

Сверхпроводимость

Для сверхпроводящих элементов, у которых изучалась зависимость критической температуры T_c от массы изотопа M , было установлено следующее соотношение:

$$M^{1/2}T_c = \text{const}, \quad (8.1)$$

имеющее место для каждого данного элемента, за исключением некоторых элементов переходных групп, включая Ru и Os. Фрелих предположил, что результат (8.1) связан со свойствами решеточных фононов — фононов, соответствующих нулевым колебаниям, или тепловых фононов, участвующих в сверхпроводимости. Иначе трудно понять, каким другим способом можно учесть атомные массы. Для элементов, которые обнаруживают изотопический эффект, считают, что за сверхпроводимость ответственно притяжение между электронными парами вблизи поверхности Ферми, обусловленное их взаимодействием с фононами, соответствующими нулевым колебаниям. В элементах переходных групп поляризация d -полосы обуславливает дополнительный механизм связи, который не имеет отношения к изотопическому эффекту.

Создание микроскопической теории сверхпроводимости было выдающимся успехом квантовой теории твердого тела (см. [1—3], а также превосходный обзор теоретических и экспериментальных данных [4], полный обзор данных о состоянии исследований до создания теории Бардина — Купера — Шриффера [5] и обзор Тинкхама [6], в котором особое внимание уделено электродинамике сверхпроводников). Эта теория — весьма простая, хотя и не тривиальная, — позволяет объяснить все основные эффекты, связанные со сверхпроводимостью; при этом в большинстве случаев наблюдается блестящее согласие между теорией и опытом. Весьма естественно объясняется и изотопический эффект, а тот факт, что магнитный поток квантуется порциями, кратными половине величины ch/e , составленной из атомных констант, служит убедительным подтверждением центральной роли спаренных электронных состояний, предсказываемых теорией. Настоящая глава целиком посвящена изложению теории сверхпроводимости; мы, однако, не будем затра-

гивать ни феноменологии сверхпроводников, ни технических вопросов, относящихся к сплавам с высоким критическим полем.

Косвенное электрон-электронное взаимодействие через фононы. Пусть в первом приближении электрон-фононное взаимодействие описывается, согласно (7.15), соотношением

$$H' = i \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} D_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^{\dagger}) = \sum_{\mathbf{k}} H'_{\mathbf{k}}, \quad (8.2)$$

где c^{\dagger} и c — ферми-операторы, a , a^{\dagger} — бозе-операторы, $D_{\mathbf{q}}$ — c -числа, которые для удобства мы будем считать вещественными константами и обозначать через D . В первом приближении оператор H' описывает рассеяние электронов и объясняет явление электрического сопротивления; во втором приближении он позволяет найти собственную энергию и определяет связь между парами электронов. Эта связь сводится к косвенному взаимодействию через фононное поле. Один электрон поляризует решетку, другой электрон взаимодействует с поляризацией.

Полный гамильтониан системы электронов и фононов, с учетом взаимодействия между ними, имеет вид

$$H = H_0 + H' = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} + \\ + iD \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^{\dagger}). \quad (8.3)$$

Произведя каноническое преобразование (8.3), получим новый гамильтониан $\tilde{H} = e^{-S} H e^S$, который не содержит недиагональных членов порядка D . Пользуясь результатом (7.102) из задачи 7.6, запишем

$$\langle n | S | m \rangle = \frac{\langle n | H' | m \rangle}{E_m - E_n}. \quad (8.4)$$

Чтобы получить эффективную связь между электронами, удобно брать матричные элементы для фононных операторов, оставляя ферми-операторы в явном виде. Будем считать, что система фононов находится при абсолютном нуле, и, следовательно, один из индексов n или m относится к вакуумному фононному состоянию. Поэтому полученный ниже результат (8.9) фактически не зависит от возбуждения фононов. Тогда

$$\langle 1_{\mathbf{q}} | S | 0 \rangle = -iD \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}}, \quad (8.5)$$

$$\langle 0 | S | 1_{\mathbf{q}} \rangle = iD \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}}. \quad (8.6)$$

Итак, согласно (7.107), получаем

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [H', S] + O(D^3), \quad (8.7)$$

откуда с точностью до членов порядка D^2 находим

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} D^2 \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}} \right). \quad (8.8)$$

Мы пришли к группе членов с фононами, находящимися в промежуточных \mathbf{q} - и $-\mathbf{q}$ -состояниях. Члены с индексами $-\mathbf{q}$ вносят вклад в форму, где $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{-\mathbf{q}}$, т. е. в выражение

$$\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}} \right).$$

Производя далее замену $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ и переставляя операторы, получим сумму всех членов с индексами \mathbf{q} и $-\mathbf{q}$

$$\frac{1}{4} D^2 \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} \cdot \frac{4\omega_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}.$$

Итак, член, описывающий электрон-электронное взаимодействие, примет вид

$$H'' = D^2 \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}}. \quad (8.9)$$

Диаграмма для H'' приведена на рис. 8.1.

Электрон-электронное взаимодействие (8.9) является притяжением (отрицательно) при энергиях возбуждения, удовлетворяющих неравенству $|\varepsilon_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}| < \omega_{\mathbf{q}}$; в иных случаях оно соответствует отталкиванию. Даже в области притяжения взаимодействие затрудняется экранирующим эффектом кулоновского отталкивания, но при достаточно больших значениях константы взаимодействия D фоннное взаимодействие преобладает. Предположим для простоты, что в сверхпроводнике преобладает притяжение; тогда

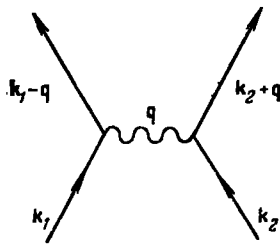


Рис. 8.1. Диаграмма, отвечающая непрямому электрон-электронному взаимодействию через фононы решетки.

$$\varepsilon_{\mathbf{F}} - \omega_{\text{D}} < \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}} < \varepsilon_{\mathbf{k}} + \omega_{\text{D}}, \quad (8.10)$$

где ω_{D} — дебаевская энергия. Это условие означает, что большинство фононов, соответствующих нулевым колебаниям, имеет энергию, близкую к дебаевской. Область отталкивания для (8.9) несущественна и не представляет интереса; поэтому часть гамильтониана,

соответствующую отгалкиванию, мы отбросим и запишем (8.9) в упрощенной форме:

$$H'' = -V \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}}, \quad (8.11)$$

где сумма берется только по значениям \mathbf{q} , удовлетворяющим условию (8.10) (рис. 8.2). Величина V считается положительной константой. Можно считать, что упрощенный гамильтониан (8.11) отражает все существенные черты рассматриваемой проблемы. Теперь наша задача состоит в том, чтобы изучить свойства ферми-газа, в котором действует парное притяжение, с учетом ограничения, налагаемого условием (8.10).

Связанные электронные пары в ферми-газе. Основное предположение, согласно которому необычные свойства ферми-газа обусловлены притягивающим взаимодействием частиц, было сделано Купером [1]; он показал, что ферми-система неустойчива по отношению к образованию связанных пар. Этот важный результат (который мы ниже получим) сразу же позволяет описать сверхпроводящее состояние. Следует подчеркнуть, что расчеты Купера сами по себе — это еще не теория сверхпроводимости, но он указал путь, на котором эту теорию уже можно было построить. В теории сверхпроводимости рассматривается многоэлектронная задача, значительно более сложная, чем проблема пар. Соображения, которые приведут нас к выражениям для матричных элементов, вытекающим из свойств (8.32) — (8.34), показывают, насколько важны эти пары. Плотность сверхпроводящих электронов такова, что $\sim 10^3$ или более куперовских пар должны заметно перекрываться.

Рассмотрим два свободных электрона, пренебрегая наличием у них спинов. Невозмущенная собственная функция пары (отнесенная к единице объема) может быть записана в виде

$$\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \exp [i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2)]. \quad (8.12)$$

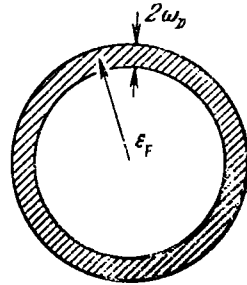


Рис. 8.2. Область одноэлектронных состояний в \mathbf{k} -пространстве (заштрихованная область), используемая при формировании основного состояния в теории ВКШ.

Ширина кольца равна удвоенной энергии Дебая. Область энергий, меньших $\epsilon_F - \Delta$, заполнена целиком, но не играет никакой роли в сверхпроводимости. Состояния, влияющие на это свойство, расположены в кольцевой области (шириной, примерно равной $4T_c$) около граничного уровня Ферми (см. рис. 8.4).

Вводя координаты в системе центра масс и координаты относительного движения

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (8.13)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (8.14)$$

запишем (8.12) в виде

$$\varphi(\mathbf{K}\mathbf{k}; \mathbf{X}\mathbf{x}) = \exp[i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \quad (8.15)$$

Кинетическая энергия состояния (8.15) равна $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{4} K^2 + k^2 \right)$.

Для удобства изучим лишь состояние с $\mathbf{K} = 0$; тогда $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}$. Иначе говоря, рассмотрим одноэлектронные состояния, составляющие пару $\pm \mathbf{k}$.

Далее введем в гамильтониан задачи оператор электрон-электронного взаимодействия (8.11). Будем искать собственные функции гамильтониана

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + H'' = \frac{1}{m}p^2 + H'' \quad (8.16)$$

в виде

$$\chi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_2}, \quad (8.17)$$

пользуясь определением (8.13). Теперь, если λ — собственное значение H , т. е. $(H - \lambda)\chi(\mathbf{x}) = 0$, то, выписывая матричные элементы, мы получим секулярное уравнение

$$\int d\mathbf{x} \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] (H - \lambda) \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} \exp[i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] = 0, \quad (8.18)$$

или, вводя $\varepsilon_{\mathbf{k}} = k^2/m$,

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \lambda) g_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k} | H'' | \mathbf{k}', -\mathbf{k}' \rangle = 0, \quad (8.19)$$

где

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q} \quad \text{и} \quad -\mathbf{k} = -\mathbf{k}' - \mathbf{q}. \quad (8.20)$$

Пусть $\rho(\varepsilon)$ — плотность двухэлектронных состояний $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ на единицу энергетического интервала; тогда секулярное уравнение примет вид

$$(\varepsilon - \lambda) g(\varepsilon) + \int d\varepsilon' \rho(\varepsilon') g(\varepsilon') \langle \varepsilon | H'' | \varepsilon' \rangle = 0. \quad (8.21)$$

Согласно (8.11) для интервала энергий одного электрона по отношению к другому, равного $\pm \omega_D$, получим, считая величину V

положительной,

$$\langle \epsilon | H'' | \epsilon' \rangle = -V. \quad (8.22)$$

Вне этого интервала мы считаем взаимодействие равным нулю. Предположим, что волновой пакет (8.17) построен из одноэлектронных состояний выше поверхности Ферми между ϵ_F и $\epsilon_F + \omega_D$, или между k_F и k_m , где k_m определено соотношением

$$\frac{1}{2m} (k_m^2 - k_F^2) = \epsilon_m - \epsilon_F = \omega_D. \quad (8.23)$$

Тогда секулярное уравнение (8.21) приобретает иной вид, а именно

$$(\epsilon - \lambda) g(\epsilon) = V \int_{2\epsilon_F}^{2\epsilon_m} d\epsilon' \rho(\epsilon') g(\epsilon') = C. \quad (8.24)$$

Здесь константа C не зависит от ϵ . Итак,

$$g(\epsilon) = \frac{C}{\epsilon - \lambda}. \quad (8.25)$$

Используя это решение в секулярном уравнении, получим вместо (8.24)

$$1 - V \int_{2\epsilon_F}^{2\epsilon_m} d\epsilon' \frac{\rho'(\epsilon')}{\epsilon' - \lambda} = 0, \quad (8.26)$$

где пределы относятся к паре. В таком малом энергетическом интервале значение $\rho(\epsilon')$ можно считать постоянным и равным ρ_F , т. е. значению ρ на уровне Ферми; тогда

$$\frac{1}{\rho_F V} = \int_{2\epsilon_F}^{2\epsilon_m} \frac{d\epsilon'}{\epsilon' - \lambda} = \ln \frac{2\epsilon_m - \lambda}{2\epsilon_F - \lambda} = \ln \frac{2\epsilon_m - 2\epsilon_F + \Delta}{\Delta}, \quad (8.27)$$

где наименьшее собственное значение энергии λ_0 определяется соотношением

$$\lambda_0 = 2\epsilon_F - \Delta. \quad (8.28)$$

Тогда

$$\frac{\Delta}{2\epsilon_m - 2\epsilon_F + \Delta} = \exp \left[-\frac{1}{\rho_F V} \right], \quad (8.29)$$

или

$$\Delta = \frac{2\omega_D}{\exp \left[\frac{1}{\rho_F V} \right] - 1}. \quad (8.30)$$

Это — энергия связи пары по отношению к уровню Ферми. Таким образом, найдено, что для положительного значения V (притягивающее взаимодействие) энергия системы при возбуждении пары электронов выше уровня Ферми понижается. Следовательно, наша ферми-система неустойчива. Эта неустойчивость ферми-системы приводит к появлению в ней важной особенности — образованию высокой плотности пар. Необходимо теперь тщательно изучить поверхность Ферми с учетом принципа Паули.

Заметим, что соотношение (8.30) нельзя представить в виде степенного ряда по V . Поэтому расчеты по теории возмущений до любого порядка не могут дать нужного результата.

Сверхпроводящее основное состояние. Рассмотрим теперь основное состояние ферми-газа при наличии взаимодействия, описываемого (8.11). Запишем полный гамильтониан с помощью блоховских выражений для одноэлектронных энергий ϵ_k , отнесенных к уровню Ферми, принятому за нулевой уровень. Тогда, перестроив надлежащим образом (8.11), получим

$$H = \sum \epsilon_k c_k^+ c_k - V \sum c_{k'+q}^+ c_{k-q}^+ c_k c_{k'}; \quad (8.31)$$

здесь спиновые индексы опущены. Напомним (см. (5.23) и (5.24)), что действие ферми-операторов на волновые функции от чисел заполнения определяется соотношениями

$$c_j \Psi(n_1, \dots, n_j, \dots) = \theta_j n_j \Psi(n_1, \dots, 1 - n_j, \dots), \quad (8.32)$$

$$c_j^+ \Psi(n_1, \dots, n_j, \dots) = \theta_j (1 - n_j) \Psi(n_1, \dots, 1 - n_j, \dots), \quad (8.33)$$

где

$$\theta_j = (-1)^{\nu_j}, \quad \nu_j = \sum_{p=1}^{j-1} n_p. \quad (8.34)$$

Иначе говоря, имея дело с операторами c_j , c_j^+ , следует умножать результат на $+1$ или -1 в зависимости от того, четным или нечетным было число занятых состояний, предшествующих состоянию j в исходном наборе состояний.

Изменение знака при действии этих операторов является *чрезвычайно существенным обстоятельством* при нахождении выражения основного состояния сверхпроводника. Член взаимодействия в гамильтониане объединяет большое число почти вырожденных конфигураций или систем чисел заполнения. Если все члены в H'' отрицательны, то мы можем получить состояние с низкой энергией, которое как раз соответствует куперовским парам. Но поскольку знаки изменяются, то случайно образующимся конфигурациям будет соответствовать примерно равное число положительных и отрицательных матричных эле-

ментов V . Этот эффект должен управляться особыми правилами отбора конфигураций, позволяющими избегать уменьшения среднего значения матричного элемента и понижение суммарного эффекта взаимодействия. Теория, приводящая к куперовским парам, как раз и позволяет сформулировать эти правила отбора.

Мы можем проследить за эффектом изменения знака на простом примере. Сначала рассмотрим действие оператора $c_1^+c_4$ на состояние $\Phi(00111)$, т. е. $c_1^+c_4\Phi(00111) = -c_1^+\Phi(00101) = \Phi(10101)$, а затем действие на него $c_1^+c_3$:

$$c_1^+c_3\Phi(00111) = c_1^+\Phi(00011) = \Phi(10011).$$

Следовательно, знак матричного элемента $\langle 10101 | c_1^+c_4 | 00111 \rangle$ противоположен знаку матричного элемента $\langle 10011 | c_1^+c_3 | 00111 \rangle$.

Мы можем создать когерентное состояние с низкой энергией, действуя на подсистему конфигураций, для пар которых матричные элементы взаимодействия всегда отрицательны. Это обеспечивается положительным знаком V в гамильтониане (8.31), если каждому занятому блоховскому состоянию всегда соответствует парное.

Таким образом, в нашем подпространстве допустимы состояния $\Phi(11; 00; 11)$, $\Phi(00; 11; 00)$ и т. п., но недопустимы состояния $\Phi(10; 10; 11)$ или $\Phi(11; 10; 00)$ и т. п. Здесь индексы упорядочены попарно и отделены друг от друга точкой с запятой. Если один член пары в какой-то допустимой конфигурации занят, то и другой член пары тоже занят. При взаимодействии волновой вектор сохраняется, и поэтому мы будем рассматривать прежде всего те конфигурации, для которых пары имеют один и тот же полный импульс $\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{K}$, где вектор \mathbf{K} обычно равен нулю. Если вектор \mathbf{K} равен нулю, мы получаем пару $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$.

Мы пока не принимали во внимание спин. Обменная энергия для пары с антипараллельными спинами ($\uparrow \downarrow$) обычно меньше, чем для пары с параллельными спинами. Мы будем рассматривать пары с антипараллельными спинами и не будем учитывать спины в явном виде. *Ниже мы будем просто считать, что состояние, записанное в виде \mathbf{k} , имеет спин, направленный вверх (\uparrow), а состояние, записанное в виде $-\mathbf{k}$ — спин, направленный вниз (\downarrow).* Кроме того, будем предполагать, что всегда $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{-\mathbf{k}}$.

В силу только что перечисленных причин для описания основного состояния достаточно рассматривать подпространство пар, используя приведенный гамильтониан, в котором члены

взаимодействия содержат лишь часть членов оператора взаимодействия в виде (8.11), а именно

$$H_{\text{прив}} = \sum \epsilon_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}) - V \sum c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}. \quad (8.35)$$

Этот гамильтониан известен как гамильтониан Бардина — Купера — Шриффера (БКШ). Он действует лишь в подпространстве пар.

Основное состояние Φ_0 можно, как будет показано ниже, приближенно записать в виде

$$\Phi_0 = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) \Phi_{\text{вак}}, \quad (8.36)$$

где $\Phi_{\text{вак}}$ — истинное вакуумное состояние, а $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ — константы. Для гамильтониана (8.35) полное число электронов является интегралом движения, но состояние Φ_0 — не диагонально относительно оператора числа электронов. Аналогичным образом обстоит дело и в случае блоховских стенок в теории ферромагнитных доменов, где полный спин так же обычно нельзя считать интегралом движения. В теории БКШ показано, что для макроскопической системы вероятное число пар в состоянии Φ_0 весьма близко к его наиболее вероятному значению, и поэтому мы используем Φ_0 так же, как это обычно делается при работе с большим каноническим ансамблем (см. в связи с этим задачу 8.3). В основном состоянии Φ_0 имеются только пары. Предполагается, что в выражении (8.36) $v_{\mathbf{k}} = -v_{-\mathbf{k}}$, так как операторы c^{\dagger} антикоммутируют.

Решение уравнения БКШ. Метод спиновой аналогии. Наиболее физическим методом изучения свойств гамильтониана (8.36) мы обязаны Андерсону [7]. Учитывая, что $\hat{n}_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}$, преобразуем гамильтониан (8.35) к виду

$$H_{\text{прив}} = - \sum \epsilon_{\mathbf{k}} (1 - \hat{n}_{\mathbf{k}} - \hat{n}_{-\mathbf{k}}) - V \sum' c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}; \quad (8.37)$$

здесь мы положили $\sum \epsilon_{\mathbf{k}} = 0$ или постоянной для состояний, симметричных относительно уровня Ферми в энергетическом слое $\pm \omega_{\text{Д}}$, что соответствует условию (8.10).

Сначала рассмотрим подпространство состояний, определяемое условием

$$n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}. \quad (3.38)$$

Это подпространство, в котором состояния \mathbf{k} , $-\mathbf{k}$ куперовских пар либо оба заняты, либо оба свободны. Рассмотрим действие

оператора $(1 - \hat{n}_k - \hat{n}_{-k})$:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \hat{n}_k - \hat{n}_{-k})\Phi(1_k, 1_{-k}) &= -\Phi(1_k, 1_{-k}), \\ (1 - \hat{n}_k - \hat{n}_{-k})\Phi(0_k, 0_{-k}) &= -\Phi(0_k, 0_{-k}). \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Следовательно, этот оператор можно представить в виде матрицы Паули

$$1 - \hat{n}_k - \hat{n}_{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z, \quad (8.40)$$

если состояние пары описывать матрицами в виде столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{свободная пара} \leftrightarrow \Phi(0_k, 0_{-k}) \leftrightarrow \alpha_k \leftrightarrow \text{«спин вверх»}, \quad (8.41)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{занятая пара} \leftrightarrow \Phi(1_k, 1_{-k}) \leftrightarrow \beta_k \leftrightarrow \text{«спин вниз»};$$

здесь α, β — обычные спиновые функции для спина, направленного вверх и для спина, направленного вниз соответственно.

Комбинации операторов в члене потенциальной энергии можно представить другими матрицами Паули. Известно, что

$$c_k^+ c_{-k}^+ \Phi(1_k, 1_{-k}) = 0, \quad c_k^+ c_{-k}^+ \Phi(0_k, 0_{-k}) = \Phi(1_k, 1_{-k}) \quad (8.42)$$

и что

$$\sigma^- = \sigma_x - i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (8.43)$$

следовательно,

$$c_k^+ c_{-k}^+ = \frac{1}{2} \sigma_k^-, \quad (8.44)$$

а для эрмитово сопряженного оператора —

$$c_{-k} c_k = \frac{1}{2} \sigma_k^+. \quad (8.45)$$

Итак, гамильтониан, выраженный через операторы Паули, можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{прив}} &= - \sum \varepsilon_k \sigma_{kz} - \frac{1}{4} V \sum_{kk'}' \sigma_k^- \sigma_k^+ = \\ &= - \sum \varepsilon_k \sigma_{kz} - \frac{V}{4} \sum' (\sigma_{k'x} \sigma_{kx} + \sigma_{k'y} \sigma_{ky}), \end{aligned} \quad (8.46)$$

где симметризация автоматически обеспечена суммированием по всем k' и k . В подпространстве состояний пар гамильтониан

(8.46) является точным гамильтонианом. Существенно помнить, что σ используется здесь не как операторы, действующие на реальные спины, а как операторы, порождающие или уничтожающие пары с $\pm \mathbf{k}$. Тем не менее для точного решения задачи с гамильтонианом (8.46) можно использовать все методы, развитые в теории ферромагнетизма. В задаче 8.3 мы покажем, что возможно точное решение в приближении сильной связи, когда все $\epsilon_{\mathbf{k}} = 0$.

Введем фиктивное магнитное поле $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$, действующее на $\sigma_{\mathbf{k}}$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}'} (\sigma_{\mathbf{k}'x} \hat{\mathbf{x}} + \sigma_{\mathbf{k}'y} \hat{\mathbf{y}}), \quad (8.47)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы в направлении координатных осей. Вид гамильтониана БКШ позволяет воспользоваться приближением молекулярного поля. Повернем спиновые векторы $\sigma_{\mathbf{k}}$ так, чтобы они заняли наилучшее из возможных классических расположений, а именно, чтобы каждый спин \mathbf{k} был параллелен действующему на него псевдополю $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$. Приближение молекулярного поля оказывается здесь очень хорошим, так как число спинов, лежащих вдоль направления поля $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$, очень велико, и поэтому само поле можно трактовать как классический вектор.

В невозмущенной ферми-системе ($V=0$) эффективное поле равно $\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}}$, где величина $\epsilon_{\mathbf{k}}$ положительна для энергий, лежащих выше поверхности Ферми, и отрицательна для энергий, лежащих ниже ее. Устойчивыми спиновыми состояниями будут состояния со спинами, «смотрящими» вверх (свободные пары) для энергий, лежащих выше поверхности Ферми, и состояния со спинами, «смотрящими» вниз (занятые пары) для энергий, лежащих ниже поверхности Ферми. Спины изменяют направление при энергии, точно равной энергии Ферми.

Рассмотрим теперь притягивающее взаимодействие, т. е. случай, когда величина V положительна. Точно на поверхности Ферми $\epsilon_{\mathbf{k}} = 0$, поэтому единственным полем, действующим на спин $|\mathbf{k}| = k_{\text{F}}$, будет та часть эффективного поля, которая обусловлена членами взаимодействия, т. е.

$$\frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}'} (\sigma_{\mathbf{k}'x} \hat{\mathbf{x}} + \sigma_{\mathbf{k}'y} \hat{\mathbf{y}}). \quad (8.48)$$

Предположим, что спин с k_{F} расположен горизонтально и направлен вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$. Вследствие взаимодействия спин будет стремиться заставить соседние спины также расположиться вдоль $\hat{\mathbf{x}}$, но по мере удаления от значения k_{F} члены кинетиче-

ской энергии $\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{z}$ будут все сильнее заворачивать спины в направлениях $\pm z$. Ситуация окажется весьма близкой к случаю расположения спинов в стенке Блоха в ферромагнетике, но в данном случае доменная стенка находится в \mathbf{k} -пространстве, а изменение состояний соответствует плавному повороту от занятых состояний к свободным.

Применяя приближение молекулярного поля к основному состоянию при наличии взаимодействия, мы выбираем направление спинов относительно направления среднего поля; при этом само поле мы трактуем как классический вектор. Молекулярное поле описывается выражением (8.47), где можно положить все $\sigma_{\mathbf{k}'y} = 0$, если для удобства направления осей выберем так, что спины лежат в плоскости xz . Тогда, имея в виду схему на рис. 8.3, получим

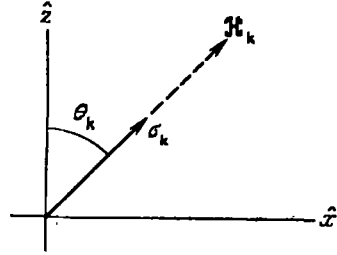


Рис. 8.3. Схема, иллюстрирующая метод молекулярного поля при решении задачи о сверхпроводимости при помощи спинового аналога гамильтониана БКШ.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{k}x}}{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{k}z}} = \frac{\sigma_{\mathbf{k}x}}{\sigma_{\mathbf{k}z}} = \frac{\frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}'} \sigma_{\mathbf{k}'x}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} = \operatorname{tg} \theta_{\mathbf{k}}. \quad (8.49)$$

Здесь $\sigma_{\mathbf{k}'x} = \sin \theta_{\mathbf{k}'}$, и мы получим интегральное уравнение БКШ в виде

$$\operatorname{tg} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{V}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}'} \sin \theta_{\mathbf{k}'}. \quad (8.50)$$

Будем искать решение (8.50), полагая

$$\Delta = \frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}'} \sin \theta_{\mathbf{k}'}. \quad (8.51)$$

Тогда уравнение (8.50) примет вид $\operatorname{tg} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}}$ и, согласно элементарной тригонометрии, получим

$$\sin \theta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}}; \quad \cos \theta_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{(\Delta^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}}. \quad (8.52)$$

Подставляя полученное выражение для $\theta_{\mathbf{k}'}$ в (8.51), находим

$$\Delta = \frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \epsilon_{\mathbf{k}'}^2)^{1/2}}. \quad (8.53)$$

Перейдем теперь от суммы к интегралу. Пределы интегрирования определяются областью от ω_D до $-\omega_D$, внутри которой потенциал V соответствует притяжению; ω_D — величина порядка дебаевской энергии. Итак, основное уравнение принимает вид

$$1 = \frac{1}{2} V \rho_F \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{(\Delta^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} = V \rho_F \operatorname{Arsh} \left(\frac{\omega_D}{\Delta} \right). \quad (8.54)$$

Здесь ρ_F — плотность состояний на уровне Ферми. Оценка интеграла в (8.54) не представляет труда. Из (8.54) получим для случая $\rho_F V \ll 1$

$$\Delta = \frac{\omega_D}{\operatorname{sh}(1/\rho_F V)} \approx 2\omega_D \exp \left[-\frac{1}{V \rho_F} \right]. \quad (8.55)$$

Это и есть решение БКШ для параметра Δ , характеризующего ширину энергетической щели. Как мы видим, величина Δ положительна, если положительно V .

В качестве первого приближения для спектра элементарных возбуждений $E_{\mathbf{k}}$ можно принять энергию, требуемую для переворачивания фиктивного спина в поле $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$. Используя (8.47), получим

$$E_{\mathbf{k}} = 2 |\mathcal{H}_{\mathbf{k}}| = 2 (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (8.56)$$

где используется только ветвь, соответствующая положительному корню. Наименьшая энергия возбуждения равна 2Δ . Таким образом, в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника имеется энергетическая щель. Ширина этой щели была определена по измерениям теплоемкости при изучении прохождения через тонкие пленки излучения далекой инфракрасной области, при исследовании туннельного эффекта, т. е. перехода электронов через барьер между сверхпроводящей и нормальной пленками. Переворачивание фиктивного спина соответствует возбуждению пары $\pm \mathbf{k}$ в состояние, ортогональное основному состоянию той же пары. Возможны и другие типы возбуждений, не включенные в наше подпространство, например возбуждения, в которых два электрона в возбужденном состоянии имеют различные значения \mathbf{k} . Такие возбуждения мы рассмотрим позднее и увидим, что и в этом случае ширина энергетической щели снова равна 2Δ . Низколежащие возбуждения, подобные магнетонам, не учитываются гамильтонианом (8.46), поскольку соответствующие силы взаимодействия имеют большой радиус дей-

ствия. В рассматриваемом случае нельзя, очевидно, ограничиться суммированием лишь по ближайшим соседям. Если в задаче о магнонах одинаковым образом связаны между собой все спины, то легко показать, что никаких возбуждений низкой энергии не будет (кроме однородных колебаний системы как целого).

Среднее значение энергии основного состояния сверхпроводника в сверхпроводящей фазе, отнесенное к энергии в нормальной фазе, определяется из (8.46), (8.50), (8.51), (8.54) следующим образом:

$$E_g = - \sum_{\mathbf{k}'} \varepsilon_{\mathbf{k}} \cos \theta_{\mathbf{k}} - \frac{1}{4} V \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sigma_{\mathbf{k}'x} \sigma_{\mathbf{k}x} + \sum_{\mathbf{k}} |\varepsilon_{\mathbf{k}}| = \\ = - \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \left(\cos \theta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sin \theta_{\mathbf{k}} \operatorname{tg} \theta_{\mathbf{k}} \right) + \sum_{\mathbf{k}} |\varepsilon_{\mathbf{k}}|. \quad (8.57)$$

Член $\sum |\varepsilon_{\mathbf{k}}|$ учитывает энергию $2|\varepsilon_{\mathbf{k}}|$ на электронную пару вплоть до уровня Ферми в нормальной фазе. Если ρ_F — плотность состояний на уровне Ферми, то для E_g получим

$$E_g = 2\rho_F \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}} \right\} - \frac{\Delta^2}{V}; \quad (8.58)$$

здесь использовано соотношение

$$\sum \varepsilon_{\mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{k}} \operatorname{tg} \theta_{\mathbf{k}} = \Delta^2 \sum \frac{1}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \Delta^2)^{1/2}} = \frac{2\Delta^2}{V}. \quad (8.59)$$

Интеграл в (8.58) берется элементарно. Исключая V при помощи (8.54), получим

$$E_g = \rho_F \omega_D^2 \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_D} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = - \frac{2\rho_F \omega_D^2}{\exp \left[\frac{2}{\rho_F V} \right] - 1} \approx - \frac{1}{2} \rho_F \Delta^2. \quad (8.60)$$

Итак, до тех пор пока величина V положительна, энергия когерентного (сверхпроводящего) состояния ниже, чем нормального состояния. Иначе говоря, критерием сверхпроводимости может служить просто условие: $V > 0$. Величина критического магнитного поля при абсолютном нуле получается, если приравнять E_g величине $H_c^2/8\pi$ для единицы объема образца.

Температура перехода T_c может быть определена методом молекулярного поля, точно так же, как это делается в теории ферромагнетизма. При некоторой конечной температуре средний спин ансамбля направлен вдоль эффективного поля $\mathfrak{H}_{\mathbf{k}}$,

а его величина (см. формулу (9.19) в книге автора [8]) описывается уравнением

$$\langle \sigma_{\mathbf{k}} \rangle = \text{th} \frac{\mathfrak{H}_{\mathbf{k}}}{T}, \quad (8.61)$$

где поле $\mathfrak{H}_{\mathbf{k}}$ записано в единицах постоянных Больцмана. Интегральное уравнение БКШ (8.49) тогда соответственно модифицируется для случая конечных температур, чтобы учесть это уменьшение $\sigma_{\mathbf{k}}$; при неизменном $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ получим

$$\text{tg} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{V}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}'}' \text{th} \frac{\mathfrak{H}_{\mathbf{k}'}}{T} \sin \theta_{\mathbf{k}'} = \frac{\Delta}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (8.62)$$

Здесь $\mathfrak{H}_{\mathbf{k}}$, согласно (8.56), равно

$$\mathfrak{H}_{\mathbf{k}} = \{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)\}^{1/2}. \quad (8.63)$$

В этой модели температура, при которой имеет место переход $T = T_c$, соответствует $\Delta = 0$, или

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}'}' \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}'}} \text{th} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}'}}{T_c}, \quad (8.64)$$

где мы использовали (8.52), (8.62) и (8.63). Найденный результат правилен для модели, являющейся спиновой аналогией сверхпроводимости, которая, напомним, полностью справедлива в случае подпространства пар — допустимыми возбужденными состояниями служат только реальные парные возбуждения в том смысле, как они вводятся ниже (см. (8.103)). Если мы расширим пространство, разрешив одночастичные возбуждения, как это сделано ниже (см. (8.102) и (8.110)), то число возможных возбуждений удвоится. Удвоение числа возбуждений удвоит энтропию, что с термодинамической точки зрения (имеется в виду связь свободной энергии с энтропией), точно эквивалентно удвоению температуры. Тогда T_c в уравнении (8.64) следует заменить на $2T_c$. Удвоение числа возбуждений не изменит вклада в свободную энергию, так как, согласно (8.167) и (8.168), два одночастичных возбуждения имеют ту же энергию, что и одно реальное парное возбуждение с тем же $|\mathbf{k}|$. Переписывая модифицированный результат в виде интеграла, получим

$$\frac{2}{V\rho_F} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \text{th} \frac{\varepsilon}{2T_c} = \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \frac{\text{th} x}{x}, \quad (8.65)$$

т. е. тот же результат, который был получен для T_c в теории БКШ.

Если $T_c \ll \omega_D$, то $\text{th } x$ можно принять равным единице почти во всей области интегрирования вплоть до $x \approx 1$; ниже этого значения $\text{th } x$ можно считать примерно равным x . Тогда наш интеграл будет примерно равен

$$1 + \ln \frac{\omega_D}{2T_c}.$$

Более точное графическое интегрирование с учетом (8.55) для случая $\rho_F V \ll 1$ дает

$$T_c = 1,14\omega_D \exp \left[-\frac{1}{\rho_F V} \right]. \quad (8.66)$$

Для ширины энергетической щели получим

$$2\Delta = 3,5T_c. \quad (8.67)$$

В эксперименте были найдены следующие значения $2\Delta/T_c$ [4]:

Элемент	Sn	Al	Pb	Cd
$\frac{2\Delta}{T_c}$	3,5	3,4	4,1	3,3

Изотопический эффект, т. е. наблюдаемое постоянство произведения $T_c M^{1/2}$ при изменении массы M для различных изотопов данного элемента, следует непосредственно из формулы (8.66), поскольку величина ω_D прямо пропорциональна частоте колебаний решетки (предполагается, что V от M не зависит). Частота линейного осциллятора пропорциональна $M^{-1/2}$ и, следовательно, $T_c M^{1/2} = \text{const}$ при различных массах изотопов данного химического элемента. Исключением из этого правила служат, как известно, элементы переходных групп Ru и Os, что, по-видимому, связано с эффектами поляризации d -оболочки. Кроме того, даже для простых металлов следует ожидать некоторой зависимости V от M , что нарушает согласие результатов простой теории с данными опыта (см., например, [9]).

Описанный выше спиновый аналог основного состояния можно ввести также при помощи представления об операции поворота спинов из состояния истинного вакуума, в котором все пары свободны, все парные состояния не заняты (спины «смотрят» вверх). Для образования какого-либо состояния со спином в плоскости xz и квантования этого состояния путем введения угла $\theta_{\mathbf{k}}$ с осью y применяется оператор спинового вращения U (см. курс [10], стр. 534), действие которого состоит в повороте спина на угол $\theta_{\mathbf{k}}$ относительно оси y :

$$U = \cos \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} - i\sigma_{ky} \sin \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = \cos \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}(\sigma_{\mathbf{k}}^+ - \sigma_{\mathbf{k}}^-) \sin \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}}; \quad (8.68)$$

действие оператора σ^- на вакуумное состояние дает нуль, причем $\frac{1}{2}\sigma_{\mathbf{k}}^- = c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+$. Таким образом, функция основного состояния имеет вид

$$\Phi_0 = \prod_{\mathbf{k}} \left(\cos \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} + c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+ \sin \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} \right) \Phi_{\text{вак}}. \quad (8.69)$$

Это и есть основное состояние, используемое в теории БКШ (см. ниже формулы (8.88), (8.92), (8.107)). Следует отметить, что при $k \ll k_F$ мы имеем $\frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \pi$, а состояние Φ_0 в этой области целиком заполнено электронами.

Основное состояние в виде (8.69) является лишь приближением к точному основному состоянию, поскольку мы предположили, что эта функция имеет форму произведения. Истинная собственная функция должна быть значительно более сложной. Однако результаты решения задачи 8.3 показывают, что выбор этой функции в виде (8.69) чрезвычайно удачен. Орбах [11] проделал аналогичный расчет для стенки Блоха в ферромагнетике и установил, что точное значение энергии и значение, вычисленное полуклассическим методом, хорошо согласуются между собой, причем это согласие тем лучше, чем больше число спинов. В настоящее время существует несколько вариантов доказательства того, что точность решения БКШ, основанного на приведенном гамильтониане, порядка $1/N$.

Решение уравнения БКШ. Метод уравнений движения. Полезно рассмотреть также другой подход к решению уравнения БКШ. Запишем уравнения движения для операторов $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{-\mathbf{k}}^+$, исходя из приведенного гамильтониана в виде (8.35):

$$H_{\text{прив}} = \sum \varepsilon_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}) - V \sum' c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}. \quad (8.70)$$

Составив коммутаторы с учетом того, что $c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \equiv 0$ и $c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}}^+ \equiv 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} i\dot{c}_{\mathbf{k}} &= \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - c_{-\mathbf{k}}^+ V \sum' c_{-\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}, \\ i\dot{c}_{-\mathbf{k}}^+ &= -\varepsilon_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+ - c_{\mathbf{k}} V \sum' c_{\mathbf{k}'}^+ c_{-\mathbf{k}'}^+. \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

Введем величины $B_{\mathbf{k}}$, определив их следующим образом:

$$B_{\mathbf{k}} = \langle 0 | c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = -B_{-\mathbf{k}}; \quad B_{+\mathbf{k}}^* = \langle 0 | c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+ | 0 \rangle. \quad (8.72)$$

Величину $\langle 0 | c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} | 0 \rangle$ следует понимать в том смысле, что $\langle 0; N | c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} | 0; N+2 \rangle$. Результирующая волновая функция содержит смесь состояний с небольшим разбросом по числу частиц. Эти матричные элементы аналогичны тем, с которыми мы

имели дело в гл. 2 в связи с рассмотрением фононного спектра конденсированного бозонного газа. Они естественным образом появляются и в теории сверхпроводимости при использовании метода функций Грина (см. работу Горькова [12]). Этот метод описан ниже, в гл. 21.

Положим, что при $|\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \omega_D$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = V \sum'_{\mathbf{k}'} B_{\mathbf{k}}; \quad \Delta_{\mathbf{k}}^* = V \sum'_{\mathbf{k}'} B_{\mathbf{k}}^*, \quad (8.73)$$

а при $|\varepsilon_{\mathbf{k}}| > \omega_D$ —

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}}^* = 0. \quad (8.74)$$

Тогда линеаризованные уравнения движения запишутся в виде

$$i\dot{c}_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+, \quad (8.75)$$

$$i\dot{c}_{-\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+ - \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}}. \quad (8.76)$$

Эта линеаризация представляет собой простое обобщение метода Хартри—Фока, в котором учитываются члены типа $c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}$. Приведенные выше уравнения имеют решения экспоненциального вида $e^{-i\lambda t}$ при условии

$$\begin{vmatrix} \lambda - \varepsilon_{\mathbf{k}} & \Delta_{\mathbf{k}} \\ \Delta_{\mathbf{k}}^* & \lambda + \varepsilon_{\mathbf{k}} \end{vmatrix} = 0, \quad (8.77)$$

т. е. когда

$$\lambda_{\mathbf{k}} = (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \Delta^2)^{1/2}, \quad (8.78)$$

где $\Delta^2 = \Delta_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}^*$. Зависимость Δ от \mathbf{k} мы теперь пренебрегаем.

Собственные векторы уравнений (8.75) и (8.76) можно записать в виде

$$\begin{array}{l} \alpha_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+, \quad \alpha_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+, \\ \alpha_{\mathbf{k}}^+ = u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}, \quad \alpha_{-\mathbf{k}}^+ = u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^+ + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}. \end{array} \quad (8.79)$$

Обратные им соотношения имеют вид

$$\begin{array}{l} c_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^+, \quad c_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^+, \\ c_{\mathbf{k}}^+ = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^+ + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}, \quad c_{-\mathbf{k}}^+ = u_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^+ - v_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}. \end{array} \quad (8.80)$$

Здесь коэффициенты $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ вещественны, $u_{\mathbf{k}}$ — четная, а $v_{\mathbf{k}}$ — нечетная функции \mathbf{k} , т. е. $u_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}$, а $v_{\mathbf{k}} = -v_{-\mathbf{k}}$. Нетрудно убедиться в том, что $\alpha_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют перестановочным соотноше-

ниям фермиевского типа, если $u_k^2 + v_k^2 = 1$; действительно,
 $\{\alpha_k, \alpha_k^+\} = u_k u_k, \{c_k, c_k^+\} + v_k v_k, \{c_{-k}^+, c_{-k}\} = \delta_{kk}, (u_k^2 + v_k^2)$; (8.81)

и, кроме того,

$$\{\alpha_k, \alpha_{-k}\} = u_k v_k \{c_k, c_k^+\} - v_k u_k \{c_{-k}^+ c_{-k}\} = u_k v_k - v_k u_k = 0. \quad (8.82)$$

Если выражения для c_k в виде (8.80) подставить в (8.75), то при $\alpha_k \sim e^{-i\lambda t}$ получим

$$\lambda u_k = \varepsilon_k u_k + \Delta v_k; \quad (8.83)$$

возводя (8.83) в квадрат и учитывая (8.78), находим

$$\lambda^2 u_k^2 = \varepsilon_k^2 u_k^2 + \Delta^2 v_k^2 + 2\varepsilon_k \Delta u_k v_k = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2) u_k^2. \quad (8.84)$$

Таким образом,

$$\Delta^2 (u_k^2 - v_k^2) = 2\varepsilon_k \Delta u_k v_k. \quad (8.85)$$

Запишем u_k, v_k в следующем виде:

$$u_k = \cos \frac{1}{2} \theta_k, \quad v_k = \sin \frac{1}{2} \theta_k. \quad (8.86)$$

Тогда вместо (8.85) получим

$$\Delta \cos \theta_k = \varepsilon_k \sin \theta_k, \quad \operatorname{tg} \theta_k = \Delta / \varepsilon_k. \quad (8.87)$$

Следовательно, имея в виду выражения (8.52), мы видим, что θ_k имеет тот же смысл, что и в методе спиновой аналогии.

Волновая функция основного состояния. Покажем теперь, что волновую функцию основного состояния можно выразить через операторы квазичастиц α_k в виде

$$\Phi_0 = \prod_k \alpha_{-k} \alpha_k \Phi_{\text{вак}}, \quad (8.88)$$

или

$$\Phi_0 = \prod_k (-v_k) (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+) \Phi_{\text{вак}}. \quad (8.89)$$

Можно нормировать функцию Φ_0 , опустив множители $(-v_k)$; тогда

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle &= \langle \Phi_{\text{вак}} | \prod_k (u_k + v_k c_{-k} c_k) (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+) | \Phi_{\text{вак}} \rangle = \\ &= \prod_k (u_k^2 + v_k^2) \langle \Phi_{\text{вак}} | \Phi_{\text{вак}} \rangle. \end{aligned} \quad (8.90)$$

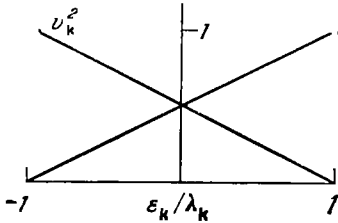


Рис. 8.4. Зависимость коэффициентов u_k и v_k от отношения ε_k/λ_k в схеме БКШ.

Здесь ε_k — кинетическая энергия свободной частицы, отсчитываемая от поверхности Ферми, а $\lambda_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}$ — энергетический параметр квазичастицы.

Легко убедиться в том, что функция (8.88) описывает основное состояние. Подействуем на Φ_0 оператором уничтожения; тогда

$$\alpha_{\mathbf{k}'} \Phi_0 = \alpha_{\mathbf{k}'} \alpha_{-\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}'} \prod_{\mathbf{k}}' \alpha_{-\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \Phi_{\text{вак}} = 0, \quad (8.91)$$

поскольку $\alpha_{\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}'} \equiv 0$, если α — фермиевские операторы. Итак, в приближении квазичастиц нормированная функция основного состояния имеет вид

$$\Phi_0 = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+) \Phi_{\text{вак}}. \quad (8.92)$$

Значения $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$, согласно (8.52) и (8.86), равны

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \cos^2 \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}}} \right], \quad (8.93)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}}} \right]. \quad (8.94)$$

Графики зависимости $u_{\mathbf{k}}^2$ и $v_{\mathbf{k}}^2$ от $\epsilon_{\mathbf{k}}/\lambda_{\mathbf{k}}$ приведены на рис. 8.4.

Полезно убедиться в том, что выражение для энергии основного состояния (8.60), вычисленное методом спиновой аналогии, получается и прямым расчетом при использовании волновой функции в виде (8.88) или (8.92). Среднее значение кинетической энергии (по основному состоянию) содержит величину

$$\langle \Phi_0 | c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}'} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | v_{\mathbf{k}}^2 \alpha_{-\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}'}^+ | \Phi_0 \rangle = v_{\mathbf{k}}^2, \quad (8.95)$$

и другие члены, значения которых равны нулю. Среднее значение потенциальной энергии содержит величину

$$\begin{aligned} & - \langle \Phi_0 | c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} | \Phi_0 \rangle = \\ & = \langle \Phi_0 | u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \alpha_{-\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}'}^+ \alpha_{-\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}'}^+ | \Phi_0 \rangle = u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (8.96)$$

и другие члены, значения которых также равны нулю. Следовательно, учитывая в выражении для кинетической энергии две ориентации спина, получим

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | H_{\text{прив}} | \Phi_0 \rangle & = 2 \sum \epsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum' u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} = \\ & = \sum \epsilon_{\mathbf{k}} (1 - \cos \theta_{\mathbf{k}}) - \frac{1}{4} V \sum \sin \theta_{\mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (8.97)$$

В последнем члене в правой части (8.97) суммирование, имея в виду (8.51), производится дважды и дает $-\Delta^2/V$. Член $\sum \epsilon_{\mathbf{k}}$

парами типа $\alpha_{-\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}}^+$, так что

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle_0 = v_{\mathbf{k}}^2 = h_{\mathbf{k}} = \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}}. \quad (8.105)$$

Здесь введена величина $h_{\mathbf{k}}$, которая применялась в оригинальной работе Бардина, Купера и Шриффера в качестве символа для среднего значения числа пар $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ в основном состоянии Φ_0 .

Соотношение (8.105) устанавливает связь наших результатов с выражениями, выведенными этими авторами:

$$h_{\mathbf{k}}^{1/2} = \sin \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}, \quad (1 - h_{\mathbf{k}})^{1/2} = \cos \frac{1}{2} \theta_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}, \quad (8.106)$$

$$\Phi_0 = \prod_{\mathbf{k}} [(1 - h_{\mathbf{k}})^{1/2} + h_{\mathbf{k}}^{1/2} c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+] \Phi_{\text{вак}}. \quad (8.107)$$

В нашем приближении гамильтониан, выраженный в операторах квазичастиц, имеет вид

$$H = \sum \lambda_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}}. \quad (8.108)$$

Энергии возбужденных состояний получаются непосредственно как суммы корней $\lambda_{\mathbf{k}}$ уравнений движения (см. (8.75)–(8.79)) для операторов рождения квазичастиц, т. е.

$$E_{1 \dots j} = \sum_{i=1}^j \lambda_{\mathbf{k}_i}, \quad \lambda_{\mathbf{k}} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (8.109)$$

где j — число возбужденных квазичастиц.

При анализе результатов решения конкретных задач следует иметь в виду, что сопоставлять между собой можно энергии лишь тех возбужденных состояний, в которых находится такое же среднее число частиц, как и в основном состоянии. Если в основном состоянии имеется N пар, то мы можем сравнивать его с возбужденным состоянием, имеющим $2p$ возбуждений и $N-p$ пар. Таким образом, наименьшее по энергии допустимое возбужденное состояние одночастичного типа должно содержать две возбужденные частицы, т. е.

$$\Phi_s = \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}}^+ \Phi_0 = c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}}^+ \prod_{\mathbf{k}}' (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+) \Phi_{\text{вак}}, \quad (8.110)$$

где символ произведения по \mathbf{k} означает, что в произведение входит $N-1$ пара и не учитывается наше произвольное требование, согласно которому в это произведение должны входить только $N-2$ пары. В функцию реального парного возбуждения

$$\Phi_p = \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{-\mathbf{k}}^+ \Phi_0 \quad (8.111)$$

равен нулю. В результате получим

$$\langle \Phi_0 | H_{\text{прив}} | \Phi_0 \rangle = - \sum \varepsilon_k \cos \theta_k - \frac{\Delta^2}{V}, \quad (8.98)$$

и, следовательно, при возникновении сверхпроводимости изменение энергии основного состояния относительно вакуума равно

$$E_g = - \sum \varepsilon_k \cos \theta_k - \Delta^2/V + \sum |\varepsilon_k|, \quad (8.99)$$

т. е. точно той же величине, которая была получена ранее (см. (8.57) и (8.58)). Среднее значение энергии в состоянии Φ_0 совпадает со значением, вычисленным ранее методом спиновой аналогии.

Возбужденные состояния. Как легко видеть, составленные при помощи функций

$$\Phi_0 = \prod \alpha_{-k} \alpha_k \Phi_{\text{вак}} \quad (8.100)$$

волновые функции

$$\Phi_{k_1 \dots k_j} = \alpha_1^+ \dots \alpha_j^+ \Phi_0 \quad (8.101)$$

образуют полную ортогональную систему. Действие оператора α_k^+ на волновую функцию Φ_0 создает элементарное возбуждение, или квазичастицу, со свойствами фермиона, т. е.

$$\alpha_k^+ \Phi_0 = (u_k c_k^+ - v_k c_{-k}^+) (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+) \prod' \dots = c_k^+ \prod' \dots \quad (8.102)$$

Здесь мы выбрали из произведения член с k' . Состояние $\alpha_k^+ \Phi_0$ — это *одночастичное возбужденное состояние*. В этом состоянии находится одна частица с квазиимпульсом k ; виртуальные пары в состоянии Φ_0 при этом не учитываются.

В общем случае двухчастичное возбуждение описывается оператором $\alpha_k^+ \alpha_{k''}^+$. Если $k'' = -k'$, то получается особое состояние

$$\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ \Phi_0 = (u_k c_k^+ c_{-k}^+ - v_k) \prod' \dots \quad (8.103)$$

Считается, что в этом состоянии находится *реальная возбужденная пара*, образованная из виртуальной, имевшейся в состоянии Φ_0 .

Для оператора числа частиц в состоянии с k получим, согласно (8.79),

$$\hat{n}_k = c_k^+ c_k = (u_k a_k^+ + v_k a_{-k}) (u_k a_k + v_k a_{-k}^+). \quad (8.104)$$

Среднее значение оператора \hat{n}_k для основного состояния Φ_0 получается из членов, в которых операторы α_k расположены

автоматически должна входить $N-1$ невозбужденная пара. Для этого возбуждения $E = 2\lambda_k$. Вычисление энергии состояний (8.110) и (8.111) мы оставляем читателю в качестве упражнения (см. задачу 8.6). Установлено, что вклад потенциальной энергии от возбужденных частиц равен нулю; увеличение потенциальной энергии при возбуждении происходит за счет уменьшения числа связей между невозбужденными парами просто из-за уменьшения числа невозбужденных пар.

Электродинамика сверхпроводников. Теория свехпроводимости должна, прежде всего, объяснять эффект Мейсснера, т. е. выталкивание магнитного потока из сверхпроводника. Наличие эффекта Мейсснера сразу следует из лондоновского уравнения (см., например, [8], гл. 16); действительно,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \Lambda = \frac{m}{ne^2} = \frac{4\pi\lambda_L^2}{c^2}. \quad (8.112)$$

Здесь \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{A} — вектор-потенциал, λ_L — лондоновская глубина проникновения. Мы предполагаем, что $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ является медленно изменяющейся функцией координат; в противном случае лондоновские уравнения следует записать в интегральной форме, предложенной Пиппардом. Запись в интегральной форме фактически определяет $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ при помощи взвешенного значения \mathbf{A} , усредненного по расстоянию порядка длины когерентности ξ_0 , определение которой дано ниже. Мы рассмотрим электродинамику сверхпроводника только в основном состоянии (при $T=0^\circ\text{K}$).

Вектор-потенциал возьмем в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}; \quad (8.113)$$

поскольку осциллирующий потенциал легче рассматривать, чем линейный; лондоновское уравнение мы возьмем для предельного случая $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Выражение, комплексно сопряженное (8.113), нам в явном виде не понадобится, хотя последующее рассмотрение справедливо и в этом случае.

Оператор плотности тока в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}) &= \frac{e}{2mi} (\Psi^+ \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \Psi^+) - \\ &\quad - \frac{e^2}{mc} \Psi^+ \mathbf{A} \Psi = \mathcal{J}_P(\mathbf{x}) + \mathcal{J}_D(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8.114)$$

Здесь \mathcal{J}_P — парамагнитная, а \mathcal{J}_D — диамагнитная части оператора плотности тока. Выражение для $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ получается путем симметризации оператора скорости $[\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}]/m$. Представим Ψ

(в единице объема) в виде ряда

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}; \quad (8.115)$$

тогда

$$\mathcal{J}_P(\mathbf{x}) = \frac{e}{2m} \sum_{\mathbf{kq}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} (2\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (8.116)$$

$$\mathcal{J}_D(\mathbf{x}) = -\frac{e^2}{mc} \sum_{\mathbf{kq}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (8.117)$$

Предположим, что в отсутствие поля ток исчезает. Многочастичное состояние Φ системы запишем в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1(\mathbf{A}) + \dots, \quad (8.118)$$

где Φ_0 не зависит от \mathbf{A} , а Φ_1 — линейная функция \mathbf{A} , т. е.

$$\Phi_1 = \sum_l' |l\rangle \frac{\langle l | H_1 | 0 \rangle}{E_0 - E_l} \quad (8.119)$$

Здесь при кулоновской калибровке, т. е. когда $\text{div } \mathbf{A} = 0$, гамильтониан H_1 с точностью до $O(\mathbf{A})$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_1 &= - \int d^3x \Psi^+(\mathbf{x}) \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \Psi(\mathbf{x}) = \\ &= -\frac{e}{mc} \sum_{\mathbf{kq}} \int d^3x c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = -\frac{e}{mc} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (8.120)$$

В кулоновской калибровке мы имеем

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{q}} = 0. \quad (8.121)$$

Можно показать (это будет сделано ниже), что построенная таким путем теория является калибровочно инвариантной.

С точностью до членов порядка \mathbf{A} среднее значение оператора диамагнитного тока (полагая $q \rightarrow 0$) равно

$$\mathbf{j}_D(\mathbf{x}) = \langle 0 | \mathcal{J}_D | 0 \rangle = -\frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (8.122)$$

Этот результат должен совпадать с лондоновским уравнением для $\mathbf{j}_P = 0$. Величина n есть полная концентрация электронов. Для среднего значения величины $\mathbf{j}_P(\mathbf{x})$ — оператора парамагнитного тока, взятого по состоянию Φ , — получим с точностью до членов порядка \mathbf{A}

$$\mathbf{j}_P(\mathbf{x}) = \langle 0 | \mathcal{J}_P | 1 \rangle + \langle 1 | \mathcal{J}_P | 0 \rangle, \quad (8.123)$$

где функция $|1\rangle$ определена выражением (8.119) так, что

$$\langle 0 | \mathcal{J}_P | 1 \rangle = \sum \frac{1}{E_0 - E_l} \langle 0 | \mathcal{J}_P | l \rangle \langle l | H_1 | 0 \rangle. \quad (8.124)$$

Рассмотрим матричный элемент $\langle 1 | H_1 | 0 \rangle$. Для основного и возбужденного состояний в модели БКШ он имеет не совсем обычную структуру. Эта структура весьма существенна для объяснения эффекта Мейсснера и других процессов, происходящих в сверхпроводниках. Мы имеем

$$\langle l | H_1 | 0 \rangle = -\frac{e}{mc} \langle l | \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_q) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}}^+ | 0 \rangle. \quad (8.125)$$

Рассмотрим вклады, обусловленные некоторым определенным возбужденным состоянием с номером l , волновая функция которого имеет вид

$$\Phi_l = \alpha_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ \alpha_{-\mathbf{k}'}^+ \Phi_0 = c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{-\mathbf{k}'}^+ \prod_{\mathbf{k}}' (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}}^+) \Phi_{\text{вак}}. \quad (8.126)$$

В сумме (8.125) это состояние образуется из основного состояния при помощи оператора

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}_q) c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}'}^+,$$

так как, согласно (8.80), имеем

$$c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}'}^+ \Phi_0 = u_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}'} \Phi_l; \quad (8.127)$$

но в (8.125) входит, кроме того, оператор

$$[(-\mathbf{k}' - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{a}_q] c_{-\mathbf{k}'}^+ c_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^+,$$

который вносит вклад

$$c_{-\mathbf{k}'}^+ c_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^+ \Phi_0 = u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \Phi_l. \quad (8.128)$$

Замечая, что $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_q) = 0$, получим для полного матричного элемента с состоянием l

$$\langle l | H_1 | 0 \rangle = -\frac{e}{mc} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}_q) (u_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}'} - u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}) \sim \sin \frac{1}{2} (\theta_{\mathbf{k}} - \theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}). \quad (8.129)$$

Эта величина, если учесть (8.90) и (8.94), стремится к нулю при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. В этом предельном случае энергетический знаменатель равен

$$E_0 - E_l \rightarrow -2 (\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2} \quad (8.130)$$

и, следовательно, при $\mathbf{q} \rightarrow 0$

$$\langle 0 | \mathcal{J}_P | 1 \rangle \rightarrow 0. \quad (8.131)$$

Итак, в данном предельном случае мы получаем лондоновское уравнение

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (8.132)$$

В нормальном состоянии, как показал Бардин [5], парамагнитный ток примерно компенсирует диамагнитный. В этом состоянии энергетическая щель отсутствует. Для обычных диэлектриков виртуальные возбужденные состояния образуются при одноэлектронных переходах и никакой компенсации типа компенсации, вытекающей из (8.129), не обнаруживается.

Калибровочную инвариантность теории можно продемонстрировать несколькими способами. Например, Шриффер [13] привел ряд соображений, основанных на свойствах плазмонов. Калибровочное преобразование от кулоновской калибровки означает добавление к нашему вектор-потенциалу продольной части $i\mathbf{q}\phi(\mathbf{q})$. Такой член в выражении для потенциала тесно связан с плазмонными возбуждениями и действительно сдвигает плазмонные координаты. Этот сдвиг не изменяет частоты плазмона и, следовательно, не изменяет и физических свойств системы. Другой подход к вопросу о калибровочной инвариантности состоит в том, что, как нетрудно заметить, калибровочное преобразование эквивалентно для оператора состояния преобразованию типа

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}}. \quad (8.133)$$

В этом случае, например, величину $B_{\mathbf{k}}$ (см. (8.72)) следует переопределить, так как

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}) | 0 \rangle &\rightarrow \langle 0 | \Psi(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}) | 0 \rangle \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})] = \\ &= \langle 0 | \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{y}] c_{\mathbf{k}'} \exp[i(\mathbf{k}' + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.134)$$

Для парных состояний тогда имеем условие

$$\mathbf{k} = -\mathbf{k}' - 2\mathbf{K}, \quad (8.135)$$

так что парная часть (8.134), которую мы хотим сохранить в гамильтониане, по аналогии с (8.72) будет иметь вид

$$\langle 0 | \Psi(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})] \langle 0 | c_{-\mathbf{k}-\mathbf{K}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} | 0 \rangle. \quad (8.136)$$

С определенными таким путем новыми парами все дальнейшие расчеты сохраняют силу без всяких изменений. Ниже это продемонстрировано при рассмотрении вопроса о квантовании магнитного потока.

Длина когерентности. Пиппард на основе эмпирических соображений предложил модифицировать лондоновское уравнение

так, чтобы плотность тока в точке задавалась интегралом от вектора-потенциала по области, охватывающей эту точку, а именно:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi c \Lambda \xi_0} \int d^3y \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})) e^{-r/\xi_0}}{r^4}, \quad (8.137)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Наличие длины когерентности ξ_0 является фундаментальным свойством вещества; для чистых металлов ее численное значение по порядку величины составляет 10^{-4} см. Для медленно изменяющегося вектор-потенциала \mathbf{A} уравнение Пиппарда (8.137) принимает вид лондоновского уравнения (8.112) с величиной Λ , которая определена там же. В материалах, содержащих примеси, величину ξ_0 в показателе экспоненты следует заменить на ξ , определенную следующим образом:

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\alpha l}; \quad (8.138)$$

здесь α — эмпирическая константа порядка единицы, а l — средняя длина свободного пробега электрона проводимости в нормальном состоянии. Однако величина ξ_0 , стоящая в знаменателе коэффициента перед интегралом, остается прежней. Если $\xi < \lambda_L$, как, например, в некоторых сверхпроводящих сплавах, то сверхпроводник относят к числу так называемых жестких сверхпроводников, или сверхпроводников 2-го рода. Для них характерно резкое изменение свойств в сильных магнитных полях¹⁾.

Выражение для тока, аналогичное полученному Пиппардом, вытекает и из теории БКШ. Вывод этого выражения приведен в оригинальной работе [2]. В той же теории БКШ получено выражение для ξ_0 в виде

$$\xi_0 = \frac{v_F}{\pi \Delta}. \quad (8.139)$$

Чтобы уяснить его смысл, напомним, что мы получили лондоновское уравнение из (8.129) для случая $q \rightarrow 0$. Это уравнение для малых q и для значений k , близких к k_F , дает, согласно (8.93) и (8.94), соотношение

$$u_{k+q} v_k - u_k v_{k+q} \approx \frac{1}{4\Delta} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \approx \frac{k_F q}{4m\Delta}. \quad (8.140)$$

Этот член мал, если

$$q \ll q_0 \equiv \frac{4m\Delta}{k_F} = \frac{4\Delta}{v_F}. \quad (8.141)$$

¹⁾ См. по этому вопросу, например, статью Абрикосова [14], основанную на работе Гинзбурга и Ландау [15].

Отсюда видно, что величина q_0 , определенная таким способом, равна, с точностью до числового множителя $4/\pi$, $1/\xi_0$.

Результат (8.139) находится в хорошем количественном согласии с экспериментальными данными. Высказанные выше аргументы (см. (8.140), (8.141)) убедительно свидетельствуют в пользу того, что $1/q_0$ характеризует минимальную протяженность волнового пакета, если избыточная энергия последнего порядка Δ . Значения ξ_0 равны по порядку величины 10^{-4} см. В жестких сверхпроводящих сплавах значение ξ по порядку величины может составлять 10^{-7} см. Глубина проникновения λ_L при низких температурах равна по порядку величины 10^{-6} — 10^{-5} см, но возрастает при $T \rightarrow T_c$.

Матричные элементы, обусловленные эффектами когерентности. При рассмотрении матричных элементов в связи с эффектом Мейсснера мы видели, что вклад в возбуждение одночастичных виртуальных состояний вносят два члена. При вычислениях во втором приближении появятся квадраты матричных элементов. Вклад от перекрестных произведений таких двух членов зависит от их знаков. Обусловленные этим эффекты называются *эффектами когерентности*. Для одних процессов эти члены усиливают эффект, для других — ослабляют. Эффекты когерентности являются характерной чертой явления сверхпроводимости. Их объяснение служит замечательным и убедительным аргументом в пользу физической реальности волновых функций БКШ.

Связь поля фотонов с волновым вектором q описывается квадратами выведенных выше матричных элементов (8.125) — (8.129). Для фотонов с энергией, меньшей ширины щели, возможны только неупругие фотонные процессы, например рассеяние квазичастиц, в результате которого они переходят в возбужденное состояние. Мы теперь хотим выделить члены с

$$c_{k+q}^+ c_k - c_{-k}^+ c_{-k-q}, \quad (8.142)$$

которые выписаны по отдельности в выражениях (8.127) и (8.128), но не будем брать предшествующих членов типа $\alpha_{k+q}^+ \alpha_{-k}^+$, которые связывают основное состояние с возбужденными, за исключением члена типа $\alpha_{k+q}^+ \alpha_k$, отвечающего рассеянию квазичастицы, сопровождающемуся ее переходом из состояния с k в состояние с $k+q$. Итак, выпишем интересующую нас часть более подробно:

$$\begin{aligned} c_{k+q}^+ c_k - c_{-k}^+ c_{-k-q} &= u_{k+q} u_k \alpha_{k+q}^+ \alpha_k - v_k v_{k+q} \alpha_k \alpha_{k+q}^+ + \dots = \\ &= (u_{k+q} u_k + v_k v_{k+q}) \alpha_{k+q}^+ \alpha_k + \dots \end{aligned} \quad (8.143)$$

В выражение для частоты переходов для процессов рассеяния $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ входит

$$(u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \Delta^2}{\lambda_{\mathbf{k}}\lambda_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \right\}. \quad (8.144)$$

Это выражение описывает поглощение фотонов и ядерную спиновую релаксацию в сверхпроводнике. При абсолютном нуле процесс, описываемый выражением (8.143), исчезает, поскольку действие операторов $\alpha_{\mathbf{k}}$ на функцию основного состояния дает нуль.

Имеются также другие типы процессов рассеяния, для которых результаты будут иными. Рассмотрим поглощение квазичастицами ультразвуковых волн. Для этого введем гамильтониан возмущения, обусловленного потенциалом деформации в виде

$$H' = iD \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^+). \quad (8.145)$$

Члены этого гамильтониана, описывающие рассеяние квазичастицы с импульсом \mathbf{k} и переход ее в состояние с импульсом $\mathbf{k} + \mathbf{q}$, сопровождающееся поглощением фонона с импульсом \mathbf{q} , пропорциональны

$$c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ c_{\mathbf{k}} + c_{-\mathbf{k}}^+ c_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \quad (8.146)$$

Здесь, в отличие от того, как мы поступали в случае с фотонами, берется знак плюс, так как величина D не зависит от \mathbf{k} для потенциала, описывающего связь с деформациями и приводящего к H' . Можно сказать и в более общем виде, что симметрия фононного взаимодействия иная, чем фотонного.

Тогда, имея в виду (8.143) и изменяя надлежащим образом знак, получим для рассеяния

$$(u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \Delta^2}{\lambda_{\mathbf{k}}\lambda_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \right\}. \quad (8.147)$$

Обсуждение экспериментов, связанных с наблюдением эффектов когерентности типа (8.144) и (8.147), изложено в обзоре [4].

Квантование магнитного потока в сверхпроводниках. Экспериментально установлено [16, 17], что магнитный поток в сверхпроводящем кольце или тороиде квантуется в единицах

$$\frac{1}{2} \frac{ch}{e} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ гс/см}^2. \quad (8.148)$$

Заметим, что эту единицу можно представить также в виде

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi\hbar c}{e} = 2\pi \frac{e\hbar}{2mc} \frac{mc^2}{e^2} = \frac{2\pi\mu_B}{a_e}, \quad (8.149)$$

где a_e — классический радиус электрона.

Рассмотрим кольцо R с отверстием O (рис. 8.5). Обозначим через Φ суммарный магнитный поток через кольцо. Он создается полем внешних источников и поверхностными токами кольца. Волновое уравнение для частиц в кольце имеет вид

$$\left\{ \sum_j \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p}_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_j) \right]^2 + V \right\} \Psi = E\Psi, \quad (8.150)$$

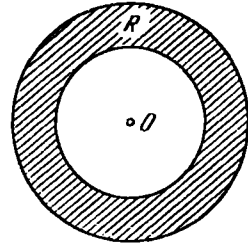


Рис. 8.5. Сверхпроводящее кольцо.

где в потенциал V включены электрон-фононное взаимодействие и энергия фона. Внутри области R $\mathbf{H}=0$, если пренебречь микроскопически малой областью вблизи поверхности кольца. Иначе говоря, мы предполагаем наличие эффекта Мейсснера. Тогда $\text{rot } \mathbf{A}=0$, а $\mathbf{A}=\text{grad } \chi$, где величина χ не может быть константой, так как она должна обеспечивать поток, равный

$$\Delta\chi = \oint \text{grad } \chi \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \Phi, \quad (8.151)$$

даже если путь линейного интегрирования проходит только по точкам, где $\mathbf{H}=0$. Мы можем считать, что $\chi = \frac{\Phi}{2\pi} \Phi\hat{\varphi}$, где $\hat{\varphi}$ — единичный вектор вдоль касательной, а φ — угол.

Теперь произведем преобразование, помня, что в настоящем разделе Ψ — одноэлектронная волновая функция, а не полевой оператор. Итак,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \exp \sum_j \frac{ie}{c} \chi(\mathbf{x}_j); \quad (8.152)$$

при этом должно выполняться соотношение

$$\mathbf{p}\Psi = \left\{ \exp \sum_j \frac{ie}{c} \chi(\mathbf{x}_j) \right\} \left\{ \sum_j \left[-i\nabla_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_j) \right] \right\} \psi. \quad (8.153)$$

Волновая функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{1}{2m} \sum_j p_j^2 + V \right\} \Psi = E\Psi, \quad (8.154)$$

которое совпадает с уравнением (8.150) при $\mathbf{A}\equiv 0$. Однако функция Ψ всегда должна быть однозначной, тогда как при фиксации координат всех частиц, кроме одной, которая движется по кольцу, изменение функции Ψ определяется потоком Φ . Поэтому, согласно (8.151) и (8.152), при однократном прохождении

одного электрона по кольцу получим

$$\Psi \rightarrow \psi(\mathbf{x}) \exp \left[\frac{ie}{c} \Phi \right]. \quad (8.155)$$

В силу цилиндрической симметрии угловая зависимость имеет вид

$$\psi \sim \exp \left[i \sum_j n_j \varphi_j \right], \quad (8.156)$$

где n_j — целое, положительное или отрицательное число. Итак, угловая зависимость Ψ запишется следующим образом:

$$\Psi \sim \exp \left[i \prod_z \left\{ n_j + \frac{2\pi e \Phi}{c} \right\} \varphi_j \right]. \quad (8.157)$$

Теперь рассмотрим двухэлектронное состояние

$$\Psi = \exp [in_1\varphi_1] \exp [in_2\varphi_2] \exp [i(2\pi e/c)\Phi(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (8.158)$$

где n_1 и n_2 — целые числа. Записывая эту функцию в системе центра масс и вводя относительные координаты, получим

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (8.159)$$

Тогда

$$\Psi = \exp [1/2i(n_1 - n_2)\varphi] \exp [i\{(n_1 + n_2) + (4\pi e/c)\Phi\}\theta]. \quad (8.160)$$

Если множитель при θ в показателе экспоненты равен нулю, то мы получаем куперовские пары, т. е.

$$\Psi = \exp [1/2i(n_1 - n_2)\varphi_1] \exp [-1/2i(n_1 - n_2)\varphi_2]. \quad (8.161)$$

Член, содержащий θ , равен нулю, когда

$$\frac{4\pi e}{c}\Phi = -(n_1 + n_2) = \text{целое число}, \quad (8.162)$$

или, вводя неперечеркнутую (не разделенную на 2π) постоянную Планка, когда

$$\Phi = \text{целое число} \times \frac{hc}{2e}. \quad (8.163)$$

Таким образом, если поток удовлетворяет условию (8.163), мы можем образовать пары и составить уравнение для Ψ , которое не содержит \mathbf{A} . Экспериментальное подтверждение этого результата и, в частности, появление числового множителя, равного $1/2$, служит сильным аргументом в пользу представления о спаривании электронов в основном состоянии, сформулированного в теории БКШ.

Чтобы построить теорию БКШ, исходя из волнового уравнения для Ψ , нам совершенно необходимо ввести пары, но если поток квантуется в единицах $\hbar c/2e$, то условия, налагаемые на Ψ введением пар, совместимы с периодическими граничными условиями для ψ . Для обычного проводника нет необходимости ограничиваться парными состояниями; в случае нормального (не сверхпроводящего) состояния это специфически квантовое условие для потока не является энергетически выгодным.

Расчет можно вести и иным путем. Возьмем состояния

$$\psi_1 \sim \exp[in_1\varphi_1]; \quad \psi_2 \sim \exp\left[-i\left(n_1 + \frac{2e}{\hbar c}\Phi\right)\varphi_2\right]; \quad (8.164)$$

они перейдут в состояния

$$\Psi_1 \sim \exp\left[i\left(n_1 + \frac{e}{\hbar c}\Phi\right)\varphi_1\right], \quad \Psi_2 \sim \exp\left[-i\left(n_1 + \frac{e}{\hbar c}\Phi\right)\varphi_2\right]. \quad (8.165)$$

Теперь Ψ_1 и Ψ_2 — куперовские пары, но Ψ_2 удовлетворяет периодическим граничным условиям только в том случае, если $2e\Phi/\hbar c$ равно целому числу.

ЗАДАЧИ

8.1. Оценить для одномерного металла радиус взаимодействия (8.11) при выполнении условия (8.10), если дебаевская энергия равна 10^{-14} эрг.

8.2. а. Выяснить, какую форму примет волновая функция куперовской пары в основном состоянии в пространстве относительных координат.

б. Оценить для типичного сверхпроводника размеры области, охватываемой этой функцией, взяв $\Delta \approx k_B T_c$, где T_c — критическая температура для данного сверхпроводника.

8.3. В приближении *сильной связи* принять равными нулю все $\epsilon_{\mathbf{k}}$, которые соответствуют поверхности Ферми. Эквивалентный (спинорный) гамильтониан (если V для N' состояний — константа, а для прочих состояний равно нулю) имеет вид

$$H = -\frac{1}{4}V \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\sigma_{k_x}\sigma_{k'_x} + \sigma_{k_y}\sigma_{k'_y}), \quad (8.166)$$

где индексы \mathbf{k} , \mathbf{k}' пробегает значения, соответствующие всем N' состояниям.

а. Пусть полный спин этих состояний равен $\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} \sigma_{\mathbf{k}}$. Показать, что гамильтониан H можно записать в виде

$$H = -V\mathbf{S}^2 + V\mathbf{S}_z^2 + \frac{N'}{2}V. \quad (8.167)$$

Точные собственные значения этого гамильтониана равны

$$E = -V\{S(S+1) - M^2\} + \frac{N'}{2}V, \quad (8.168)$$

где S — квантовое число полного спина, а M — квантовое число \mathcal{J}_z . Допустимые значения S равны $\frac{1}{2}N'$, $\frac{1}{2}N' - 1$, $\frac{1}{2}N' - 2$, ... в соответствии с числом перевернутых спинов n .

б. Показать для состояния $M=0$, что

$$E(n) = E_0 + nVN' - Vn(n-1). \quad (8.169)$$

В этом случае ширина энергетической щели $E(1) - E(0)$ должна точно равняться $N'V$.

в. Выяснить, что представляют собой состояния с различными значениями M .

г. Показать, что энергия основного состояния и энергии первых парных возбуждений, вычисленные в приближении молекулярного поля (БКШ), согласуются с результатами соответствующих расчетов в приближении сильной связи с точностью до членов порядка $1/N'$. Такое совпадение служит превосходным и весьма важным свидетельством точности обычных методов нахождения собственных значений приведенного гамильтониана БКШ.

8.4. Убедиться в том, что для уравнений движения (8.71) полное число частиц сохраняется.

8.5. Операторы рождения и уничтожения пар в теории БКШ определены следующим образом:

$$b_k^+ = c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+; \quad b_k = c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}, \quad (8.170)$$

где c , c^+ — одночастичные фермиевские операторы. Показать, что операторы b , b^+ удовлетворяют смешанным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [b_k, b_{k'}^+] &= (1 - n_{k\uparrow} - n_{-k\downarrow}) \delta_{kk'}, \\ [b_k, b_{k'}] &= 0, \\ [b_k, b_{k'}] &= 2b_k b_{k'} (1 - \delta_{kk'}). \end{aligned} \quad (8.171)$$

8.6. Используя гамильтониан (8.70), подтвердить прямым расчетом, что среднее значение энергии возбуждения в состоянии (8.110) равно

$$E = \lambda_{k'} + \lambda_{k'}. \quad (8.172)$$

Показать, кроме того, что для реальных парных возбуждений (8.111)

$$E = 2\lambda_{k'}. \quad (8.173)$$

8.7. Построить и обсудить теорию туннельного эффекта, используя результаты экспериментов на сверхпроводниках.

8.8. Проанализировать вопрос о плотности состояний в сверхпроводнике вблизи энергетической щели.

Литература

1. Соорег Л., Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
2. Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж., в сб. «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960.
3. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, 1961.
4. Бардин Дж., Шриффер Дж., Новое в изучении сверхпроводимости, Физматгиз, 1962.

5. Бардин Дж., в сб. «Физика низких температур», ИЛ, 1959.
6. Tinkham M., в сб. «Low Temperature Physics», ed. by C. DeWitt, а. о., N. Y., 1962, pp. 149—230.
7. Anderson P. W., Phys. Rev. 112, 900 (1958).
8. Киттель Ч., Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963.
9. Morel P., Anderson P. W., Phys. Rev. 125, 1263 (1962).
10. Messiah A., Quantum Mechanics, Amsterdam, 1961—1962.
11. Orbach R., Phys. Rev. 115, 1181 (1959).
12. Горьков Л. П., ЖЭТФ 34, 735 (1958).
13. Schriffier J. R., в сб. «Many body problem», ed. by C. DeWitt, N. Y. 1959, p. 573.
14. Абрикосов А. А., ЖЭТФ 32, 1442 (1957).
15. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
16. Deaver B. S., Jr., Fairbank W. M., Phys. Rev. Letts 7, 43 (1961).
17. Doll R., Näbauer M., Phys. Rev. Letts 7, 51 (1961).