

## Магнетосопротивление

В настоящей главе мы рассмотрим одно важное явление, связанное с процессами переноса, а именно изменение электропроводности металлов в магнитном поле. В последние годы в результате больших усилий физиков-теоретиков удалось значительно продвинуться в направлении получения улучшенных решений ряда задач, связанных с процессами переноса в газах, плазме и металлах. Среди основополагающих работ по созданию квантовой теории процессов переноса заряда в металлах следует специально указать статьи Латтинджера и Кона [1] и И. М. Лифшица [2]. Классическая теория магнетосопротивления довольно полно изложена в книгах Вильсона [3] и Займана [4]. Ниже, в гл. 16 и 17, мы рассмотрим ряд интересных и довольно сложных проблем, пользуясь классическими методами. Поразительные особенности наблюдаемых явлений, связанных с зависимостью электропроводности от магнитного поля в твердых телах, можно, однако, качественно объяснить, применяя относительно простые методы. Анализ экспериментальных данных опирается непосредственно на форму и связность поверхности Ферми.

Явление магнетосопротивления состоит, в сущности, в возрастании электрического сопротивления металла (или полупроводника) при помещении его в магнитное поле. Наибольший интерес представляет поперечное магнетосопротивление. Его изучают обычно при следующем геометрическом расположении элементов. Длинную тонкую проволоку (ее направление принимается за ось  $x$ ) помещают в постоянное электрическое поле, приложенное в направлении ее длины, т. е. в поле  $E_x$ ; это поле создается включением проволоки в цепь, содержащую внешний источник э. д. с. Однородное магнитное поле  $H_z$  прилагается вдоль оси  $z$ , т. е. перпендикулярно к оси проволоки. Наиболее интересные результаты получаются, если эксперимент проводится при низких температурах на очень чистых образцах и в сильных магнитных полях, поскольку в этом случае произведе-

ние  $|\omega_c|\tau$ , т. е. произведение циклотронной частоты, на время релаксации может оказаться значительно больше единицы ( $|\omega_c|\tau \gg 1$ ). При этих условиях детали процессов столкновений подавляются, а тонкие особенности поверхности Ферми сказываются на явлении заметным образом.

В описанной геометрии, которую мы далее будем называть *стандартной геометрией*, влияние слабого магнитного поля ( $|\omega_c|\tau \ll 1$ ) приводит к возрастанию сопротивления; в выражении для сопротивления появляется аддитивный член, пропорциональный  $H^2$ . Этот аддитивный член может равняться по порядку величины  $(\omega_c\tau)^2$ , т. е.

$$\frac{R(H) - R(0)}{R(0)} \approx (\omega_c\tau)^2. \quad (12.1)$$

Из соображений размерности нельзя ожидать ничего другого, учитывая еще, что аддитивный член не может быть линейным по  $H$  в силу очевидной симметрии задачи по отношению к знаку магнитного поля. Заметим (см. [5]), что для меди при комнатной температуре время релаксации равно примерно  $2 \cdot 10^{-14}$  сек; полагая  $m^* = m$  и считая, что поле  $H = 30$  кэ, мы получим  $|\omega_c| \approx 8 \cdot 10^{11}$  сек $^{-1}$  и, следовательно,  $|\omega_c\tau| \approx 0,02$ . При  $4^\circ$  К проводимость кристалла меди высокой чистоты может оказаться по крайней мере в  $10^3$  раз выше, чем при комнатной температуре; тогда  $\tau$  также возрастает в  $10^3$  раз и в том же магнитном поле произведение  $|\omega_c|\tau$  станет равным примерно 20.

В очень сильных полях, т. е. при  $|\omega_c|\tau \gg 1$ , поперечное магнетосопротивление кристалла может вести себя, вообще говоря, самым различным образом. Возможен один из трех следующих случаев.

а. Сопротивление может достигнуть насыщения, т. е. может стать не зависящим от  $H$ , причем сопротивление при насыщении может оказаться в несколько раз больше, чем в нулевом поле. Насыщение возникает при любой ориентации кристаллических осей относительно направления измерений.

б. Сопротивление может продолжать расти вплоть до самых сильных из применявшихся в опытах полей при всех ориентациях кристалла.

в. В некоторых направлениях кристалла сопротивление может достигать насыщения, но не обнаруживает его в других, часто очень близких направлениях. Такое поведение называют необыкновенной анизотропией сопротивления в магнитном поле; рис. 12.1 иллюстрирует это явление на примере Au.

Известны кристаллы всех трех указанных категорий. Мы увидим, что первая категория объединяет кристаллы с *замкнутыми* поверхностями Ферми, например In, Al, Na и Li. Ко вто-

рой категории относятся кристаллы с одинаковым числом электронов и дырок, такие, как Bi, Sb, W и Mo. В третью категорию входят кристаллы с поверхностями Ферми, содержащими *открытые орбиты* для некоторых направлений магнитного поля; к этой последней категории относятся Cu, Ag, Au, Mg, Zn, Cd, Ga, Tl, Sn, Pb и Pt. Роль магнетосопротивления как физического эффекта состоит в том, что его исследование позволяет нам определить характер поверхности Ферми — является ли она замкнутой или содержит открытые орбиты — и установить, в каких направлениях лежат открытые орбиты. Кстати, существуют такие геометрические ситуации, в которых открытая поверхность Ферми не содержит открытых орбит.

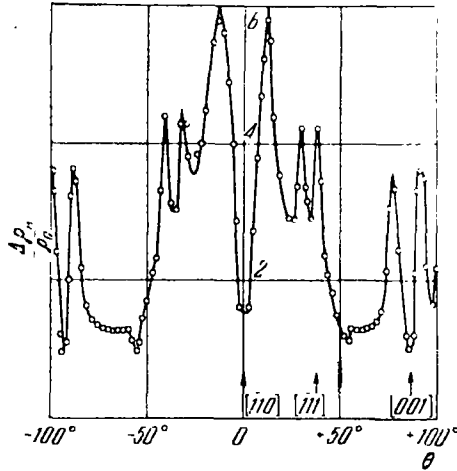


Рис. 12.1. Изменения поперечного магнетосопротивления при изменении направления постоянного магнитного поля напряженностью 23 500 эс (по Гайдукову, 1959).

Измерения проводились на монокристаллическом образце золота при токе, пропускаемом в направлении [110].

Много интересных особенностей металлов можно объяснить, используя представление о дрейфовой скорости или простые его обобщения. Сначала мы изложим именно этот подход в качестве введения к более детальному рассмотрению теории явлений переноса. Дрейфовая скорость  $v$  определяется как средняя скорость носителей, т. е. как

$$v = \frac{1}{N} \sum_i v_i. \tag{12.2}$$

*Изотропная эффективная масса носителей одного типа и время релаксации.* Уравнение движения для дрейфовой скорости газа, состоящего из носителей заряда с изотропной эффективной массой  $m^*$ , имеет вид (см. [5], гл. 10)

$$m^* \left( \dot{v} + \frac{1}{\tau} v \right) = e \left( E + \frac{1}{c} v \times H \right), \tag{12.3}$$

где  $\tau$  — время релаксации носителей заряда.

Время релаксации связано со средней длиной свободного пробега  $\Lambda$  приближенным соотношением  $\Lambda \approx |v_i| \tau$ , где  $|v_i|$  —

среднее значение скорости частиц. Пусть магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено по оси  $z$ . В стационарном состоянии  $\dot{\mathbf{v}}=0$ , и поэтому

$$\mathbf{v} = \frac{e\tau}{m^*} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (12.4)$$

Если ввести обозначения

$$\mu \equiv \frac{e\tau}{m^*}, \quad \xi \equiv \mu H = \frac{eH}{m^*c} = -\omega_c \tau, \quad (12.5)$$

то (12.4) примет вид

$$v_x = \mu E_x + \xi v_y, \quad v_y = \mu E_y - \xi v_x, \quad v_z = \mu E_z. \quad (12.6)$$

Решая эту систему относительно  $v_x$  и  $v_y$ , получим

$$v_x = \mu E_x + \mu \xi E_y - \xi^2 v_x, \quad v_y = \mu E_y - \mu \xi E_x - \xi^2 v_y, \quad (12.7)$$

или

$$v_x = \frac{\mu}{1 + \xi^2} (E_x + \xi E_y), \quad v_y = \frac{\mu}{1 + \xi^2} (E_y - \xi E_x). \quad (12.8)$$

Компоненты плотности тока  $j_\lambda$  получаются из выражений для компонент скорости  $v_\lambda$  просто умножением на  $ne$ , где  $n$  — концентрация носителей. Компоненты тензора проводимости  $\sigma_{\lambda\nu}$  определяются соотношениями

$$j_\lambda = \sigma_{\lambda\nu} E_\nu. \quad (12.9)$$

Отсюда для случая  $H \parallel \hat{z}$  имеем

$$\bar{\sigma} = \frac{ne\mu}{1 + \xi^2} \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 \\ -\xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \xi^2 \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

Компоненты  $\sigma_{\lambda\nu}$  удовлетворяют условию

$$\sigma_{\lambda\nu}(H) = \sigma_{\nu\lambda}(-H), \quad (12.11)$$

которое является общим теоретическим следствием термодинамики необратимых процессов.

В нашей стандартной геометрии граничные условия допускают наличие тока только вдоль оси  $x$ , и поэтому

$$j_y = j_z = 0. \quad (12.12)$$

Из (12.8) вытекает, что граничные условия удовлетворяются лишь в том случае, если

$$E_y = \xi E_x, \quad E_z = 0. \quad (12.13)$$

Поле  $E_y$  называется полем Холла. Из (12.10) и (12.13) следует, что

$$j_x = \frac{ne\mu}{1 + \xi^2} (E_x + \xi E_y) = ne\mu E_x. \quad (12.14)$$

Итак, в данной геометрии *эффективная* проводимость в направлении оси  $x$ , вычисленная для используемой нами модели, не зависит от магнитного поля, направленного вдоль оси  $z$ , хотя компоненты тензора проводимости (12.10) зависят от него. Иначе говоря, для нашей модели поперечное магнетосопротивление равно нулю.

Тензор сопротивления  $\bar{\rho}$  равен обратной величине тензора проводимости и, следовательно,  $E_\lambda = \rho_{\lambda\nu} j_\nu$ . Компоненты тензора  $\rho_{\lambda\nu}$  определяются отношениями

$$\rho_{\lambda\nu} = \frac{\Delta_{\lambda\nu}}{\Delta}, \quad (12.15)$$

где  $\Delta$  — детерминант  $\bar{\sigma}$ , а  $\Delta_{\lambda\nu}$  — его  $\lambda\nu$ -й минор; для  $\Delta$  имеем

$$\Delta = \frac{(ne\mu)^3}{1 + \xi^2}. \quad (12.16)$$

Таким образом, если  $\bar{\sigma}$  имеет вид (12.10), то тензор сопротивления принимает вид

$$\bar{\rho} = \frac{1}{ne\mu} \begin{pmatrix} 1 & -\xi & 0 \\ \xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.17)$$

Это определение согласуется с выражениями (12.6), из которых легче всего найти  $\bar{\rho}$ . Для случая стандартной геометрии и  $j_y = 0$  получим из (12.17)

$$E_x = \frac{1}{ne\mu} j_x, \quad E_y = \frac{\xi}{ne\mu} j_x = \frac{H_z}{nec} = \xi E_x, \quad (12.18)$$

что согласуется с (12.13) и (12.14).

Отсутствие магнетосопротивления в данной модели при стандартной геометрии объясняется наличием электрического поля Холла  $E_y$ , действие которого компенсирует действие силы Лоренца (т. е. магнитного поля). Такая компенсация может сохраняться только в том случае, если магнетосопротивление действительно зависит только от одной кинематической величины  $v$ , входящей в уравнения движения. Однако обычно время релаксации зависит от скоростей  $v_i$  отдельных носителей, и поэтому нельзя ожидать, что движение носителей удастся описать, используя лишь одну дрейфовую скорость. Тогда эффект компенсации уже не наступит. Экспериментально установлено, что

поперечное магнетосопротивление существует всегда или почти всегда. Для улучшения теории в модель с дрейфовой скоростью надо внести простое, но важное изменение, а именно — еще один тип носителей заряда. При наличии двух типов носителей одно и то же электрическое поле Холла уже не может одновременно выпрямлять орбиты тех и других. Указанное изменение модели отражает практически важные случаи, поскольку носителями этих двух типов могут служить электроны и дырки,  $s$ -электроны,  $d$ -электроны, открытые орбиты и замкнутые орбиты и т. п.

*Модель с двумя типами носителей; предельный случай сильных полей.* Рассмотрение задачи о носителях двух типов в предельном случае сильного поля имеет особое значение. По аналогии с (12.4) для любого поля можно записать уравнения для дрейфовой скорости в стационарном случае в виде

$$\mathbf{v}_1 = \frac{e\tau_1}{m_1^*} \mathbf{E} + \frac{e\tau_1}{m_1^*c} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}, \quad (12.19)$$

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{e\tau_2}{m_2^*} \mathbf{E} - \frac{e\tau_2}{m_2^*c} \mathbf{v}_2 \times \mathbf{H}, \quad (12.20)$$

где индекс 1 относится к носителям первого типа, которые мы считаем электронами с эффективной массой  $m_1^*$ , временем релаксации  $\tau_1$  и концентрацией  $n_1$ , а индекс 2 — к носителям второго типа — дыркам. Теперь рассмотрим поля, для которых выполняются условия  $|\omega_{c1}|\tau_1 \gg 1$ ,  $|\omega_{c2}|\tau_2 \gg 1$ . Тогда величинами  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  в левых частях уравнений (12.19) и (12.20) можно пренебречь и  $x$ -компоненты этих уравнений примут вид

$$E_x + \frac{H}{c} v_{1y} = 0, \quad E_x + \frac{H}{c} v_{2y} = 0. \quad (12.21)$$

Отсюда получим

$$j_y \equiv n_1 e v_{1y} - n_2 e v_{2y} = \frac{(n_2 - n_1) e c}{H} E_x, \quad (12.22)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{yx} = (n_2 - n_1) e c \frac{1}{H}. \quad (12.23)$$

Этот результат чрезвычайно важен, так как он показывает, что при равном количестве электронов и дырок  $\sigma_{yx} = 0$ . Однако если  $\sigma_{yx} = 0$ , то поле Холла  $E_y$  отсутствует, причем  $j_y$ , равное нулю, никак не влияет на величину  $E_y$ . Если  $E_y = 0$ , то эффективное сопротивление становится равным просто  $1/\sigma_{xx}$ , где  $\sigma_{xx}$  определяется при помощи (12.10) и в рассматриваемом предельном

случае имеет вид

$$\sigma_{xx} \approx \frac{n|e|}{H^2} \left( \frac{1}{|\mu_1|} + \frac{1}{|\mu_2|} \right), \quad (12.24)$$

где  $n = n_1 = n_2$ . Таким образом, при равном числе электронов и дырок не может наступить насыщения поперечного магнетосопротивления.

У двухвалентных металлов, у которых на элементарную ячейку приходится один атом (а на каждый атом — по два валентных электрона), число электронов обязательно равно числу

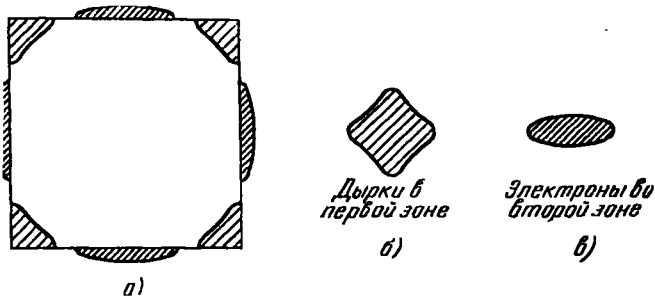


Рис. 12.2. Поверхность Ферми и орбиты.

*a* — двумерная поверхность Ферми; площадь заштрихованных одним способом областей равна площади одной зоны Бриллюэна; *б* — дырочная орбита в «собранном» виде; *в* — одноэлектронная орбита в «собранном» виде.

дырок ( $n_- = n_+$ ) при условии, что открытые орбиты отсутствуют. В  $k$ -пространстве в каждой зоне Бриллюэна имеется одна точка для каждой примитивной ячейки кристалла. Равенство концентраций электронов и дырок может иметь место также и в металлах с нечетной валентностью, если примитивная ячейка содержит четное число атомов. Было экспериментально установлено, что при этих условиях поперечное магнетосопротивление не достигает насыщения. Топологию поверхности Ферми при равном числе электронов и дырок легко уяснить из рассмотрения случая двух измерений, иллюстрируемого, например, рис. 12.2, где поверхность Ферми состоит из частей, принадлежащих двум зонам, но вся заштрихованная одним способом площадь как раз равна площади одной зоны.

Результат (12.23) справедлив также для произвольной поверхности Ферми, по крайней мере в полуклассическом приближении, изложенном в предыдущей главе, посвященной динамике электронов в магнитном поле. Рассмотрим тонкий плоский слой, вырезанный из поверхности Ферми для электронов двумя плоскостями, перпендикулярными к направлению магнитного поля  $H$ ; пусть на единицу поверхности такого сечения приходится  $\alpha$

состояний. В постоянных магнитном  $H_z = H$  и электрическом  $E_x$  полях энергия электрона  $\epsilon$  в этом сечении изменяется согласно уравнению

$$\dot{\epsilon} = ev_x E_x = -ck_y E_x \frac{1}{H}, \quad (12.25)$$

поскольку, если можно пренебречь столкновениями,  $k_y = -(e/c)v_x H$ . Таким образом, смещение поверхности Ферми из равновесного положения с точностью до аддитивной постоянной определяется величиной

$$\Delta\epsilon = -ck_y E_x \frac{1}{H}. \quad (12.26)$$

Интегрируя по поверхности сечения, получим результирующий ток в направлении оси  $y$  в виде

$$J_y = \alpha e \int dk_x dk_y \frac{\partial \epsilon}{\partial k_y} = -\alpha e c \frac{E_x}{H} \int dk_x dk_y. \quad (12.27)$$

Интеграл в правой части как раз равен площади сечения, так что  $J_y$  равно произведению числа состояний в данном сечении на величину  $ecE_x/H$ . Для всей поверхности Ферми надо этот результат проинтегрировать по  $dk_z$ , помня, что величина  $\alpha \int dk_x dk_y dk_z$  дает число состояний во всем объеме. Следовательно, полная плотность тока в направлении оси  $y$  запишется в виде

$$j_y = \frac{ec}{H} (n_+ - n_-) E_x, \quad (12.28)$$

где  $n_+$  — концентрация дырок, а  $n_-$  — концентрация электронов. При  $n_+ = n_-$  имеем  $\sigma_{yx} = 0$ , в согласии с результатом (12.23); соображения, высказанные выше, показывают, что, в согласии с экспериментом, магнетосопротивление не достигает насыщения. Этот вывод не зависит от ориентации кристалла и служит объяснением для второго из перечисленных выше случаев возможного поведения магнетосопротивления (случай б).

**Влияние открытых орбит.** Для некоторых кристаллов экспериментально установлен следующий замечательный факт: насыщение магнетосопротивления для некоторых особых направлений в кристалле не наблюдается. Это отсутствие насыщения в некоторых направлениях можно объяснить, если учесть возможность существования открытых орбит. В сильных магнитных полях токи, связанные с движением носителей заряда по открытым орбитам, возможны, как известно, только в одном направлении в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Следовательно, увеличение поля не может дать насыщения за счет



открытых орбит. Предположим, что при данной ориентации кристалла относительно магнитного поля имеются открытые орбиты, параллельные  $k_x$ ; в обычном пространстве эти орбиты дают составляющую тока в направлении оси  $y$ . Мы можем установить соответствие между наличием открытых орбит и компонентой тензора проводимости  $\sigma_{yy}$ ; пусть вклад открытых орбит в проводимость равен  $ne\mu$ ; это определяет введенную нами величину  $s$ . В предельном случае сильных полей и без учета вклада открытых орбит тензор проводимости (12.10) имеет вид

$$\bar{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} \xi^{-2} & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & \xi^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.29)$$

Напомним, что  $\xi \sim H$ . С учетом вклада открытых орбит получим

$$\bar{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} \xi^{-2} & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.30)$$

Здесь в выражении для  $\sigma_{yy}$  мы опустили  $\xi^{-2}$  как величину, малую по сравнению с  $s$ . Для удобства будем считать, что  $\sigma_{xz} = 0 = \sigma_{zx}$ , хотя в общем случае это может и не иметь места. Применимость формул (12.29) и (12.30) к предельному случаю сильных полей была продемонстрирована Пиппардом [6]. Заметим, что открытая орбита, параллельная  $k_x$ , дает составляющую средней скорости только в направлении оси  $y$  и поэтому не вносит вклада в  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xx}$  и т. д. Величина напряженности магнитного поля не оказывает влияния на среднюю скорость носителей заряда  $v_y$  на орбите; она отражается только на темпе изменения  $k_x$ , т. е. на скорости  $\dot{k}_x$ , с которой электрон на открытой орбите движется в  $k$ -пространстве.

Из вида тензора (12.30) следует, что  $j_y = 0$ , если

$$-\frac{E_x}{\xi} + sE_y = 0, \text{ или } E_y = \frac{E_x}{s\xi}; \quad (12.31)$$

тогда для  $x$ -компоненты тока имеем

$$j_x \approx ne\mu (\xi^{-2} E_x + \xi^{-1} E_y) = ne\mu \left(1 + \frac{1}{s}\right) \xi^{-2} E_x, \quad (12.32)$$

откуда для эффективного удельного сопротивления получим

$$\rho \approx \frac{\xi^2}{ne\mu} \frac{s}{s+1}. \quad (12.33)$$

Удельное сопротивление возрастает при увеличении поля по закону  $H^2$  и, следовательно, насыщение не наступает. Распреде-

ление орбит по кристаллу создает тенденцию к уменьшению показателя степени при  $H$  до единицы. Итак, мы объяснили третий тип поведения магнетосопротивления, а именно отсутствие насыщения лишь при некоторых ориентациях кристалла.

Предположим, что кристалл ориентирован так, что открытая орбита переносит ток в направлении оси  $x$ . Тогда

$$\bar{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} s & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & \xi^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.34)$$

и  $j_y=0$ , если  $E_y=\xi E_x$ ; тогда для  $x$ -компоненты тока имеем

$$j_x \approx (s+1) ne\mu E_x. \quad (12.35)$$

Для такой ориентации магнетосопротивление достигает насыщения.

Если открытая орбита ориентирована произвольным образом в плоскости  $xy$ , то тензор проводимости (опять-таки в предельном случае  $\xi \gg 1$ ) имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma} \approx ne\mu \begin{pmatrix} s_1 & \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1} & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.36)$$

Тензор такого вида дает  $j_y=0$  при  $E_y=E_x/(\xi s_2)$ ; для  $x$ -компоненты тока имеем

$$j_x = ne\mu \left\{ s_1 + \frac{1}{s_2 \xi^2} \right\} E_x \rightarrow ne\mu s_1 E_x. \quad (12.37)$$

Таким образом, магнетосопротивление достигает насыщения для всех направлений, за исключением случая, когда открытая орбита переносит ток почти точно параллельно направлению оси  $y$ . Согласно геометрическим правилам, описанным в гл. 11, это требование сводится к тому, что направление открытой орбиты в  $k$ -пространстве должно совпадать с осью  $k_x$ .

Полученный результат, согласно которому магнетосопротивление достигает насыщения в достаточно сильных магнитных полях, если открытая орбита в  $k$ -пространстве не направлена по оси  $k_x$ , объясняет необыкновенную анизотропию поперечного магнетосопротивления, наблюдаемую на монокристаллах. Наличие такой анизотропии является характерной особенностью экспериментальных результатов, что иллюстрируется рис. 12.1. Таким образом, исследования углового распределения поперечного магнетосопротивления монокристаллов при сильных магнитных полях могут дать сведения о наличии открытых орбит

и о связности поверхности Ферми. В направлениях, в которых существуют открытые орбиты, сопротивление не достигает насыщения; оно достигается во всех других направлениях, за исключением лишь тех, в которых металл можно считать двузонным с одинаковым числом электронов и дырок.

### Уравнение переноса для магнетосопротивления

Предложенная Чамберсом трактовка поверхности Ферми, т. е. кинетическая формулировка уравнения переноса, в значительной степени подходит для рассмотрения проблем магнетосопротивления в случае поверхностей Ферми произвольного вида, чем обычная теория возмущений для кинетического уравнения Больцмана, при использовании которого магнитные эффекты появляются лишь во втором порядке. Мы начнем с варианта теории Чамберса, в котором уравнение линеаризовано по  $\mathbf{E}$ . Если функцию распределения записать в виде  $f = f_0 + f_1$ , где  $f_0$  — равновесное распределение, то плотность электрического тока запишется в виде

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathbf{v} f_1 = \frac{2e}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathbf{v} \frac{df_0}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon, \quad (12.38)$$

где  $\Delta\varepsilon$  — средняя энергия электронов, приобретенная ими от электрического поля  $\mathbf{E}$  за время между столкновениями. Предполагается, что тотчас после столкновения электрон оказывается в состоянии, соответствующем равновесному распределению. Тогда при постоянном времени релаксации  $\tau$  получим

$$\Delta\varepsilon = e \int_{-\infty}^0 dt \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}(t) e^{-t/\tau}. \quad (12.39)$$

Здесь  $e^{-t/\tau}$  — вероятность того, что интервал времени между последующими столкновениями равен по крайней мере  $|t|$ , если считать, что одно из столкновений произошло в момент  $t=0$ . Не представляет труда обобщить выражение (12.39) на случай, когда время релаксации  $\tau$  не постоянно, а зависит от  $\mathbf{k}$ .

Общий нелинеаризованный результат Чамберса [7] для функции распределения имеет следующий вид:

$$f = \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\tau(\mathbf{k}(t'))} f_0(\varepsilon - \Delta\varepsilon(t')) \exp\left(-\int_{t'}^t \frac{ds}{\tau(\mathbf{k}(s))}\right), \quad (12.40)$$

где

$$\Delta\varepsilon = \int_{t'}^t dt'' \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t'') \quad (12.41)$$

есть энергия, приобретенная частицей под действием силы  $\mathbf{F}$  за промежуток времени между  $t'$  и  $t$  в отсутствие столкновений,  $\tau$  — время релаксации,  $f_0$  — равновесная функция распределения. Бадд [8] доказал, что решение (12.40) удовлетворяет уравнению Больцмана.

В сильном магнитном поле электрон за время между столкновениями успеет много раз описать замкнутую орбиту и для компонент скоростей, лежащих в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю  $\mathbf{H}$ , интеграл (12.39) будет стремиться к нулю. Компоненту скорости, параллельную полю  $\mathbf{H}$  ( $=H_z$ ), можно заменить ее средним значением  $\langle v_H(k_H) \rangle$ , взятым по орбите при постоянном значении  $k_H$ . Итак, если магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , то

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{yx} = 0, \quad (12.42)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3 \tau} \int d^3k v_z \langle v_z \rangle \frac{df_0}{d\epsilon}. \quad (12.43)$$

Это значение  $\sigma_{zz}$  при  $H = \infty$ , вообще говоря, меньше значения

$$\sigma_{zz}(0) = \frac{2e^2}{(2\pi)^3 \tau} \int d^3k v_z^2 \frac{df_0}{d\epsilon} \quad (12.44)$$

при нулевом магнитном поле на величину, зависящую от анизотропии  $v_z$  близ орбиты. Таким образом, существует продольное магнетосопротивление, которое всегда достигает насыщения.

Если в направлении  $k_x$  имеются открытые орбиты, то  $\langle v_x \rangle = 0$ , но  $\langle v_y \rangle \neq 0$ . Тогда в предельном случае сильных полей и  $\sigma_{yy} \neq 0$ , что вполне соответствует полученному выше результату (12.30).

Применим развитый выше кинетический метод к задаче о поперечном магнетосопротивлении в слабых магнитных полях, т. е. в таких полях, для которых  $|\omega_c| \tau \ll 1$ . Нужно рассмотреть интеграл

$$\int_{-\infty}^0 dt v_\mu(t) e^{t/\tau},$$

считая время релаксации  $\tau$  постоянным. Разложив  $v_\mu(t)$  в ряд

$$v_\mu(t) = v_\mu(0) + t \dot{v}_\mu(0) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{v}_\mu(0) + \dots, \quad (12.45)$$

получим ряд интегралов, которые можно взять без труда. Итак, имеем

$$\int_{-\infty}^0 dt v_\mu(t) e^{t/\tau} = \tau v_\mu(0) + \tau^2 \dot{v}_\mu(0) + \tau^3 \ddot{v}_\mu(0) + \dots \quad (12.46)$$

В качестве примера рассмотрим  $\sigma_{xy}$  в виде

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3} \int d^3k v_x \frac{df_0}{d\varepsilon} (\tau v_y + \tau^2 \dot{v}_y + \tau^3 \ddot{v}_y + \dots). \quad (12.47)$$

Член, содержащий  $v_y$ , при интегрировании обращается в нуль в силу симметрии. Для свободного электронного газа член, содержащий  $\dot{v}_y$ , вычисляются, используя уравнения

$$m\dot{v}_y = -\frac{e}{c} v_x H, \quad \dot{v}_y = \omega_c v_x. \quad (12.48)$$

Тогда с точностью до членов  $O(H)$  находим

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3} \omega_c \tau^2 \int d^3k v_x^2 \frac{df_0}{d\varepsilon} = \omega_c \tau \sigma_{xx}(0). \quad (12.49)$$

При определении  $\sigma_{xx}$  или  $\sigma_{yy}$  нам понадобятся и члены порядка  $H^2$ ; вычисление можно провести, если, например,  $\ddot{v}_y$  взять в виде

$$\ddot{v}_y = \omega_c \dot{v}_x = -\omega_c^2 v_y; \quad (12.50)$$

тогда получим

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(0) - (\omega_c \tau)^2 \sigma_{yy}(0). \quad (12.51)$$

Эти результаты для свободного электронного газа согласуются в том же порядке теории возмущения с результатами, полученными в рамках представления о дрейфовой скорости, о котором шла речь выше. Однако описанный выше подход можно применять и для поверхностей Ферми общего вида. Например, для расчета  $\sigma_{xy}$  выражение для  $\dot{v}_y$  следует брать в виде

$$\dot{v}_y = \dot{k}_y \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_x \partial k_y} = \frac{eH}{c} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_y} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_y^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_x \partial k_y} \right), \quad (12.52)$$

откуда с точностью до членов порядка  $H$  получим хорошо известный результат

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3} \frac{eH\tau^2}{c} \int d^3k \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_y^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_x \partial k_y} \right) \frac{df_0}{d\varepsilon}. \quad (12.53)$$

При  $\omega_c > k_B T$  и  $\omega_c \tau \gg 1$  компоненты тензора проводимости обнаруживают осцилляции. Квантовые осцилляции свойств, связанных с процессами переноса, имеют то же происхождение, что и осцилляции восприимчивости в эффекте де Гааза—Ван Альфена, который рассматривался в гл. 11.

## ЗАДАЧИ

12.1. Показать, что поперечное магнетосопротивление обращается в нуль для проводника, у которого время релаксации изотропно, а тензор эффективных масс отвечает поверхности в форме эллипсоида. Изящный вывод этого результата упоминается в работе Чамберса [9].

12.2. Рассмотреть магнетосопротивление проводника, у которого поверхность Ферми имеет форму бесконечного кругового цилиндра.

12.3. Рассмотреть магнетосопротивление в случае носителей заряда двух типов для всех значений магнитного поля, предполагая, однако, что  $m_1 = m_2$ ,  $\tau_1 = \tau_2$ . Показать, что при стандартной геометрии для  $x$ -компоненты тока получается выражение

$$j_x = (n_1 + n_2) e \mu \frac{1}{1 + \xi^2} \left[ 1 + \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \xi^2 \right] E_x. \quad (12.54)$$

## Литература

1. Luttinger J. M., Kohn W., Phys. Rev. **109**, 1892 (1958).
2. Ли́фши́ц И. М., ЖЭТФ **32**, 1509 (1957).
3. Вильсон А., Квантовая теория металлов, Гостехиздат, 1940.
4. Займан Дж., Электроны и фононы, ИЛ, 1962.
5. Киттель Ч., Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963.
6. Pirard A. V., в сб. «Low Temperature Physics», ed. by C. DeWitt, а. о., N. Y., 1962, p. 93.
7. Chambers R. G., Proc. Phys. Soc. **A65**, 458 (1952).
8. Budd H., Phys. Rev. **127**, 4 (1962).
9. Chambers R. G., в сб. «The Fermi Surface», N. Y., 1960.