (4.133)$$

Здесь собраны все члены, в которых встречается n_k . Следовательно, энергия маглонной волны с k равна

$$\epsilon_k = n_k \left[\omega_k + \frac{2Jz}{N} \sum_b (\gamma_k + \gamma_b - \gamma_0 - \gamma_{k-b}) n_b \right]. \quad (4.134)$$

Здесь ω_k — энергия волны с k , когда все остальные магныны находятся в своем основном состоянии.

С точностью до членов порядка k^4 для решетки, имеющей центр симметрии на каждом спине, и используя определение величин γ

$$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_0 - \gamma_{a-b} \approx -\frac{1}{36} k_a^2 k_b^2 \delta^4, \quad (4.135)$$

получим

$$\epsilon_k = n_k \left[\omega_k - \frac{Jz}{18N} k^2 \delta^4 \sum_b k_b^2 n_b \right]. \quad (4.136)$$

Видно, что энергия уменьшается на величину, пропорциональную k^2 и $\sum k_b^2 n_b$, которая (в низшем порядке по k) равна полной энергии спиновой волны. Действительно,

$$\sum k_b^2 \langle n_b \rangle \approx \frac{U_T}{D}. \quad (4.137)$$

где U_T — тепловая энергия магнона (4.33), а D — константа в выражении $\omega_k = DK^2 = \frac{1}{3} SJz\delta^2 k^2 = 2SJa^2$. Тогда, если обозначить $\epsilon_k = n_k \omega_k^{\text{эфф}}$, то перенормированная энергия дается выражением

$$\omega_k^{\text{эфф}} \approx \left[2SJa^2 - \frac{\delta^2 U_T}{6N} \right] k^2. \quad (4.138)$$

В частном случае простой кубической решетки для всех k получим

$$\omega_k^{\text{эфф}} = \omega_k \left[1 - \frac{1}{12JNS^2} \sum_{k'} n_{k'} \omega_{k'} \right]. \quad (4.139)$$

Используя (4.138), получим для $D(T)$

$$D(T) \approx D_0 \left(1 - \frac{U_T}{6ND_0 \delta^2} \right) k^2 = D_0 \left(1 - \frac{U_T}{2U_0} \right), \quad (4.140)$$

где $U_0 = JNzS^2$.

Для простой, объемноцентрированной и гранецентрированной кубических решеток мы полагали $z\delta^2 = 6a^2$. Результат (4.140)

показывает, что $D(T)$ служит мерой энергии магнона U_T , но не момента насыщения. Полученный результат применим к взаимодействиям между ближайшими соседями внутри одной решетки.

Заметим, что мы не затрагивали вопроса о диагонализации членов вида $a_0^+ a_0^+ a_k a_{-k}$ и $a_k^+ a_k^+ a_0 a_0$, которые рассматривались в аналогичной проблеме для жидкого гелия. В проблеме жидкого гелия мы могли считать $N_0 + 2$ практически равным N_0 , где N_0 — величина порядка полного числа частиц в системе. В рассматриваемой сейчас задаче число магнонов при однородных колебаниях не очень велико: $(N_0 \sim \frac{k_B T}{\omega_k})$ и не очевидно, что можно пренебречь изменением этой величины на две единицы. Более того, величина N_0 крайне мала по сравнению с полным числом спинов в системе, и влиянием на дисперсионный закон величины N_0 самой по себе можно пренебречь. Однако другие члены, такие, как $a_k^+ a_k^+ a_k a_k$, должны рассматриваться на равном основании с уже учтенными, и мы отдаем себе отчет в том, что начинать беспокоиться о правомерности результата (4.134) следует тогда, когда число магнонов уже нельзя будет считать пренебрежимо малым по сравнению с полным числом частиц.

Магнетостатические собственные колебания. Из уравнения движения для \mathbf{M}

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}$$

непосредственно следует, что когда статическое магнитное поле направлено вдоль оси z , то высокочастотная проницаемость ферромагнетика в отсутствие обмена описывается соотношениями

$$B_x = \mu H_x + \xi H_y, \quad B_y = -\xi H_x + \mu H_y, \quad (4.141)$$

где μ и ξ определяются через H_0 , ω и M_s . Если \mathbf{H} взять в виде $\nabla\Phi$, то уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$ для области внутри образца примет вид

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.142)$$

тогда как вне образца будем иметь $\nabla^2 \Phi = 0$. Граничные условия сводятся к тому, что тангенциальная составляющая \mathbf{H} и нормальная составляющая \mathbf{B} должны сохранять непрерывность на поверхности образца.

Решение уравнения (4.142) для различных расположений полей и различных форм образцов рассматривается в работах [18--20].

ЗАДАЧИ

4.1. Доказать, что $[\mathfrak{S}^2, H]=0$ и $[\mathfrak{S}_z, H]=0$, если H имеет вид (4.1).

4.2. Пользуясь (4.3)–(4.5), показать, что

$$[S_x, S_y] = iS_z. \quad (4.143)$$

4.3. Показать, что для полного спина \mathfrak{S} справедливо

$$\mathfrak{S}^2 \approx (NS)^2 + NS - 2NS \sum_{k \neq 0} b_k^+ b_k, \quad (4.144)$$

имея в виду, что

$$\sum_j S_j^- \approx (2SN)^{1/2} b_0^+.$$

Обсудить тот факт, что возбуждение магновов с $k=0$, не изменяет величины \mathfrak{S}^2 .

4.4. Вывести выражение для скорости второго звука в магнном газе, полагая $\omega = Dk^2$, где D — константа.

4.5. Сконструировать спиновую функцию, позволяющую описывать систему спинов в ферромагнетике с одним возбужденным магномом.

4.6. Используя гамильтониан

$$H = -J \sum_{j\delta} S_j S_{j+\delta} - 2\mu_0 H_0 \sum_j S_{jz}, \quad (4.145)$$

найти квантовые уравнения движения для S_j , помня, что $i\dot{S}_j = [S_j, H]$ и что $S_j \times S_j = iS_j$. Написать уравнение в частных разностях для S_j^+ и S_j^- . Интерпретируя спиновые операторы как классические векторы, решить задачу о собственных частотах спиновых волн в предельном случае малых амплитуд ($S^+/S \ll 1$). Показать, что для длинных волн ($ka \ll 1$) классическое уравнение в частных разностях сводится к уравнению в частных производных, которое для простой кубической решетки имеет вид

$$\dot{S} = 2JaS \times \nabla^2 S + 2\mu_0 S \times H \quad (4.146)$$

(см. по этому вопросу приложение XV в книге [21]).

4.7. Показать, что для антиферромагнитных магновов

$$\mathfrak{S}^2 = NS \left\{ \frac{H_A}{H_A + 2H_E} \right\} (n_0^a + n_0^b + 1) + \text{члены порядка } n_k^2. \quad (4.147)$$

4.8. Используя (4.64), показать, что для одномерной решетки (линейной цепочки) $\beta = 0,726$. Заметим, что

$$\gamma_k = \frac{1}{2} (e^{ika} + e^{-ika}) = \cos ka, \quad a - \gamma_k^2 = \sin^2 ka; \quad \text{для } \beta \text{ имеем выражение}$$

$$\beta = \frac{2}{N} \sum_k (1 - |\sin ka|) = \frac{4a}{\pi} \int_0^{\pi/2a} dk (1 - \sin ka). \quad (4.148)$$

4.9. Из рассмотрения $\sum_j S_{jz}^a + \sum_l S_{lz}^b$ показать, что возбуждение антиферромагнитных магновов сопровождается изменением z -компоненты полного спина на ± 1 .

4.10. Возьмем гамильтониан магнон-фононного взаимодействия в виде

$$H = \sum_k \left\{ \omega_k^m a_k^+ a_k + \omega_k^p b_k^+ b_k + c_k (a_k b_k^+ + a_k^+ b_k) \right\}, \quad (4.149)$$

где c_k — коэффициенты связи, а a^+ , a ; b^+ , b — операторы рождения и уничтожения соответственно магнонов и фононов. Показать, что формулы преобразования

$$a_k = A_k \cos \theta_k + B_k \sin \theta_k; \quad b_k = B_k \cos \theta_k - A_k \sin \theta_k, \quad (4.150)$$

где θ — вещественная величина, диагонализуют гамильтониан, если

$$\operatorname{tg} 2\theta_k = \frac{2c_k}{\omega_k^p - \omega_k^m}. \quad (4.151)$$

Показать, что дисперсионные соотношения в этом случае имеют вид

$$\omega_A = \omega_k - c_k, \quad \omega_B = \omega_k + c_k, \quad a^+ = A^+ + B^+, \quad b^+ = B^+ - A^+.$$

Литература

1. Holstein T., Primakoff H., Phys. Rev. 58, 1098 (1940).
2. Дайсон Ф., в сб. «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1958.
3. Keffer F., Loudon R., J. Appl. Phys. suppl. 32, 2 (1961).
4. Уиттекер Е., Ватсон Г., Курс современного анализа, Физматгиз, 1963.
5. Дайсон Ф., в сб. «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, 1958.
6. Bloch M., Phys. Rev. Letts 9, 286 (1962).
7. Херринг К., Киттель Ч., в сб. «Проблемы современной физики», № 5, ИЛ, 1952.
8. Keffer F., в книге «Handbuch der Physik» Bd XVIII/2, 1966, 1—273.
9. Ахнезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И., УФН 71, 533; 72, 3 (1960).
10. Van Kranendonk J., Van Vleck J. H., Rev. Mod. Phys. 30, 1 (1958).
11. Kittel C., в сб. «Low Temperature Physics», ed. by C. DeWitt а. о., N. Y., 1962.
12. Nagamiya T., Yosida K., Kubo R., Adv. Phys. 4, 97 (1955).
13. Займан Дж., в сб. «Антиферромагнетизм», ИЛ, 1957.
14. Андерсон П., в сб. «Антиферромагнетизм», ИЛ, 1957.
15. Kubo R., Phys. Rev. 87, 568 (1952).
16. Накамура Т., в сб. «Антиферромагнетизм», ИЛ, 1957.
17. Каганов М. И., Цукерник В. М., ЖЭТФ 34, 1610 (1958).
18. Walker L. R., Phys. Rev. 105, 390 (1957).
19. Fletcher R., Kittel C., Phys. Rev. 120, 2004 (1960).
20. Damon R., Eshbach J., Phys. Chem. Solids 19, 308 (1961).
21. Киттель Ч., Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963.
22. Brockhouse B. N., Watanabe, IAEA Symposium, Chalk River, 1962.