

Динамика электронов в магнитном поле. Эффект де Гааза — Ван Альфена и циклотронный резонанс

Явления, связанные с поведением электронов кристалла в магнитном поле, представляют значительно больший интерес, чем явления, связанные с их поведением в электрическом поле. В магнитном поле орбиты обычно замкнуты и «проквантованы»; однако иногда они могут быть незамкнутыми (открытыми), что приводит к определенным, специфическим, последствиям. Экспериментальные исследования явлений, связанных с орбитальным движением, дают наиболее непосредственную информацию о поверхности Ферми. К числу наиболее интересных и экспериментально обнаружимых явлений подобного рода относятся циклотронный резонанс, эффект Де Гааза — Ван Альфена, затухание акустических волн в магнитном поле, изменение электрического сопротивления в магнитном поле (магнетосопротивление). Основы теории движения электронов в кристалле при наличии магнитного поля разработаны, к сожалению, не столь четко и ясно, как сформулированные выше теоремы, относящиеся к движению электронов в электрическом поле, хотя дело обстоит, пожалуй, не так уж плохо. Одна или две задачи, касающиеся движения в магнитном поле, были решены точно; для большой группы задач были получены квазиклассическими методами приближенные решения. В ряде случаев решения были получены в виде рядов (по магнитному полю), причем были вычислены несколько членов таких рядов. Квазиклассическое рассмотрение движения электрона на поверхности Ферми в магнитном поле оказывается в большинстве случаев достаточно точным.

Свободный электрон в магнитном поле

Рассмотрим сначала движение свободной частицы с массой m и зарядом e в однородном магнитном поле H , направленном параллельно оси z . Векторный потенциал в калибровке Ландау равен $\mathbf{A} = H(0, x, 0)$. Гамильтониан в этом случае

имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_z^2 + (p_y + m\omega_c x)^2 \right], \quad (11.1)$$

где ω_c — циклотронная частота, определяемая для электрона соотношением

$$\omega_c \equiv -\frac{eH}{mc}. \quad (11.2)$$

Прежде всего рассмотрим классические уравнения движения с тем, чтобы приобрести привычку свободно обращаться с ними в принятой калибровке. Мы имеем

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_y} = \frac{(p_y + m\omega_c x)}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}; \quad (11.3)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = -(p_y + m\omega_c x)\omega_c, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \dot{p}_z = 0. \quad (11.4)$$

Из этой записи сразу видно, что p_y и p_z являются интегралами движения; можно обозначить их соответственно через k_y и k_z . Из уравнений для \dot{x} и \dot{p}_x получим

$$m\ddot{x} = -k_y\omega_c - m\omega_c^2 x = -m\omega_c^2 \left(x + \frac{1}{m\omega_c} k_y \right), \quad (11.5)$$

т. е. уравнения для линейного гармонического осциллятора с частотой ω_c и положением равновесия

$$x_0 = -\frac{1}{m\omega_c} k_y. \quad (11.6)$$

Отметим также, что \dot{y} , в отличие от p_y , не является интегралом движения. Типичное решение этих уравнений имеет вид

$$x = -\frac{1}{m\omega_c} k_y + \cos \omega_c t, \quad y = y_0 + \sin \omega_c t, \quad (11.7)$$

где y_0 , как и k_y , — величина, которой мы можем распоряжаться.

Квантовые уравнения движения записываются следующим образом:

$$i\dot{x} = [x, \mathbf{H}] = \frac{i p_x}{m}, \quad i\dot{y} = [y, \mathbf{H}] = \frac{i}{m} (p_y + m\omega_c x), \quad i\dot{z} = \frac{i p_z}{m}; \quad (11.8)$$

$$i\dot{p}_x = [p_x, \mathbf{H}] = -i (p_y + m\omega_c x)\omega_c, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \dot{p}_z = 0, \quad (11.9)$$

что полностью согласуется с классическими уравнениями (11.3) и (11.4). Выполнив подстановку

$$p_y = k_y, \quad p_z = k_z, \quad x = -\frac{1}{m\omega_c} k_y + q = x_0 + q, \quad (11.10)$$

получим для гамильтониана (11.1)

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + m^2 \omega_c^2 q^2) + \frac{1}{2m} k_z^2. \quad (11.11)$$

Собственные значения этого гамильтониана записываются в виде

$$\varepsilon = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \omega_c + \frac{1}{2m} k_z^2, \quad (11.12)$$

где λ — положительное целое число; собственные функции имеют вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \exp [i(k_y y + k_z z)] \times$$

$$\times \text{Функция гармонического осциллятора от } (x - x_0). \quad (11.13)$$

Максимальное значение k_y определяется соотношением (11.6) согласно требованию, чтобы координата x_0 находилась во внутренней части образца. Предположим, что электронный газ заключен в прямоугольный параллелепипед со сторонами L_x , L_y , L_z . Если

$$-\frac{1}{2} L_x < x_0 < \frac{1}{2} L_x, \quad (11.14)$$

то

$$-\frac{1}{2} m \omega_c L_x < k_y < \frac{1}{2} m \omega_c L_x. \quad (11.15)$$

Число допустимых значений k_y (в рассматриваемой области k -пространства) равно

$$\frac{L_y}{2\pi} m \omega_c L_x = L_y L_x \frac{eH}{2\pi c}, \quad (11.16)$$

причем наличием спина у электрона мы пока пренебрегаем. Таким образом, при фиксированном k_z и квантовом числе λ , характеризующем энергию, данное состояние вырождено. Интервал между соседними энергетическими уровнями ($\Delta\lambda = 1$) равен ω_c и, следовательно, число состояний на единичный энергетический интервал (плотность состояний) при фиксированной величине k_z равно $m L_x L_y / 2\pi$.

В двумерном газе в нулевом магнитном поле плотность состояний равна

$$\frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} 2\pi k \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{L_x L_y m}{2\pi}, \quad (11.17)$$

где $\varepsilon = k^2/2m$. Следовательно, на среднюю плотность состояний магнитное поле не влияет. Действие магнитного поля сведется к «стягиванию» большого числа уровней в один уровень.

При абсолютном нуле все уровни вплоть до уровня Ферми ϵ_F заняты, а выше — все уровни свободны. Рассмотрим «пластинку» в k -пространстве толщиной δk_z , находящуюся на расстоянии k_z от плоскости $k_x k_y$; пусть ось k_z параллельна магнитному полю. Число допустимых значений k_z в интервале δk_z равно $(L_z/2\pi)\delta k_z$ и, следовательно, из (11.16) вытекает, что число, характеризующее степень вырождения состояния λ в слое δk_z , равно

$$\frac{eHL_xL_y}{2\pi c} \frac{L_z}{2\pi} \delta k_z = L_xL_yL_z \frac{e \delta k_z}{4\pi c^2} H = L_xL_yL_z \xi H. \quad (11.18)$$

Введенную здесь величину ξ назовем параметром вырождения и определим как степень вырождения при единичной напряженности магнитного поля на единицу объема образца; согласно (11.18)

$$\xi = \frac{e \delta k_z}{4\pi^2 c}; \quad (11.19)$$

при этом мы опять-таки не учитываем спина.

Эффект де Гааза — Ван Альфена ¹⁾

Многие электронные свойства чистых металлов при низких температурах являются периодическими функциями $1/H$. Например, эффект Шубникова — де Гааза состоит в том, что электрическое сопротивление периодически изменяется в зависимости от $1/H$. Эффект де Гааза — Ван Альфена состоит в том, что периодические изменения испытывает магнитная восприимчивость. Этот эффект весьма значителен по величине и очень важен. Он предоставляет одно из лучших средств исследования поверхности Ферми металлов.

Сначала рассмотрим эффект де Гааза — Ван Альфена в свободном электронном газе при абсолютном нуле. Можно показать, что уровень Ферми ϵ_F остается приблизительно постоянным при изменении H ; при рассмотрении интересующих нас периодических по $1/H$ эффектов изменением уровня Ферми можно полностью пренебречь. При абсолютном нуле в слое δk_z (его определение приведено выше) полностью заняты все уровни λ (рис. 11.1), для которых

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \omega_c < \epsilon_F - \frac{1}{2m} k_z^2 \equiv \epsilon'_F. \quad (11.20)$$

¹⁾ См. статьи Пиппарда [1], Шенбрега [2] (в которой дан обстоятельный обзор экспериментальных исследований до 1957 г.) и Кона и Фредерикса [3].

а все орбиты, расположенные выше этого уровня, свободны. Если самый верхний из занятых уровней соответствует λ' , то используя (11.18) и учитывая, что для занятого уровня $\lambda=0$, получим полное число электронов n в слое толщиной δk_z в виде

$$n = (\lambda' + 1) \xi H. \quad (11.21)$$

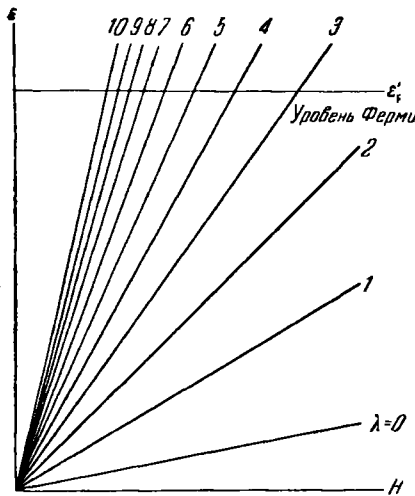


Рис. 11.1. Спектр уровней Ландау как функция H .

Чем меньше λ , тем больше должно быть H для достижения уровня Ферми ε'_F .

Величина n линейно возрастает с увеличением H до тех пор, пока λ' не достигнет значения, соответствующего уровню Ферми ε'_F . Даже бесконечно малое дальнейшее увеличение H приведет к тому, что значения λ' окажутся в области, соответствующей уровням, лежащим выше ε'_F , и поэтому все электроны, находившиеся до этого возрастания на уровне λ' , покинут его и перейдут на орбиты в других слоях поверхности Ферми, т. е. в слои с другими значениями k_z и

ε'_F . Разрывы в процессе ухода электронов имеют место при тех целых значениях λ' , которые удовлетворяют соотношению

$$\left(\lambda' + \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon'_F}{\omega_c} = \frac{m_c \varepsilon'_F}{e} \frac{1}{H}; \quad (11.22)$$

поэтому населенность δn оказывается приблизительно периодической функцией $1/H$ с периодом, равным $e/mc\varepsilon'_F$. Населенность слоя осциллирует с амплитудой $(1/2)\xi H$ около равновесного значения n_0 , равного полному числу электронов в слое δk_z в нулевом магнитном поле. Ход периодического изменения n (и других величин) показан на рис. 11.2.

Для энергии электронов U_0 в слое δk_z в таком магнитном поле H , что населенность равна как раз n_0 , имеем

$$\begin{aligned} U_0 &= \xi H \omega_c \sum_0^{\lambda'} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + n_0 \frac{k_z^2}{2m} = \frac{1}{2} \xi H \omega_c (\lambda' + 1)^2 + n_0 \frac{k_z^2}{2m} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\xi H} n_0^2 + n_0 \frac{k_z}{2m}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Здесь использовано выражение $n_0 = (\lambda' + 1)\xi H$, вытекающее из (11.21), при указанной величине H магнитного поля. Для соседнего значения магнитного поля и при той же величине λ' для самого высокого занятого уровня получим

$$U = \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\xi H} n^2 + n \frac{k_z^2}{2m} + (n_0 - n) \epsilon_F. \quad (11.24)$$

Первые два члена в правой части этого выражения представляют энергию электронов в слое δk_z ; член $(n_0 - n)\epsilon_F$ равен изменению энергии оставшихся после перехода электронов ферми-фона; это изменение вызвано переходом $n_0 - n$ электронов на уровне Ферми. Поскольку мы учли переход электронов, то разность $U - U_0$ представляет собой полное изменение энергии всей поверхности Ферми при условии, что уровень Ферми ϵ_F остается точно неизменным. Можно написать $\omega_c/2\xi H = \mu/\xi$, где

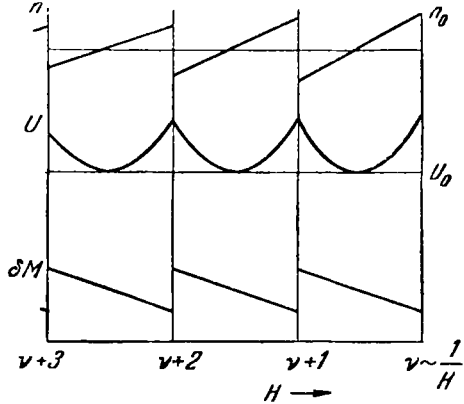


Рис. 11.2. Ход изменения населенности n , энергии U и магнитного момента δM для слоя δk_z по мере возрастания величины магнитного поля.

Последовательные значения λ' обозначены через $\nu + 3, \nu + 2, \nu + 1, \nu, \dots$. Горизонтальная шкала линейна относительно $1/H$, и, следовательно, при перемещении вправо значения $1/H$ убывают.

$$\mu \equiv \frac{e}{2mc}. \quad (11.25)$$

Итак, при $\epsilon'_F \equiv \epsilon_F - k_z^2/2m$ получим для изменения энергии

$$\delta U = U - U_0 = \frac{\mu}{\xi} (n^2 - n_0^2) + (n_0 - n) \epsilon'_F. \quad (11.26)$$

Далее, поскольку

$$\epsilon'_F = \frac{n_0}{\xi H} \omega_c = \frac{2\mu n_0}{\xi},$$

то

$$\delta U = \frac{\mu}{\xi} (n - n_0)^2. \quad (11.27)$$

Эта величина, очевидно, всегда положительна.

При абсолютном нуле намагниченность слоя равна

$$\delta M = - \frac{\partial U}{\partial H} = - \frac{2\mu}{\xi} (n - n_0) \frac{dn}{dH}. \quad (11.28)$$

Согласно (10.21) и (10.22) мы можем написать

$$\frac{dn}{dH} = (\lambda' + 1) \xi \approx \varepsilon'_F \frac{\xi}{\omega_c} = \varepsilon'_F \frac{\xi}{2\mu H}. \quad (11.29)$$

и, следовательно,

$$\delta M \approx -\frac{\varepsilon_F}{H} (n - n_0). \quad (11.30)$$

Мы показали, что по мере возрастания H величина $n - n_0$ циклически изменяется с экстремумами $\pm \frac{1}{2} \xi H$, когда населенность уровня λ' изменяется от ξH до 0. Намагниченность изменяется в пределах $\mp \frac{1}{2} \xi \varepsilon'_F$. Такие циклические изменения намагниченности, т. е. периодическая зависимость последней от $1/H$, и называются эффектом де Гааза — Ван Альфена. Период по $1/H$ равен, как мы видели выше, отношению $e/mc\varepsilon'_F$.

Чтобы определить зависимость от H полной намагниченности, следует просуммировать вклады от слоев при всех k_z . Для каждого слоя величины δn и ε'_F различны. Разложим δM в ряд Фурье, т. е. напомним

$$\delta M = \delta k_z \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin px, \quad x = \frac{\pi \varepsilon'_F}{\mu H}. \quad (11.31)$$

Далее, для интервала $-\pi < x < \pi$ получим, используя соотношение (6.810) из сборника формул Смитсоновского института

$$\delta M = -\frac{1}{2\pi} \xi \varepsilon'_F x = \frac{1}{\pi} \xi \varepsilon'_F \sum_p (-1)^p \frac{\sin px}{p}. \quad (11.32)$$

Отсюда следует, что

$$A_p = \frac{1}{p\pi} \varepsilon'_F (-1)^p \frac{\xi}{\delta k_z} = (-1)^p \frac{e\varepsilon'_F}{4\pi^3 pc}. \quad (11.33)$$

Теперь, выполняя суммирование по всем k_z , получим

$$M = \frac{e^2}{4\pi^3 c} \sum_p \frac{(-1)^p}{p} \int_{-k_F}^{k_F} dk_z \varepsilon'_F \sin \left[\frac{p\pi}{\mu H} \left(\varepsilon_F - \frac{1}{2m} k_z^2 \right) \right]. \quad (11.34)$$

В металлах и полуметаллах обычно $\mu H \ll \varepsilon_F$, и подынтегральное выражение как функция k_z осциллирует очень быстро всюду, за исключением области очень малых k_z . Поэтому в подынтегральном выражении можно заменить ε'_F на ε_F ; далее, воспользовавшись тригонометрической формулой для синуса раз-

ности двух углов, мы приходим к интегралам Френеля. Значение интеграла в (11.34) с большой точностью аппроксимируется выражением

$$\epsilon_F \left(\frac{m\mu H}{p} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{p\pi\epsilon_F}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (11.35)$$

где мы использовали соотношение

$$\int_0^{\infty} dx \cos \frac{\pi}{2} x^2 = \int_0^{\infty} dx \sin \frac{\pi}{2} x^2 = \frac{1}{2}. \quad (11.36)$$

Тогда для M получим

$$M = \frac{\epsilon_F e m^{1/2} (\mu H)^{1/2}}{4\pi^3 c} \sum_p \frac{(-1)^p}{p^{3/2}} \sin \left(\frac{p\pi\epsilon_F}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (11.37)$$

Важно отметить, что полученный результат относится только к стационарному сечению поверхности Ферми; в рассматриваемом примере это сечение отвечает $k_z = 0$. Здесь, как и во многих других проблемах, связанных с поверхностью Ферми, мы имеем дело со свойствами того сечения поверхности Ферми, для которого подынтегральное выражение в (11.34) стационарно, т. е. с поверхностью, для которой $(\partial S / \partial k)_{k=k_H} = 0$. Здесь S — площадь сечения поверхности при $k = k_H = \text{const}$, где k_H — проекция вектора k на направление магнитного поля. Следовательно, измерения эффекта де Гааза — Ван Альфена обычно относятся к характеристикам только стационарных сечений поверхности Ферми. Для заданной ориентации магнитного поля по отношению к кристаллографическим осям возможно не одно, а несколько стационарных сечений поверхности. При абсолютном нуле в какое-то сечение могут входить либо все заполненные, либо все пустые уровни.

По мере возрастания температуры (от абсолютного нуля) орбитальные уровни вблизи уровня Ферми могут стать частично заселенными, а не целиком заполненными или совершенно пустыми. При повышении температуры распределение электронов по уровням стремится сгладить осцилляции магнитного момента. Параметром, характеризующим этот процесс, служит отношение $k_B T$ к магнитному расщеплению ω_c . Точнее его определяют путем полного анализа выражения, которое получится, если мы учтем, что p -й член в сумме (11.37) умножается на величину

$$L_p = \frac{x_p}{\text{sh } x_p}, \quad (11.38)$$

где $x_p = 2\pi^2 p k_B T / \omega_c$. При $H = 10^5$ э и величине ω_c , соответствующей массе свободного электрона, множитель L_1 примерно равен 0,71 (при 1° К); для последующих значений $p > 1$ получим $L_2 \approx 0,30$; $L_3 \approx 0,10$; $L_4 \approx 0,03$. Таким образом, при конечной температуре осцилляции будут носить синусоидальный, а не пилообразный характер. Во всяком случае ясно, что наблюдение эффекта де Гааза — Ван Альфена возможно только при низких температурах; при 4° К и описанных выше условиях получим $L_1 = 0,03$. Необходимо также иметь весьма чистые образцы, чтобы рассеяние на примесях не маскировало квантования. Если мы захотим хотя бы приблизительно, на простой модели, учесть этот эффект, введя частоту релаксации $1/\tau$, то величину $k_B T$ в (11.38) надо заменить на $k_B T + (1/\pi\tau)$.

Для поверхности Ферми в общем случае период осцилляций в эффекте де Гааза — Ван Альфена можно выразить через площадь S (в k -пространстве) стационарного сечения поверхности Ферми, нормального к направлению магнитного поля. Воспользовавшись общими условиями квантования (см. ниже (11.61)), мы увидим, что в (11.37) следует произвести замену

$$\frac{p\pi e_F}{\mu H} \rightarrow \frac{p c S}{e H} \quad (11.39)$$

(на фазу мы здесь не обращаем внимания). Этот результат справедлив даже для поверхностей Ферми с неквадратичной зависимостью от k . Для свободных электронов на экстремальных сечениях поверхности получим

$$S = \pi k_F^2 = 2\pi m e_F. \quad (11.40)$$

Изучение эффекта де Гааза — Ван Альфена служит мощным методом исследования поверхности Ферми. В последние годы фронт экспериментальных исследований значительно расширился: был изучен ряд щелочных и благородных металлов, а также металлы переходных групп. В первых работах исследовались большей частью полуметаллы, т. е. вещества, у которых зоны Бриллюэна имеют вид небольших «карманов», поскольку в этом случае значения e_F или S невелики и экспериментальное определение их зависимости от T и H не представляет особого труда.

Диамagnetизм Ландау. Изменение энергии δU в слое δk_z в магнитном поле дается выражением (11.27). Если усреднить δU по циклу изменений в интервале между экстремальными значениями $n - n_0 = \pm \frac{1}{2} \xi H$, то из (11.27) получим

$$\langle \delta U \rangle = \frac{1}{3} \frac{\mu}{\xi} \left(\frac{1}{2} \xi H \right)^2 = \frac{1}{12} \xi \mu H^2. \quad (11.41)$$

Далее имеем

$$\langle \delta M \rangle = - \frac{d \langle \delta U \rangle}{dH} = - \frac{1}{6} \xi \mu H \quad (11.42)$$

и

$$\delta \chi = \frac{\langle \delta M \rangle}{H} = - \frac{1}{6} \xi \mu = - \frac{e \mu}{24 \pi^2 c} \delta k_z. \quad (11.43)$$

Для всей поверхности Ферми средняя диамагнитная восприимчивость запишется в виде

$$\chi = - \frac{e \mu}{24 \pi^2 c} (2k_F) = - \frac{\mu^2 m}{6 \pi^2} k_F = - \frac{\mu^2 m}{6 \pi^2} (2m \epsilon_F)^{1/2}. \quad (11.44)$$

Полная концентрация электронов (с учетом *обеих* ориентаций спина) определяется соотношением $3\pi^2 n = (2m \epsilon_F)^{3/2}$, и поэтому, умножая (11.44) на 2, получим окончательно

$$\boxed{\chi = - \frac{n \mu^2}{2 \epsilon_F}}. \quad (11.45)$$

Этот результат для диамагнитной восприимчивости электронного газа известен под названием диамагнетизма Ландау. Заметим, что величина n теперь относится ко всему ферми-фону; ранее n относилась лишь к слою δk_z .

Полуклассическое рассмотрение динамики электрона в магнитном поле ¹⁾

Если форма поверхности Ферми не зависит от магнитного поля \mathbf{H} , то, исходя из результатов гл. 9, следует считать, что это справедливо для всех точек \mathbf{k} -пространства, за исключением некоторых, и поэтому движение электрона в магнитном поле можно описывать уравнением

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (11.46)$$

где в правой части стоит известное выражение для силы Лоренца. Таким образом, в \mathbf{k} -пространстве электрон движется в плоскости, перпендикулярной к направлению поля \mathbf{H} . Ранее мы получили также, что

$$\mathbf{v}_k = \text{grad}_k \epsilon(\mathbf{k}), \quad (11.47)$$

где $\epsilon(\mathbf{k})$ — энергия, вычисленная для случая отсутствия магнитного поля; следовательно, направление скорости электрона всегда совпадает с нормалью к поверхности постоянной энергии

¹⁾ См. [1, 5].

(рис. 11.3). Действие силы Лоренца таково, что волновой вектор \mathbf{k} изменяется только вдоль кривой на поверхности постоянной энергии, образуемой при пересечении последней с плоскостью, перпендикулярной к полю \mathbf{H} . Значение k_H (компоненты волнового вектора, параллельной полю \mathbf{H}) постоянно и определяется начальными условиями. Обозначим через \mathbf{K} двумерный волновой вектор в плоскости сечения, а через ρ — векторную проекцию вектора в обычном пространстве на плоскость, перпендикулярную к направлению поля \mathbf{H} . Тогда уравнение (11.46) можно переписать в виде

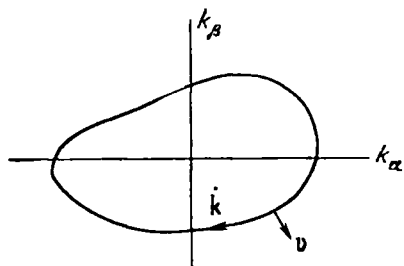


Рис. 11.3. Схема движения электрона в \mathbf{k} -пространстве по орбите постоянной энергии.

Магнитное поле перпендикулярно к плоскости $k_\alpha k_\beta$.

уравнение (11.46) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{e}{c} \dot{\rho} \times \mathbf{H}. \quad (11.48)$$

Иными словами, если электрон описывает орбиту в \mathbf{k} -пространстве, то он описывает аналогичную орбиту и в обычном координатном пространстве. Из уравнения (11.48) видно, что функция $\rho(t)$ получается из функции $\mathbf{K}(t)$ путем умножения $\mathbf{K}(t)$ на c/eH и поворота полученного вектора на $\pi/2$. Преобразование $\mathbf{K} \leftrightarrow \rho$ не зависит от формы энергетической поверхности, и уравнение (11.48) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{e}{c} v_\perp \mathbf{H}, \quad (11.49)$$

где v_\perp — скорость в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{H} .

Частота циклотронного резонанса. Геометрическая интерпретация. Рассмотрим две орбиты в одном и том же плоском сечении \mathbf{K} -пространства; пусть одна орбита соответствует энергии ϵ , а другая — энергии $\epsilon + \delta\epsilon$. Расстояние между этими орбитами в \mathbf{K} -пространстве

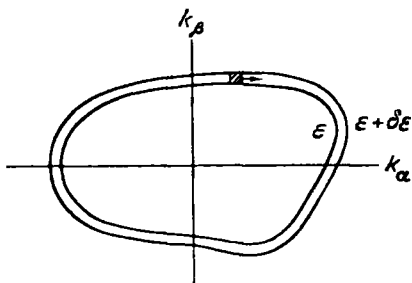


Рис. 11.4. Геометрическая схема, иллюстрирующая вывод выражения для частоты циклотронного резонанса.

$$\delta K = \frac{\delta\epsilon}{|\nabla_{\mathbf{K}}\epsilon|} = \frac{\delta\epsilon}{v_K} = \frac{\delta\epsilon}{\dot{\rho}}. \quad (11.50)$$

Представим себе электрон, движущийся по одной орбите под действием магнитного поля. Быстрота, с которой он, так сказать, обегает площадь между обеими орбитами (рис. 11.4), описывается выражением

$$\dot{K} \delta K = \frac{e}{c} \dot{\rho} H \frac{\delta \varepsilon}{\rho} = \frac{eH}{c} \delta \varepsilon; \quad (11.51)$$

при фиксированном $\delta \varepsilon$ оно равно постоянной величине. Пусть T — период обращения электрона по орбите; тогда величина $T(eH/c)\delta \varepsilon$ равна площади кольца $(dS/d\varepsilon)\delta \varepsilon$, где $S(\varepsilon)$ — площадь орбиты в \mathbf{K} -пространстве, соответствующей энергии ε . Тогда

$$T = \frac{c}{eH} \frac{dS}{d\varepsilon}, \quad (11.52)$$

или для циклотронной частоты получим

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi eH}{c} \frac{1}{(dS/d\varepsilon)} = \frac{eH}{m_c c}. \quad (11.53)$$

Это выражение определяет m_c — эффективную массу электрона, движущегося по орбите с частотой, соответствующей циклотронному резонансу. Итак, соотношение

$$\boxed{m_c = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{d\varepsilon}} \quad (11.54)$$

связывает эффективную массу и циклотронную частоту с геометрией поверхности Ферми. Другое выражение для m_c дается ниже (см. (11.71)).

Квантование орбит. Периодический характер движения дает основания ожидать, что энергетические уровни квантуются так, что орбиты в \mathbf{k} -пространстве различаются по энергии на ω_c . Это можно обосновать, воспользовавшись методом Бора — Зоммерфельда. Мы предполагали, что эффективный гамильтониан при наличии магнитного поля получается из выражения для энергии $\varepsilon(\mathbf{k})$ заменой

$$\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Поэтому можно написать

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint \left(\mathbf{k} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{q} = \oint \frac{e}{c} (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{H} + \mathbf{A}) d\rho, \quad (11.55)$$

где мы воспользовались результатом интегрирования уравнений (11.3), чтобы ввести $\mathbf{k} = (e/c)\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{H}$, игнорируя аддитивную константу, исчезающую при интегрировании. Векторный

потенциал равен A . Итак, получаем

$$\oint \mathbf{p} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{p} = -H \oint \mathbf{p} \times d\mathbf{p} = -2\Phi, \quad (11.56)$$

где Φ — поток через орбиту в обычном пространстве; используя далее теорему Стокса, находим

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{p} = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Phi, \quad (11.57)$$

где $d\boldsymbol{\sigma}$ — элемент поверхности в обычном пространстве. И окончательно

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = -\frac{e}{c} \Phi. \quad (11.58)$$

Условие квантования имеет вид

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 2\pi(\lambda + \gamma), \quad (11.59)$$

где λ — целое число, а γ — фазовый фактор, который для свободного электрона в магнитном поле равен $1/2$. Следовательно, с точностью до знака можем написать

$$\Phi = \frac{2\pi c}{e} (\lambda + \gamma). \quad (11.60)$$

Иначе говоря, различные орбиты отличаются друг от друга на целое число единиц потока, равных $2\pi c/e$, или, в обычных единицах, на hc/e . Этот результат, полученный И. М. Лифшицем, а также Онзагером, на первый взгляд не согласуется с величиной кванта потока $hc/2e$, с которым мы имеем дело в сверхпроводниках; однако следует напомнить, что в сверхпроводниках, в силу условия спаривания, эффективный заряд равен $2e$.

Результат (11.60) можно записать для \mathbf{k} -пространства, умножив его на $(eH/c)^2$; тогда непосредственно для площадей разрешенных орбит получим

$$S = \frac{2\pi e H}{c} (\lambda + \gamma). \quad (11.61)$$

Итак, при рассмотрении эффекта де Гааза — ван Альфена следует заменить квантовое условие (11.20) для частоты условием (11.61) для площади орбиты электрона в \mathbf{k} -пространстве. С точностью до фазы аргумент в каждом осциллирующем члене ряда (11.34) для намагнитченности надо заменить следующим образом:

$$\frac{\pi \mu}{\mu H} \varepsilon_F \rightarrow \frac{\pi c S}{e H} = 2\pi (\lambda + \gamma), \quad (11.62)$$

где S — площадь стационарного сечения поверхности Ферми, нормального к \mathbf{H} . Вводя \hbar в правую часть (11.62), получим pcS/ehH . На стационарном сечении поверхности Ферми $dS/dk_{\mathbf{H}}=0$. Таким образом, из данных измерения эффекта де Гааза — ван Альфена мы можем получить площадь стационарного сечения поверхности Ферми, перпендикулярного к \mathbf{H} . Частота циклотронного резонанса определяет производную dS/de , которая связана со скоростью электронов на поверхности Ферми.

В достаточно сильных магнитных полях описанный полуклассический метод квантования становится непригодным, так как по мере возрастания поля энергетические уровни расширяются и в конце концов сама система уровней становится иной. Простой анализ этого вопроса имеется в работе Пиппарда [4]. Так называемый магнитный пробой происходит, по-видимому, при $\omega_c \gg E_g^2/e_F$, где E_g — ширина энергетической щели между зонами.

Топологические свойства орбит в магнитном поле ¹⁾

Из полученного выше выражения (11.48) следует, что электрон, описывая орбиту в \mathbf{k} -пространстве, описывает также какую-то орбиту в обычном пространстве. Если сечение поверхности постоянной энергии в \mathbf{k} -пространстве ограничено замкнутой кривой, то в обычном пространстве электрон будет описывать спираль. Эта спираль является периодической в том смысле, что каждый ее виток есть повторение предыдущего витка.

Некоторые орбиты в \mathbf{k} -пространстве не образуют замкнутые кривые. Существование открытых орбит на первый взгляд представляется странным. Важно напомнить, что в гл. 9 при рассмотрении функции Блоха было установлено, что энергия является периодической функцией в обратном пространстве; таким образом, поверхности постоянной энергии в каждой зоне распределяются по всему \mathbf{k} -пространству периодически. Эти поверхности не ограничены одной зоной Бриллюэна. Когда электрон встречает границу зоны, он просто переходит в следующую зону.

Рассмотрим несколько различных случаев.

а. Если поверхность Ферми лежит целиком внутри зоны, не пересекая ее границ, то она замкнута и все орбиты в магнитном поле также замкнуты.

б. Если поверхность Ферми состоит из частей, прилегающих к некоторым граням зоны или ее вершинам, то эти части в

¹⁾ См. [6, 7].

сочетании с системой периодически повторяющихся зон, могут образовывать простые замкнутые поверхности. Такие поверхности будут состоять из «кусков» нескольких «ячеек» расширенной зонной схемы. Когда сила Лоренца «приведет» электрон на границу зоны, он проникнет в соседнюю ячейку расширенной зонной схемы.

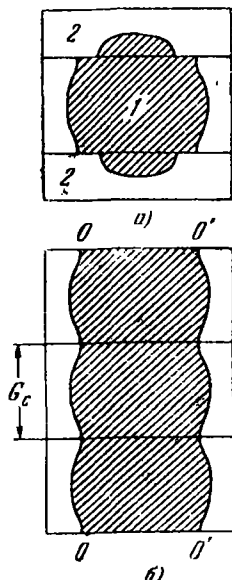


Рис. 11.5. Поверхность Ферми для простой прямоугольной решетки в двух изменениях.

Модель почти свободных электронов; *а* — первая и вторая зоны; *б* — первая зона в расширенной зонной схеме. Открытые орбиты обозначены линиями *00* и *0'0'*.

в. Замкнутые орбиты могут быть либо *электронными*, либо *дырочными*. Электронная орбита соответствует состояниям с низкой энергией; вектор скорости $\mathbf{v} = \text{grad}_k \epsilon$ направлен наружу относительно электронной орбиты. Дырочная орбита соответствует состояниям с высокой энергией; вектор скорости \mathbf{v} направлен внутрь орбиты. Электрон в магнитном поле пересекает дырочную орбиту в направлении, противоположном направлению движения дырки. Следовательно, электрон на дырочной орбите ведет себя так, как если бы он имел положительный заряд. Иногда какая-то точка поверхности Ферми может принадлежать либо электронной, либо дырочной орбите (в зависимости от направления магнитного поля \mathbf{H}).

г. Если поверхность Ферми выходит за границы одной ячейки зонной структуры на ее противоположных гранях или вершинах, то в расширенной зонной схеме поверхность Ферми будет иметь вид многообразной поверхности, непрерывным образом распределяющейся по всему k -пространству. С простейшим примером *открытой орбиты* мы встречаемся в случае двумерной прямоугольной решетки в модели почти свободных электронов, когда поверхность Ферми «заходит» во вторую зону, как показано на рис. 11.5. Для простой кубической решетки возможная поверхность Ферми, содержащая открытые орбиты, показана на рис. 11.6 и 11.7. На рис. 11.8 схематически показаны два типа сечений такой открытой поверхности плоскостями с постоянным значением k_z . В одном сечении лежат электронные орбиты, в другом — дырочные. Заштрихованные области соответствуют занятым состояниям; границей заштрихованных областей служит поверхность Ферми. При каком-то частном значении k_z (лежащем между двумя значениями, для которых

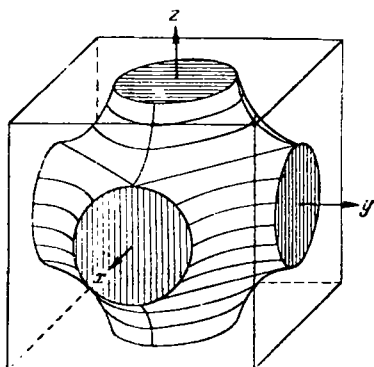


Рис. 11.6. Возможный вид поверхности Ферми для простой кубической решетки (по Зоммерфельду и Бете).

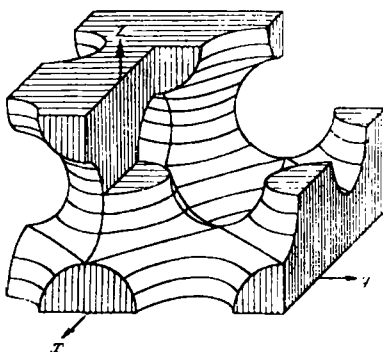


Рис. 11.7. Та же поверхность Ферми, что и на рис. 11.6, но показанная для большей области k-пространства (по Зоммерфельду и Бете).

Незамкнутая (открытая) поверхность Ферми.

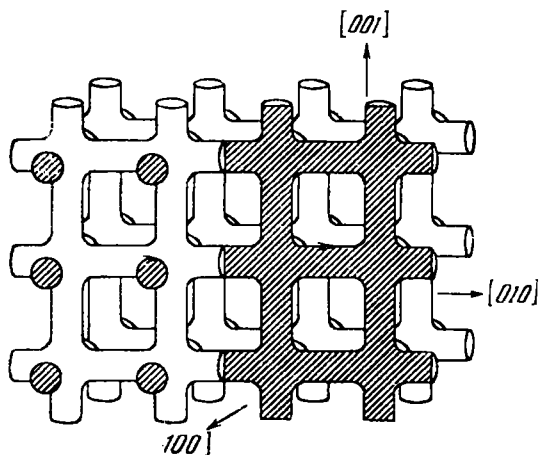


Рис. 11.8. Один из возможных типов незамкнутой (открытой) поверхности Ферми для металла кубической структуры (по Чамберсу).

Показаны два сечения, соответствующие плоскостям с постоянным значением k_z в случае магнитного поля, направленного вдоль оси [100]. Слева — электронные орбиты, справа — дырочные орбиты.

показаны сечения) имеется переход между электронными и дырочными орбитами. Здесь встречаются открытые орбиты, неограниченно продолжающиеся в k -пространстве.

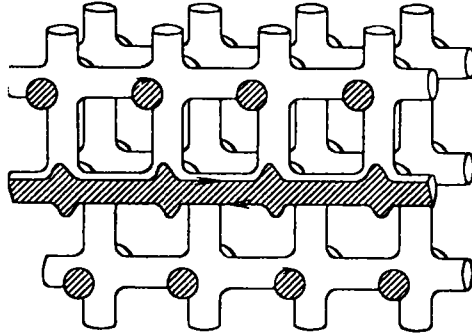


Рис. 11.9. Сечение поверхности Ферми для случая, когда поле H лежит в плоскости (010) (по Чамберсу).

Показана пара периодических открытых орбит (по краям средней заштрихованной полосы). На круговых заштрихованных сечениях (верхний и нижний ряды) показаны замкнутые электронные орбиты.

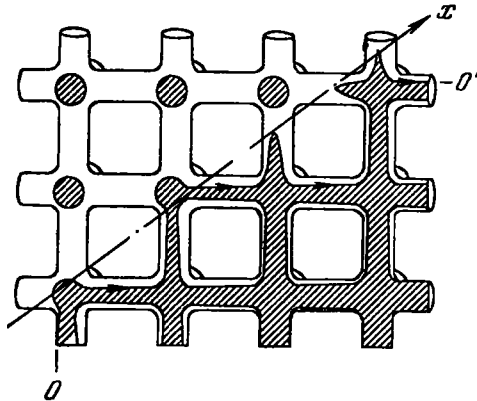


Рис. 11.10. Поверхность Ферми для того же случая, что и на рис. 11.9, но поле H слегка отклонено в любую сторону от направления $[100]$ (по Чамберсу).

Область электронных орбит (слева сверху) и область дырочных орбит (справа внизу) отделяются друг от друга аперiodической открытой орбитой OO' . Направление открытой орбиты принято за ось x .

д. Представление об открытых орбитах становится более ясным, если слегка наклонить поле H в плоскости $k_x k_z$

(рис. 11.9). В этом случае между замкнутыми электронными орбитами имеются открытые орбиты. Для таких орбит $dS/de \rightarrow \infty$, где S — площадь орбиты. Согласно (11.53) и (11.54) циклотронная частота ω_c стремится к нулю, а эффективная циклотронная масса m_c — к бесконечности. Открытые орбиты такого рода существуют в некотором интервале значений k_H , больших и меньших k , соответствующего показанному

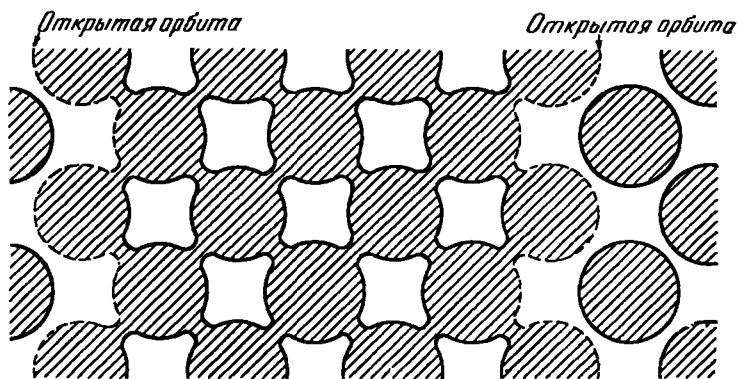


Рис. 11.11. Периодические открытые орбиты (по Пиппарду).

Сечение расширенной зонной схемы для кристалла гранецентрированной кубической структуры; поле H слегка отклонено от оси z в плоскости уз.

сечению. Открытые орбиты существуют также, когда направление поля несколько отклонено от нормали к главной плоскости в любую сторону (рис. 11.10).

е. Рис. 11.11 иллюстрирует тот же случай, что и рис. 11.9, но для кристалла с гранецентрированной кубической решеткой. Поскольку поле H лежит в плоскости наибольшей симметрии, последовательные элементы открытой орбиты периодически повторяются. Такие орбиты называют *периодическими открытыми орбитами*. В последовательности периодических открытых орбит электроны проходят соседние орбиты в противоположных направлениях.

ж. Рис. 11.12 иллюстрирует тот же случай, что и рис. 11.10, но для кристалла с гранецентрированной кубической решеткой в обычном пространстве. Форма открытых орбит, вообще говоря, не повторяется точно при движении электрона. Такие орбиты называются *аперриодическими открытыми орбитами*.

з. *Растянутая орбита* — это замкнутая орбита, которая не помещается в одной ячейке, однако ее центр фиксирован и совпадает с «центром» зоны Бриллюэна.

Большое значение открытых орбит состоит в том, что они играют роль двумерных проводников; они несут ток только в плоскости, определяемой направлением магнитного поля и

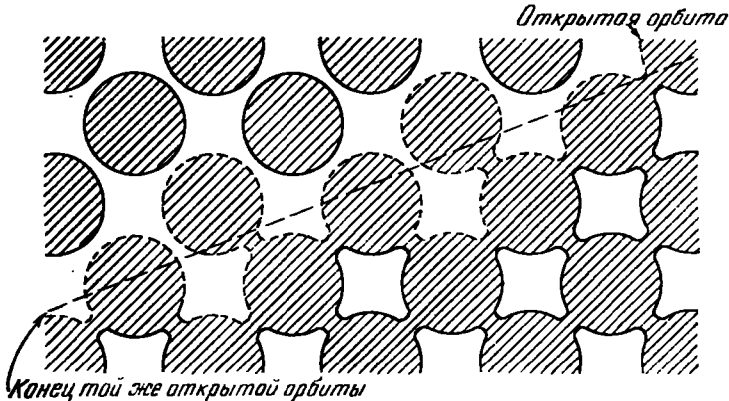


Рис. 11.12. Аперриодические открытые орбиты (по Пиппарду).

общим направлением орбиты. Наличие открытых орбит оказывает сильное влияние на магнетосопротивление; это мы увидим в следующей главе.

Циклотронный резонанс на сфероидальных энергетических поверхностях

Близость границ зон проводимости как в германии, так и в кремнии связана с тем, что в этих кристаллах системы сфероидальных энергетических поверхностей располагаются в k -пространстве в эквивалентных положениях. Сейчас мы рассмотрим полуклассическую теорию циклотронного резонанса для поверхности такого характера, пренебрегая наличием спина у электрона и спин-орбитальным взаимодействием. Эффекты, связанные с учетом этих факторов, рассматриваются в гл. 14.

Составим гамильтониан по рецепту

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \rightarrow H\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right), \quad (11.63)$$

где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — энергия в отсутствие магнитного поля, т. е.

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2m_t} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{1}{2m_l} k_z^2. \quad (11.64)$$

Здесь m_t — поперечная эффективная масса, т. е. эффективная масса при движении в плоскости xy , а m_l — продольная эффек-

тивная масса, т. е. эффективная масса при движении параллельно оси z (или оси фигуры). Векторный потенциал \mathbf{A} с компонентами

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = H(x \cos \theta + z \sin \theta) \quad (11.65)$$

описывает однородное магнитное поле, лежащее в плоскости xz под углом θ к оси z . Тогда реализация замены (11.63) дает следующий результат:

$$H = \frac{1}{2m_t} p_x^2 + \frac{1}{2m_t} \left[p_y - \frac{e}{c} H(x \cos \theta + z \sin \theta) \right]^2 + \frac{1}{2m_t} p_z^2. \quad (11.66)$$

Теперь, имея в виду, что

$$\omega_t = -\frac{eH}{m_t c}, \quad \omega_l = -\frac{eH}{m_l c}.$$

запишем уравнения движения для импульсов в виде

$$\left. \begin{aligned} i\dot{p}_x &= [p_x, H] = -i\omega_t(x \cos \theta + z \sin \theta) \cos \theta, \\ i\dot{p}_y &= 0, \quad i\dot{p}_z = -i\omega_t(x \cos \theta + z \sin \theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.67)$$

Далее получим

$$\left. \begin{aligned} -\ddot{p}_x &= (\omega_t^2 \cos^2 \theta) p_x + (\omega_t \omega_l \sin \theta \cos \theta) p_z, \\ -\ddot{p}_z &= (\omega_t^2 \sin \theta \cos \theta) p_x + (\omega_t \omega_l \sin^2 \theta) p_z. \end{aligned} \right\} \quad (11.68)$$

Если зависимость импульса от времени описывается законом $\exp(-i\omega t)$, то наша система уравнений имеет решение при условии

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_t^2 \cos^2 \theta & -\omega_t \omega_l \sin \theta \cos \theta \\ -\omega_t^2 \sin \theta \cos \theta & \omega^2 - \omega_t \omega_l \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0, \quad (11.69)$$

или

$$\omega^2 = \omega_t^2 \cos^2 \theta + \omega_t \omega_l \sin^2 \theta. \quad (11.70)$$

Кроме того, имеются корни при $\omega = 0$, соответствующие движению, аналогичному движению параллельно полю. Из уравнения (11.70) мы видим, что эффективная масса m_e , определяющая циклотронную частоту, дается выражением

$$\left(\frac{1}{m_e} \right)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_l m_t}. \quad (11.71)$$

Циклотронный резонанс в металлах рассматривается в гл. 16.

ЗАДАЧИ

11.1 Составить и решить квантовые уравнения движения для свободной частицы в однородном магнитном поле, используя калибровку

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2} H_y; \frac{1}{2} H_x; 0 \right).$$

11.2. Для случая магнитного поля \mathbf{H} , параллельного оси x сфероидальной поверхности энергии (11.64), оценить площадь S орбиты в \mathbf{k} -пространстве и вычислить m_c . Сравнить найденный результат для m_c с соответствующей величиной, определенной выражением (11.71).

11.3. Показать, что на энергетической поверхности период обращения электрона при движении в магнитном поле описывается выражением

$$T = \frac{c}{eH} \oint \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (11.72)$$

Здесь dl — элемент длины в \mathbf{k} -пространстве. Показать, что площадь энергетической поверхности можно записать в виде

$$S(\epsilon, p_z) = \iint dp_x dp_y = \int d\epsilon \oint \frac{dl}{v_{\perp}}, \quad (11.73)$$

и, следовательно, в соответствии с (11.52),

$$T = \frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}. \quad (11.74)$$

11.3. Показать, что на энергетической поверхности период обращения

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \sum_i \mathbf{p}_i^2 + \sum_{ij} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad (11.75)$$

где $\mathbf{P}_i = \mathbf{p}_i - (e/c)\mathbf{A}$ (векторный потенциал \mathbf{A} соответствует однородному магнитному полю \mathbf{H}). Пусть $\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i$; показать, что

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{e}{mc} \mathbf{P} \times \mathbf{H}. \quad (11.76)$$

Показать далее, что если Ψ_0 — собственная функция, а E_0 — собственная энергия оператора \mathbf{H} , то $(P_x + iP_y)\Psi_0 = \Psi_1$ есть точная собственная функция системы многих тел с энергией $E_1 = E_0 + \omega_c$, где ω_c — циклотронная энергия.

11.5. Показать, что

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = -\frac{i e \mathbf{H}}{c}. \quad (11.77)$$

Литература

1. Pippard A. B., в сб. «Low Temperature Physics», N. Y., 1962.
2. Shoenberg D., в сб. «Progress in Low Temperature Physics», vol. 2, Amsterdam, 1957, p. 226.
3. Kahn A. H., Frederiks H. P. R., в сб. «Solid State Physics», ed. by F. Seitz, D. Turnbull, vol. 9, N. Y., 1959, p. 257.
4. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc. A270, 1 (1962).
5. Onsager L., Phil. Mag. 43, 1006 (1952).
6. Лифшиц И. М., Каганов М. И., УФН 69, 419 (1959).
7. Chambers R. G., в сб. «The Fermi Surface», N. Y., 1960.