ГЛАВА 16

Электродинамика металлов

При взаимодействии металла с электромагнитным полем наблюдается ряд разнообразных и тонких явлений. Их изучение часто позволяет получить важные и подробные сведения относительно поверхности Ферми. В настоящей главе будет рассмотрен аномальный скин-эффект, циклотронный резонанс, диэлектрические аномалии, магнитный резонанс в плазме и спиновая диффузия.

Аномальный скин-эффект

Рассмотрим сначала нормальный скин-эффект. Током смещения $\dot{\mathbf{D}}$ в металле обычно пренебрегают, когда частоты $\omega \ll \sigma$, где σ — проводимость в электростатических единицах. У хороших проводников при комнатной температуре $\sigma \approx 10^{18}$ *сек*$^{-1}$. Заметим, что $4\pi\sigma \equiv \omega_p^2\tau$, где ω_p — плазменная частота, а τ — время релаксации носителей тока. Уравнения Максвелла в данном случае имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mu\dot{\mathbf{H}} \tag{16.1}$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dot{\mathbf{H}}, \tag{16.2}$$

откуда получаем уравнение для вихревого тока

$$k^2\mathbf{H} = \frac{i4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\mathbf{H}, \tag{16.3}$$

если магнитное поле изменяется по закону $H \sim \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$. Вещественная и мнимая части волнового вектора равны между собой; если σ — вещественно и равно σ_0, то

$$k = (1+i)(2\pi\mu\sigma_0\omega/c^2)^{1/2} = \frac{1+i}{\delta_0}. \tag{16.4}$$

Мнимая часть k есть величина, обратная толщине классического скин-слоя, т. е.

$$\delta_0 = (c^2/2\pi\mu\sigma_0\omega)^{1/2}. \tag{16.5}$$

Для хорошего проводника при комнатной температуре и частоте, равной $3 \cdot 10^{10}$ *гц*, имеем $\delta_0 \approx 10^{-4}$ *см*. В случае очень чистых образцов при гелиевых температурах $\delta_0 \approx 10^{-6}$ *см*. Формулы (16.4) и (16.5) выведены в предположении, что σ — вещественная величина, что соответствует выполнению условия $\omega\tau \ll 1$. Из элементарной теории проводимости в переменных полях имеем

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}; \tag{16.6}$$

при $\omega\tau \ll 1$ формула (16.6) дает для σ_0 обычное статическое значение $\sigma_0 = ne^2\tau/m$. Результат (16.6) есть прямое следствие уравнения переноса или выражения для дрейфовой скорости. В чистых образцах при гелиевых температурах в случае микроволновых частот может иметь место условие $\omega\tau \gtrsim 1$. В этом предельном случае

$$k^2 \approx \frac{4\pi\mu\omega\sigma_0}{c^2}\frac{i-\omega\tau}{(\omega\tau)^2}, \quad \operatorname{Im}\{k\} \approx \frac{1}{\delta_0\omega\tau}. \tag{16.7}$$

Тогда, если для оценки δ исходить из формул (16.5) или (16.7), возникает серьезное сомнение в справедливости расчетов в случае низких температур, так как Λ — средняя длина свободного пробега носителей, скажем, при гелиевых температурах, может оказаться больше толщины скин-слоя. Поскольку типичные значения τ могут быть порядка 10^{-10} *сек*, то для электрона на поверхности Ферми средняя длина свободного пробега равна

$$\Lambda = v_F\tau \approx 10^8 \cdot 10^{-10} \approx 10^{-2} \text{ см}, \tag{16.8}$$

т. е. много больше толщины скин-слоя $\delta_0 \approx 10^{-6}$ *см*, согласно формуле (16.5) или $\delta \approx 10^{-5}$ *см*, согласно (16.7). Если $\Lambda/\delta \gtrsim 1$, то уже нельзя считать, что плотность электрического тока $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ определяется только локальным значением напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, и использование в уравнениях Максвелла величины $\sigma\mathbf{E}$, как это было сделано выше, становится необоснованным. Область значений $\Lambda > \delta$ называют областью *аномального скин-эффекта*. Большие значения средней длины свободного пробега оказывают сильное влияние на те свойства среды, которые определяют процессы распространения в ней волн.

Поверхностный импеданс. Наблюдаемые электродинамические свойства металлической поверхности полностью описываются функцией $Z(\omega)$, определяемой соотношением

$$\boxed{Z = R - iX = \frac{4\pi}{c}\frac{E_t}{H_t},} \tag{16.9}$$

где E_t, H_t — тангенциальные составляющие **E** и **H** в поверхностном слое. Величина Z называется поверхностным импедансом. Величина R, являющаяся вещественной частью Z, называется поверхностным сопротивлением и определяет величину поглощаемой металлом мощности. Мнимую часть Z, т. е. X, называют поверхностным реактансом (или поверхностным реактивным сопротивлением). Величина X определяет сдвиг частоты резонансной полости внутри исследуемого металла. Из уравнения для rot **E** получим для проницаемости μ

$$\frac{i\omega\mu H_t}{c}=\frac{\partial E_t}{\partial z}. \tag{16.10}$$

Тогда

$$Z=\frac{4\pi i\omega\mu}{c^2}\left(\frac{E_t}{\partial E_t/\partial z}\right)_{+0}=\frac{4\pi\omega\mu}{kc^2}; \tag{16.11}$$

здесь нормаль к поверхности направлена внутрь полости.

В случае нормального скин-эффекта $k=(1+i)/\delta_0$, и поэтому

$$Z=\frac{4\pi\omega\mu}{kc^2}=(1-i)\frac{2\pi\omega\delta_0\mu}{c^2}=(1-i)\frac{2\pi\mu}{c}\frac{\delta_0}{\lambda}, \tag{16.12}$$

где $\lambda=c/\omega$. Таким образом, величина Z определяется отношением толщины скин-слоя к длине волны.

Быстрота, с которой теряется энергия в направлении оси z в расчете на единицу поверхности, определяется средним по времени от вещественной части вектора Пойнтинга **S**, величина которого равна

$$S=\frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|=\frac{c}{4\pi}E_xH_y=\left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 ZH_y^2, \tag{16.13}$$

причем значения полей берутся при $z=+0$. Для среднего по времени от вещественной части имеем

$$\langle\operatorname{Re}\{S\}\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 H^2\operatorname{Re}\{Z\}, \tag{16.14}$$

где H — амплитудное значение поля H_y на поверхности.

Теперь рассмотрим вклад поверхностного слоя образца в индуктанс намагничивающей цепи, а именно, рассмотрим плоский соленоид, внутри которого помещена пластинка из проводящего материала толщиной $2d$. Пусть $\mathcal{J}$ — ток на единицу длины соленоида. Тогда индуктанс на единицу длины запишется в виде

$$L=\operatorname{Re}\left\{\frac{\text{поток}}{\mathcal{J}}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mathcal{J}}\int_{-d}^{d}dzH_y(z)\mu\right\}. \tag{16.15}$$

Поскольку $\partial E_x/\partial z = i\omega\mu H_y/c$, имеем

$$2E_x(d) = \frac{i\omega}{c}\int_{-d}^{d} dz H_y(z)\,\mu, \tag{16.16}$$

где $H(d) = 4\pi\mathscr{J}/c$. Тогда, согласно определению (16.9),

$$L = \operatorname{Re}\left\{\frac{(2c/i\omega)}{(c/4\pi)}\,\frac{E_x(d)}{H_y(d)}\right\} = \frac{2c}{\omega}\operatorname{Re}\{-iZ\} = \frac{2c}{\omega}\operatorname{Im}\{Z\}. \tag{16.17}$$

Для плоского образца, служащего одной из концевых поверхностей прямоугольной резонансной полости с основным колебанием типа TE, можно показать, что эффективное изменение длины полости равно

$$\delta l = -\frac{c}{4\pi}\,\lambda\!\!\!^{-}\operatorname{Im}\{Z\}. \tag{16.18}$$

Экстремальное значение аномального скин-эффекта (когда $\Lambda/\delta \gg 1$) можно качественно интерпретировать на основе «концепции неэффективности» Пиппарда. Среди электронов, движущихся в проводнике, только те, которые перемещаются почти параллельно поверхности, остаются в электрическом поле достаточно долго, чтобы поглотить из него значительное количество энергии. Предположим, что «эффективные» электроны — это те, которые перемещаются внутри угла $\sim\delta/\Lambda$. Следовательно, концентрация эффективных электронов $n_{эфф} = \gamma n\delta/\Lambda$, где γ — константа порядка единицы. Тогда эффективная проводимость равна

$$\sigma_{эфф} = \frac{n_{эфф}e^2\tau}{m^*} = \gamma\frac{\delta}{\Lambda}\sigma_0. \tag{16.19}$$

Если в выражении (16.5) мы σ_0 заменим на $\sigma_{эфф}$ и решим его относительно δ, то найдем для эффективной толщины скин-слоя величину

$$\delta^3_{эфф} = \frac{c^2\Lambda}{2\pi\gamma\sigma_0\omega} \tag{16.20}$$

и для удельного поверхностного сопротивления $\operatorname{Re}\{Z\}$ —

$$R = \frac{2\pi\omega}{c^2}\left(\frac{c^2\Lambda}{2\pi\gamma\sigma_0\omega}\right)^{1/3}. \tag{16.21}$$

Эта формула имеет тот же вид, что и полученный ниже (и более строго) правильный результат, соответствующий $\gamma \approx 10$.

Наиболее важное следствие выражения (16.21) состоит в том, что поверхностное сопротивление оказывается не зависищим от средней длины свободного пробега Λ, поскольку $\sigma_0 \sim \Lambda$. Поэтому измерения R дают возможность определить импульс электронов на поверхности Ферми в направлении электрического поля; действительно

$$\frac{\sigma_{xx}}{\Lambda} = \frac{ne^2}{m^*_{xx} v_F} = \frac{ne^2}{k_F}. \quad (16.22)$$

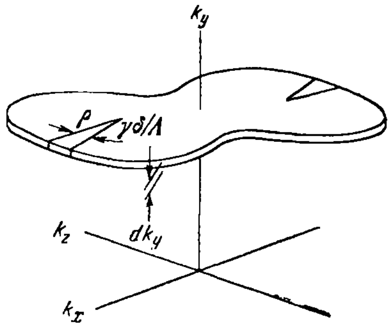

Рис. 16.1. «Ломтик» поверхности Ферми при фиксированном значении k_y, показывающий области значений k для так называемых эффективных электронов, скорости которых лежат внутри изображенного на рисунке угла, равного $\gamma\delta/\Lambda$.

В общем случае произвольной поверхности Ферми ее форма влияет на величину компоненты тензора поверхностного сопротивления R_{xx}, что учитывается интегралом $\int |\rho(k_y)| dk_y$, где $\rho(k_y)$ — радиус кривизны «ломтика» поверхности Ферми, соответствующего постоянному k_y. Это следует непосредственно из рис. 16.1. Эффективный ток обусловлен только теми электронами, значения k которых находятся в секторах, показанных на рис. 16.1 (угол раствора соответствует углу $\gamma\delta/\Lambda$). За время релаксации электроны внутри секторов изменяют свои импульсы на величину $\Delta k_x = e\mathscr{E}_x\tau$. Таким образом, объем $\mathbf{k}$-пространства, вносящего вклад в величину тока, составляет

$$\Omega_{эфф} = \int dk_y e\mathscr{E}_x \tau |\rho(k_y)| (\gamma\delta/\Lambda),$$

и поэтому

$$J_x = ev_F \frac{1}{4\pi^3} \Omega_{эфф} = \frac{e^2\mathscr{E}_x}{4\pi^3} \gamma\delta \int dk_y |\rho(k_y)|. \quad (16.23)$$

Это выражение дает эффективную проводимость для поверхности Ферми в общем случае. Тогда для диффузного рассеяния имеем

$$R_{xx} = \left(\frac{3^{3/2}\omega^2}{64\pi^2 c^4 e^2 \int dk_y |\rho(k_y)|} \right)^{1/3}. \quad (16.24)$$

В работе Пиппарда [1] для случая меди показано, сколь мощным средством изучения поверхности Ферми служит аномальный спин-эффект. Более детально этот вопрос изложен в работе Пиппарда «Динамика электронов проводимости», опубликованной в сборнике [2]. Если мы имеем дело с поверхностью поликристаллического образца, где кристаллиты ориентированы случайным образом, то данные об аномальном скин-эффекте позволяют определить полную площадь поверхности Ферми.

Математическая теория аномального скин-эффекта. Рассмотрим поверхность полубесконечного металла, расположенную в плоскости xy, причем пусть ось $\hat{z}$ направлена наружу. Поля описываются выражениями

$$E(z)=E_{x0}(z)\,e^{i\omega t},\quad H(z)=H_{y0}(z)\,e^{-i\omega t}. \tag{16.25}$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$-\frac{dH}{dz}=-\frac{i\omega}{c}E+\frac{4\pi}{c}j,\quad \frac{dE}{dz}=\frac{i\omega}{c}H, \tag{16.26}$$

где теперь $j(z)$ — плотность тока. Исключив H, получим

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}E=-\frac{4\pi i\omega}{c^2}j. \tag{16.27}$$

Электроны мы считаем изотропными с массой m. Функция распределения имеет вид $f=f_0+f_1(\mathbf{v}, z)$, где f — невозмущенное распределение. Если время релаксации есть τ, то в наинизшем порядке по f_1 уравнение переноса Больцмана имеет вид

$$v_z\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{1-i\omega\tau}{\tau}f_1=-\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}E(z)=-e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}v_xE(z). \tag{16.28}$$

Удобнее работать с фурье-образами, определенными соотношениями

$$\mathcal{E}(q)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dzEe^{iqz},\quad J(q)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dzje^{iqz}. \tag{16.29}$$

Предположим, что электроны зеркально отражаются от поверхности. Если считать, что оставшаяся половина пространства ($z<0$) заполнена другим куском того же металла, то электроны в каждой половине пространства будут вести себя так, как если бы отражение было зеркальным. Мы должны только обеспечить надлежащее электрическое поле в плоскости $z=0$. Градиент этого поля будет иметь особенность (cusp) при $z=0$, поскольку поле затухает в обоих направлениях оси z, т. е.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{+0}=-\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{-0}. \tag{16.30}$$

Это условие можно ввести в уравнение (16.27), добавив в него член с дельта-функцией:

$$\frac{\partial^2E}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}E=-\frac{4\pi i\omega}{c^2}j+2\left(\frac{dE}{dz}\right)_{+0}\delta(z). \tag{16.31}$$

Записав в этом уравнении все члены в виде интегралов Фурье, получим

$$-q^2\mathscr{E}(q)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathscr{E}(q)=-\frac{4\pi i\omega}{c^2}J(q)+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{dE}{dz}\right)_{+0}. \quad (16.32)$$

Уравнение переноса дает нам другую связь между $\mathscr{E}$ и J. Введем фурье-образ

$$\Phi_1(q)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz f_1 e^{iqz}. \quad (16.33)$$

Тогда из (16.28) для ферми-газа при $k_BT \ll \varepsilon_F$ получим

$$(1-i\omega\tau+iqv_z\tau)\,\Phi_1(q)=-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\tau e v_x\mathscr{E}(q)\approx\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\tau e v_x\mathscr{E}(q). \quad (16.34)$$

Решение для $\Phi_1(q)$ имеет вид

$$\Phi_1(q)=\frac{\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\,e v_x\tau}{1-i\omega\tau+iqv_z\tau}\mathscr{E}(q). \quad (16.35)$$

Плотность электрического тока

$$j(z)=\frac{e}{4\pi^3}\int d^3k v_x f_1 \quad (16.36)$$

имеет фурье-компоненты, равные

$$J(q)=\frac{e}{4\pi^3}\int d^3k v_x\Phi_1(q)=\mathscr{E}(q)\frac{e^2m^3\tau}{4\pi^3}\int d^3v\frac{v_x^2\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)}{1-i\omega\tau+iq\tau v_z}. \quad (16.37)$$

Определим компоненту $\sigma_{xx}(q)$ тензора проводимости соотношением $J(q)=\sigma_{xx}(q)\,\mathscr{E}(q)$; тогда

$$\sigma_{xx}(q)=\frac{e^2m^3\tau}{4\pi^2}\int dv v^4\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\frac{\sin^2\theta}{1-i\omega\tau+iq\tau v\cos\theta}. \quad (16.38)$$

Теперь решение всей задачи сводится к оценке интеграла по $d(\cos\theta)$. Общее решение со всеми деталями было дано Рейтером и Зондхеймером [3]. Читатель может самостоятельно убедиться в том, что при $q\to 0$ результат (16.38) принимает вид

$$\sigma_{xx}(0)\to\frac{ne^2\tau}{m}\frac{1}{1-i\omega\tau}\equiv\frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} \quad (16.39)$$

в полном согласии с полученным ранее результатом.

Оценим (16.38) в предельной аномальной области $\Lambda q \gg |1 - i\omega\tau|$. Пусть

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{1 - i\omega\tau} = \frac{v_F \tau}{1 - i\omega\tau}; \tag{16.40}$$

тогда интеграл по $d(\cos\theta)$ запишется в виде

$$\frac{1}{1 - i\omega\tau} \int_{-1}^{1} dx \frac{1 - x^2}{1 + i\Lambda' q x} \approx \frac{2 \operatorname{arctg} \Lambda' q}{\Lambda q} \approx \frac{\pi}{\Lambda |q|}, \tag{16.41}$$

где мы пренебрегли членами более высокого порядка по $(\Lambda' q)^{-1}$. Итак, используя соотношение $2m\varepsilon_F = (3\pi^2 n)^{2/3}$, получим

$$\sigma_{xx}(q) \approx \frac{ne^2\tau}{m} \frac{3\pi}{4\Lambda |q|} = \sigma_0 \frac{3\pi}{4\Lambda |q|}. \tag{16.42}$$

Заметим, что это — поперечная проводимость ($\hat{\mathbf{x}} \perp \mathbf{q}$) и, следовательно, она не идентична продольной проводимости, связанной с продольной диэлектрической проницаемостью электронного газа, о которой шла речь в гл. 6.

Объединяя полученный результат с (16.32) и пренебрегая членом порядка $(\omega/c)^2$, соответствующим току смещения, получим

$$\mathscr{E}(q)\left(-q^2 + \frac{4\pi i}{c^2}\sigma_{xx}\omega\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{dE}{dz}\right)_{+0}, \tag{16.43}$$

так что

$$E(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{dE}{dz}\right)_{+0} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{e^{-iqz}}{-q^2 + (2i\sigma_{xx}/\delta^2\sigma_0)}, \tag{16.44}$$

где $\delta^2 = c^2/2\pi\omega\sigma_0$. Используя (16.42) и полагая $\xi = q(2\Lambda\delta^2/3\pi)^{1/3}$, вычислим интеграл в (16.44) при $z = 0$; он равен

$$-2i\left(\frac{2\Lambda\delta^2}{3\pi}\right)^{1/3} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{1 + i\xi^3} = -\frac{2}{3}\left(\frac{2\pi^2\Lambda\delta^2}{3}\right)^{1/3}(1 + i3^{-1/2}). \tag{16.45}$$

Здесь мы воспользовались формулой (856.6) из таблиц Двайта [4].

Поверхностный импеданс Z_∞ в предельном случае, соответствующем краю области аномального скин-эффекта, можно определить из (16.11), (16.44) и (16.45); он запишется в виде

$$Z_\infty = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\left(\frac{E}{\partial E/\partial z}\right)_{+0} = \frac{8}{9}\left(\frac{3^{1/2}\pi\omega^2\Lambda}{c^4\sigma_0}\right)^{1/3}(1 - i3^{1/2}). \tag{16.46}$$

Этот результат согласуется с результатом работы [3], но в данном случае мы не делали предположения о том, что $\omega\tau \ll 1$. Поскольку $\sigma_0 \sim \Lambda$, мы видим, что Z_∞ не зависит от средней длины свободного пробега. Если отражение от поверхности носит диффузный характер, то в выражении (16.46) для Z_∞ множитель 8/9 отсутствует. Считают, что отражение, по-видимому, всегда носит диффузный характер, за исключением некоторых случаев, когда имеют место особые условия на поверхности.

Квантовая теория аномального скин-эффекта в обычных и сверхпроводящих металлах изложена в работе Маттиса и Бардина [5].

Циклотронный резонанс в металлах

Для наблюдения циклотронного резонанса в металлах необходимо, естественно, чтобы поверхностный импеданс как функция статического магнитного поля обнаруживал резонансные свойства. Наиболее удобная для обсуждения схема рассмотрения этого эффекта описана в работе Азбеля и Канера [6]. Статическое поле $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости образца; переменное электрическое поле тоже лежит в этой плоскости и может быть либо параллельно полю $\mathbf{H}_0$, либо перпендикулярно к нему. Если время релаксации достаточно велико, то можно считать, что носители тока перемещаются по спиральным траекториям вокруг $\mathbf{H}_0$, проходя при каждом обороте через переменное поле, локализованное в скин-слое. Резонансное поглощение энергии будет происходить в том случае, если носитель при каждом попадании в скин-слой будет оказываться в электрическом поле в той же фазе. Итак, при резонансе

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = p\,\frac{2\pi}{\omega}, \tag{16.47}$$

где p — целое число, или

$$\omega_c = \frac{\omega}{p},$$

где p — индекс гармоники. Напомним, что в полупроводниках циклотронный резонанс возможен только для $p=1$, так как проникающее в образец переменное поле можно считать однородным.

Приводимые ниже качественные соображения позволяют показать, что в присутствии магнитного поля справедливо соотношение

$$Z_\infty(H) \approx Z_\infty(0)\left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega_c\tau} - i\,\frac{2\pi\omega}{\omega_c}\right)\right]^{1/3}. \tag{16.48}$$

Иными словами, $Z_\infty(H)$ — периодическая функция от ω/ω_c. Чтобы выяснить физический смысл формулы (16.48), рассмотрим вклад в ток и, следовательно, в проводимость, вносимый одним носителем, радиус орбиты которого велик по сравнению с толщиной скин-слоя. Изменение фазы переменного поля за период $2\pi/\omega_c$ равно $2\pi\omega/\omega_c$; если мы хотим учесть столкновения, то вместо ω надо взять $\omega - (i/\tau)$. Следовательно, при прохождении каждого витка спирали ток умножается на фазовый множитель

$$e^{-w} \equiv \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega_c\tau} - i\,\frac{2\pi\omega}{\omega_c}\right). \qquad (16.49)$$

Фазовый множитель полного тока, обусловленный прохождением всех витков, равен

$$1 + e^{-w} + e^{-2w} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-w}}. \qquad (16.50)$$

Эта величина и входит в выражение для эффективной проводимости, в чем легко убедиться из уравнения переноса, записанного в виде, предложенном Чамберсом (см. гл. 12). Из выражений (16.21) или (16.46) легко видеть, что $Z_\infty \sim (1/\sigma_{\text{эфф}})^{1/3}$, откуда сразу вытекает (16.48).

Результат, очень близкий (16.48), получается также из решения уравнения переноса в предельном случае, соответствующем краю области аномального скин-эффекта, при наличии статического магнитного поля, параллельного поверхности образца. Мы увидим, что рассмотрение будет носить тот же характер, что и в отсутствие поля, но теперь в левую часть уравнения переноса (16.28) добавится член $\omega_c \partial f_1/\partial\varphi$, где $\omega_c = eH/m_c c$ — циклотронная частота, а φ — азимутальный угол относительно направления $\mathbf{H}_0$, принятого за полярную ось.

В случае статического магнитного поля $\mathbf{H}_0$ линеаризованное уравнение переноса имеет следующий вид:

$$-i\omega f_1 + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{e}{mc}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{f_1}{\tau}. \qquad (16.51)$$

Рассмотрим специальный случай относительного расположения полей $\mathbf{H}_0 \| \mathbf{E} \| \hat{\mathbf{x}}$. Введем в пространстве скоростей сферическую полярную систему координат, так что $\mathbf{v} \equiv (v, \theta, \varphi)$; здесь ось $\hat{\mathbf{x}}$ считается полярной осью. Тогда

$$\frac{eH_0}{mc}\,\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \times \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \omega_c \hat{\mathbf{x}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} f_1 = \omega_c \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}, \qquad (16.52)$$

и уравнение переноса примет вид

$$(1 - i\omega\tau) f_1 + v\tau \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial f_1}{\partial z} + \omega_c\tau \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -e\tau v \cos\theta \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \qquad (16.53)$$

Если произвести фурье-преобразование, то

$$\left(1+iv\bar{\tau}q\sin\theta\sin\varphi+\omega_c\bar{\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Phi_1(q)=$$
$$=\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)e\bar{\tau}v\cos\theta\mathscr{E}(q), \quad (16.54)$$

где $\bar{\tau}\equiv\tau/(1-i\omega\tau)$. Это простое линейное дифференциальное уравнение имеет решение

$$\Phi_1(q)=\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)ev\cos\theta\mathscr{E}(q)\omega_c^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\varphi}d\varphi'\exp\left\{\frac{(\varphi'-\varphi)-iv\bar{\tau}q\sin\theta(\cos\varphi'-\cos\varphi)}{\omega_c\bar{\tau}}\right\}. \quad (16.55)$$

В том, что (16.55) действительно является решением, можно убедиться непосредственным дифференцированием. Компонента q плотности тока имеет вид

$$J(q)=\frac{em^3}{4\pi^3}\int v^3dv\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\Phi_1(q). \quad (16.56)$$

Интегрирование здесь не тривиально; за всеми подробностями мы отсылаем читателя к работе [7]. В предельном случае $v_Fq/\omega_c\gg1$, который эквивалентен условию $r_c\gg\delta$, где r_c — циклотронный радиус, оказывается, что

$$J(q)=\frac{3\pi}{4}\frac{ne^2\mathscr{E}(q)}{mv_Fq}\operatorname{cth}\left(\frac{1-i\omega\tau}{\omega_c\tau}\pi\right). \quad (16.57)$$

Отсюда следует, что $J(q)$ испытывает периодические осцилляции, если $\omega_c\tau\gg1$ и $\omega\tau\gg1$. В том же предельном случае поверхностный импеданс для края области аномального скин-эффекта (при зеркальном отражении) описывается выражением

$$Z_\infty(H)=Z_\infty(0)\operatorname{th}^{1/3}[\pi(1-i\omega\tau)/\omega_c\tau]. \quad (16.58)$$

Этот результат был получен в работах [8,9]. Периодичность (16.58) та же, что и у приближенного выражения (16.48), поскольку

$$\operatorname{th}(x-iy)=\frac{\operatorname{sh}2x-i\sin2y}{\operatorname{ch}2x+\cos2y}. \quad (16.59)$$

В случае, соответствующем краю области аномального скин-эффекта, результат (16.58) применим как для продольного, так и для поперечного расположений поля. При наличии магнитного поля граничные условия становятся сложнее использованных в работах [8, 9] (см. по этому вопросу статью Азбеля и Канера [10]).

Экспериментальные кривые циклотронного резонанса для меди и кривые, построенные на основе теоретических расчетов при подходящих значениях m_c и τ, приведены на рис. 16.2.

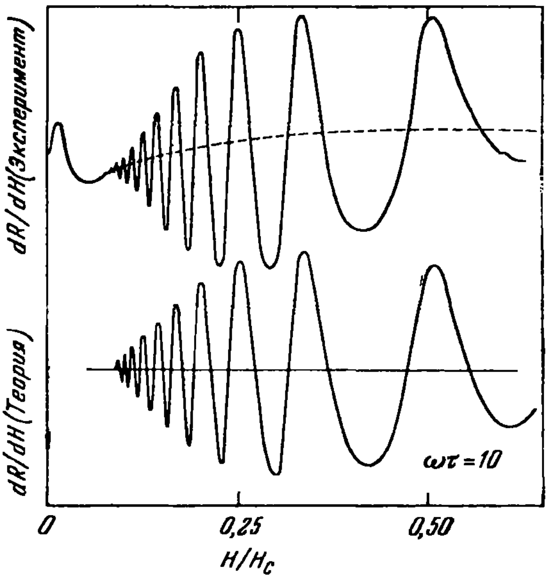

Рис. 16.2. Кривые циклотронного резонанса в меди.

Эти кривые позволяют сопоставить результаты расчетов зависимости производной поверхностного сопротивления от магнитного поля с экспериментальными данными, полученными на частоте $24 \cdot 10^9$ *гц*.

Значение массы m_c выражено через площадь поверхности Ферми S согласно соотношению

$$m_c = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{d\varepsilon} \tag{16.60}$$

(см. (11.54)). Стационарные значения производной $dS/d\varepsilon$, соответствующие k_H, определяют сечения поверхности Ферми, которые дают вклад в центральную и периферийные части циклотронных линий.

В экспериментах по циклотронному резонансу в металлах мы наблюдаем резонанс, обусловленный лишь некоторыми избранными электронами, орбиты которых проходят через скин-слой. Вклад этих электронов в величину их эффективной массы, обусловленный электрон-электронным взаимодействием, не обязательно такой же, как и при эффекте де Гааза — Ван Альфена, когда вклад каждого электрона одинаков. Не следует ожидать, что эксперименты по циклотронному резонансу дадут те же значения эффективных масс, которые получаются из измерений эффекта де Гааза — Ван Альфена, даже если поверхность Ферми такова, что производную $dS/d\varepsilon$ в формуле (16.60) можно однозначно сопоставить с величиной S, входящей в выражение для эффекта де Гааза — Ван Альфена.

Эффективная масса может изменяться также за счет электрон-фононного взаимодействия, как это было при рассмотрении полярона, но мы полагаем, что при циклотронном резонансе данный эффект будет сказываться так же, как и в других экспериментах, где играет роль эффективная масса на поверхности Ферми. Однако из оптических экспериментов можно установить, что эффективная масса электрона не связана с фононами; в оптических переходах могут принимать участие и те электроны, которые не лежат на поверхности Ферми.

Теория циклотронного резонанса в металлах для случая магнитного поля, перпендикулярного к поверхности образца, рассмотрена в работе [11]; при такой геометрии в условия резонанса входит допплеровское смещение.

Диэлектрическая аномалия

Рассмотрим теперь диэлектрические свойства свободного электронного газа с n носителями на единицу объема; эффективная масса носителя равна m^*, а его заряд равен e. В предположении $\omega\tau \gg 1$ уравнение движения имеет вид

$$m^*\ddot{x} = eE, \qquad -\omega^2 m^* x = eE. \tag{16.61}$$

Следовательно, вклад свободных носителей в величину диэлектрической поляризации составляет

$$P = nex = -\frac{ne^2}{m^*\omega^2}E. \tag{16.62}$$

Отсюда для диэлектрической проницаемости имеем

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m^*\omega^2} + 4\pi\chi_a, \tag{16.63}$$

где χ_a — диэлектрическая восприимчивость единицы объема самого вещества (независимо от присутствия других веществ). Вклад носителей в величину ϵ можно считать равным $-\omega_p^2/\omega^2$, где ω_p — плазменная частота.

Далее, при низких частотах, величина $-\omega_p^2/\omega^2$ приобретет для ϵ доминирующее значение и сделает ее отрицательной.

Дисперсионный закон для электромагнитных волн (при $\mu=1$) имеет вид

$$\omega^2=\frac{c^2k^2}{\epsilon}. \qquad (16.64)$$

Если $\epsilon\approx-\omega_p^2/\omega^2$, то $-\omega_p^2=c^2k^2$, или

$$k=i\frac{\omega_p}{c}. \qquad (16.65)$$

Следовательно, электромагнитные волны в металлах затухают на расстоянии порядка дебаевской длины, т. е. длины порядка 10^{-6} *см*, независимо от частоты, если выполняются условия $\omega\tau\gg1$ и $\omega_p\gg\omega$. При получении этого результата аномальным скин-эффектом мы пренебрегали.

Для значений ω, больших любого корня ω_0 уравнения

$$\epsilon(\omega_0)=0, \qquad (16.66)$$

диэлектрическая проницаемость становится положительной, волновой вектор — вещественным и электромагнитные волны могут распространяться в среде. Эта теория объясняет явление прохождения через щелочные металлы электромагнитных волн в ультрафиолетовой области спектра. Изменение отражательной способности кристаллов, когда частота ω падающего излучения проходит значение ω_0, называется *диэлектрической аномалией.* Если концентрация n носителей известна, то экспериментальное определение значения ω_0 дает нам величину m^*. Эффективность такого определения зависит, естественно, от того, насколько проста структура краев энергетических зон.

Выше все время предполагалось, что мы находимся вне области аномального скин-эффекта. Вполне возможно, что в видимой области спектра $\omega\tau\gg1$, но Λ не больше δ. Частотная область, соответствующая видимой области спектра, рассмотрена в упомянутой выше работе [3], а также в работе [12].

Приняв вычисленные Бруксом значения эффективной массы электрона в щелочных металлах, найдем длины волн, соответствующие границе прозрачности. Эти найденные расчетом значения вместе с наблюдаемыми на опыте приведены ниже.

Металл		Li	Na	K	Rb
λ, Å	выч.	1840	2070	2720	3000
	набл.	1550	2100	3150	3400

При расчетах не были сделаны поправки на поляризацию ионных остовов, хотя этот эффект существен и его можно наблюдать в опыте. Из выражения (16.49) видно, что предел прозрачности при $\chi_a \neq 0$ можно определять по формуле

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + 4\pi\chi_a}. \tag{16.67}$$

Согласно данным экспериментов по отражению величина $(1 + 4\pi\chi_a)^{1/2}$ для металлического серебра равна примерно 2. Это согласуется с оценками величины χ_a, полученными из сравнения значений показателей преломления галогенидов серебра и галогенидов щелочных металлов.

Распространение электромагнитных волн в магнитной плазме

Бауэрс и др. [13] наблюдали удивительные эффекты, связанные с распространением электромагнитных волн в натрии высокой чистоты при 4° K, помещенном в статическое магнитное поле порядка 10^4 *э*. Было установлено, что в металле могут распространяться электромагнитные волны с частотой порядка 10 *гц* и с длиной волны порядка 1 *см*. Иначе говоря, фазовая скорость этих волн составляла всего лишь ~ 10 *см/сек*, что соответствует показателю преломления $\sim 3 \cdot 10^9$ и диэлектрической проницаемости порядка 10^{19}. Электромагнитные колебания при этих условиях называют *спиральными* (helicon). Их существование было предсказано Эгреном.

Рассмотрим уравнение движения свободного электрона с массой m^* в статическом магнитном поле H, направленном вдоль оси z при наличии переменного электрического поля с компонентами E_x, E_y; оно имеет вид

$$m^*\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}\dot{y}H, \quad m^*\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H \tag{16.68}$$

или, вводя $\omega_c = eH/m^*c$,

$$-\omega^2 x = \frac{e}{m^*}E_x - i\omega\omega_c y, \quad -\omega^2 y = \frac{e}{m^*}E_y + i\omega\omega_c x. \tag{16.69}$$

В условиях описанного выше эксперимента $\omega \ll \omega_c$; поэтому, помня, что $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m^*$, получим для тензора диэлектрической восприимчивости

$$4\pi\overline{\overline{\chi}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega_p^2/\omega\omega_c & 0 \\ i\omega_p^2/\omega\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_p^2/\omega^2 \end{pmatrix} \approx \overline{\overline{\epsilon}}, \tag{16.70}$$

поскольку $\omega_p^2/\omega\omega_c \gg 1$. Для распространяющейся вдоль оси z электромагнитной волны с волновым вектором k уравнения Максвелла примут вид

$$\left.\begin{aligned} kH_y = \frac{\omega}{c}(\epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y), \quad kH_x = -\frac{\omega}{c}(\epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y), \\ kE_y = -\frac{\omega}{c}H_x, \quad kE_x = \frac{\omega}{c}H_y. \end{aligned}\right\} \quad (16.71)$$

Тогда, составив уравнение для $E_x + iE_y$ и пренебрегая ϵ_{xx} и ϵ_{yy}, получим

$$k^2 = \frac{\omega\omega_p^2}{c^2\omega_c} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{k^2Hc}{4\pi ne}. \quad (16.72)$$

Эти результаты оказались не зависящими от массы частиц. Поэтому такого рода эксперименты позволяют определять эффективный заряд носителей в металле, хотя теоретически, казалось бы, твердо установлено, что электрон-электронное взаимодействие не может привести к какому-либо отличию эффективного заряда носителей от величины e. Если подставить в формулу (16.72) значения $k = 10$ *см*$^{-1}$, $H = 10^4$ *э*, $n = 10^{23}$ *см*$^{-3}$, то получим $\omega \sim 60$ *сек*$^{-1}$.

Для энергетической поверхности в общем случае можно рассмотреть эту задачу для $\omega_c\tau \gg 1$ при $\omega\tau \ll 1$. Пиппард дал общий вид предельной формы тензора статической проводимости в магнитном поле. Если поле $\mathbf{H} \| \hat{\mathbf{z}}$ и незамкнутые (открытые) орбиты отсутствуют, то

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} AH^{-2} & GH^{-1} & CH^{-1} \\ -GH^{-1} & DH^{-2} & EH^{-1} \\ -CH^{-1} & -EH^{-1} & F \end{pmatrix}, \quad (16.73)$$

где A, C, D, E, F, G — величины, не зависящие от H. В общем случае, считая, как и выше, $\omega \ll \omega_c \ll \omega_p$, имеем

$$\epsilon_{\mu\nu} = -i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}; \quad (16.74)$$

тогда приближенное секулярное уравнение (при $G \neq 0$) примет вид

$$\begin{vmatrix} c^2k^2 & -i4\pi G\omega H^{-1} \\ i4\pi G\omega H^{-1} & c^2k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16.75)$$

Его решение

$$\omega = \pm\frac{k^2c^2H}{4\pi G} \quad (16.76)$$

имеет ту же форму, что и (16.72). Подчеркнем, что в уравнении (16.75) содержатся все гальваномагнитные эффекты.

Если для произвольного направления в кристалле существуют открытые орбиты, то тензор статической ($\omega\tau \ll 1$) проводимости в магнитном поле для плоскости xy имеет вид

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} A_1 & GH^{-1} \\ -GH^{-1} & A_2 \end{pmatrix}, \tag{16.77}$$

где A_1, A_2 не зависят от H. Если $cA_1 \gg \omega$ и $cA_2 \gg \omega$, то

$$\overline{\overline{\epsilon}} \approx \frac{i4\pi\overline{\overline{\sigma}}}{\omega}. \tag{16.78}$$

Секулярное уравнение общего вида, вытекающее из (16.71), запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \frac{c^2k^2}{\omega^2} - \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ -\epsilon_{xy} & \frac{c^2k^2}{\omega^2} - \epsilon_{yy} \end{vmatrix} = 0. \tag{16.79}$$

Если $A_1 = A_2 = A$, то при $\omega\tau \ll 1$ получим

$$\omega = \pm \frac{k^2c^2H}{4\pi(G + iAH)}. \tag{16.80}$$

Величина A представляет собой часть статической проводимости (в нулевом магнитном поле), которая обусловлена незамкнутыми орбитами, а величина G/H — некоторое среднее от $\sigma_0/\omega_c\tau$. Таким образом, в магнитных полях, достаточно сильных, чтобы выполнялось условие $\omega_c\tau \gg 1/\eta$, где η — доля открытых орбит, низкочастотный резонанс невозможен. Если поле H не столь велико, то резонанс будет просто ослаблен из-за проводимости, связанной с открытыми орбитами.

Спиновый резонанс при обычном скин-эффекте

В выражение для поверхностного импеданса при обычном скин-эффекте входит магнитная проницаемость; согласно (16.12)

$$Z = (1 - i)\left(\frac{2\pi\omega\mu}{c^2\sigma}\right)^{1/2} \sim (1 - i)\mu^{1/2}. \tag{16.81}$$

Далее,

$$\mu = 1 + 4\pi(\chi_1 + i\chi_2), \tag{16.82}$$

где $\chi_1 = \mathrm{Re}\{\chi\}$, $\chi_2 = \mathrm{Im}\{\chi\}$.

Если, как и при ядерном резонансе, $|\chi| \ll 1$, то $\mu^{1/2}$ можно разложить в ряд, и мы получим

$$Z \sim (1 - i)(1 + 2\pi\chi_1 + 2\pi i\chi_2), \tag{16.83}$$

откуда

$$\operatorname{Re}\{Z\} \sim 1 + 2\pi(\chi_1 + \chi_2). \tag{16.84}$$

Из этого результата следует, что истинное поглощение мощности при частотах, близких к частотам ядерного резонанса в металлическом образце, толщина которого достаточно велика по сравнению со скин-слоем, определяется величиной $\chi_1+\chi_2$, а не только одной компонентой χ_2, обычно характеризующей поглощение. Сама толщина скин-слоя при переходе через резонанс изменяется, и поэтому поглощение определяется как величиной χ_1, так и величиной χ_2.

При ферромагнитном резонансе в этих условиях нельзя считать $|\chi|$ малой величиной. Введем вещественные величины μ_R и μ_L, определив их соотношением

$$Z \sim (1-i)\mu^{1/2} = \mu_R^{1/2} - i\mu_L^{1/2}. \tag{16.85}$$

Если

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2, \tag{16.86}$$

то

$$\mu_R = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} + \mu_2, \quad \mu_L = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} - \mu_2. \tag{16.87}$$

Из измерений потерь определяется μ_R; из измерений индуктивного сопротивления вторая компонента — μ_L.

Дайсоновская форма линии. Интересный результат был получен при изучении электронного спинового резонанса в парамагнитных металлах, когда диффузия спинов внутрь скин-слоя и из него была такова, что за время спиновой релаксации происходило множество актов такого перехода. Эта ситуация, вообще говоря, не аналогична аномальному скин-эффекту, так как время релаксации электронов в щелочных металлах при трансляционном движении, т. е. для процесса проводимости, гораздо меньше, чем время электронной спиновой релаксации. Мы будем предполагать, что для электрической проводимости соблюдаются условия, характерные для обычного скин-эффекта.

Уравнение Блоха для поперечных компонент вектора намагниченности с учетом диффузии и с единственным временем релаксации имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{T_1} + D\nabla^2 \mathbf{M}. \tag{16.88}$$

Будем решать это уравнение совместно с уравнением для вихревого тока

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}(\dot{\mathbf{H}} + 4\pi\dot{\mathbf{M}}). \tag{16.89}$$

Эти два уравнения приводят к (2×2)-секулярному уравнению, составляемому из коэффициентов при $M^{\pm}=M_x\pm iM_y$; при этом вводятся также компоненты H вида $H^{\pm}=H_x\pm iH_y$. Корни секулярного уравнения дадут дисперсионный закон $\mathbf{k}(\omega)$; получится два различных корня. Эти два решения при данном ω следует объединить, чтобы удовлетворить «поверхностным» граничным условиям для «диффузии» намагниченности. Если мы предположим, что на самой поверхности спиновая релаксация не происходит, то на поверхности должно выполняться условие

$$\mathbf{k}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{M}=0,$$

где $\mathbf{k}$ — нормаль к ней. При этих условиях форма линии магнитного поглощения имеет сходство с формой дисперсионной кривой. Это решение было подробно рассмотрено Дайсоном [14].

ЗАДАЧИ

16.1. Пусть векторы $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k}$ параллельны оси $\hat{z}$ и имеются «незатухающие» периодические открытые орбиты, параллельные оси k_x. Показать, что дисперсионный закон для электромагнитных волн в металле имеет вид

$$\omega\approx\frac{kc\omega_c\omega^*}{\omega_p^2},$$

где $\omega^{*2}=4\pi n_{\text{откр}}e^2/m$ — эффективная плазменная частота для открытых орбит.

16.2. Рассмотрим пленку толщиной D. Показать, что условие $D>c/\sigma_0$ (в большей мере, чем условие $D>\delta_0$) может служить критерием способности пленки отражать большую часть нормально падающего на нее излучения. Предполагается, что $c/\sigma_0\ll\delta_0$. Эта задача может служить хорошим упражнением в применении уравнений Максвелла, хотя проще ее решить непосредственно из физических соображений. Этот результат означает, что вопрос об отражательной способности очень тонких пленок связан прежде всего с величиной импеданса, а не с величиной мощности, поглощаемой пленкой.

16.3. Методами, развитыми в гл. 6, показать, что в предельном случае $\omega\tau\gg1$ и $(kq/m)\gg\omega$ *поперечная* диэлектрическая проницаемость электронного газа при абсолютном нуле имеет вид

$$\varepsilon(\omega,\mathbf{q})=\frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{\mathbf{q}}\approx\frac{4\pi i}{\omega}\frac{3\pi ne^2}{4mv_Fq},$$

что согласуется с формулой (16.42).

Указание. Вычислить с точностью до членов $O(A)$ величину

$$(j_{\mathbf{q}})_x=\operatorname{Sp}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\rho v_x=\frac{e}{m}\sum_{\mathbf{k}}k_x\langle\mathbf{k}\,|\,\delta_\rho\,|\,\mathbf{k}+\mathbf{q}\rangle-\frac{ne^2}{mc}A_{\mathbf{q}},$$

где флуктуации плотности δ_ρ обусловлены возмущением вида

$$H' = -\frac{e}{mc} A_x p_x, \quad A_x = A_{\mathbf{q}} e^{iq \cdot z} e^{-i\omega t} + \text{компл. сопр.}$$

Отметим, что величина $\sigma_{\mathbf{q}}$ вещественна даже при полном отсутствии столкновений ($\tau \to \infty$).

Литература

1. Pippard A. B., Trans. Roy. Soc. **A250**, 325 (1957).
2. Сб. «Low temperature physics», ed. by C. de Witt, a. o., N. Y., 1962.
3. Reuter G. E. H., Sondheimer E. H., Proc. Roy. Soc. **A195**, 336 (1948).
4. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, «Наука», 1966.
5. Mattis D. C., Bardeen J., Phys. Rev. **111**, 412 (1958).
6. Азбель М. И., Канер Э. А., ЖЭТФ **30**, 811 (1956).
7. Rodriguez S., Phys. Rev. **112**, 80 (1958).
8. Mattis D. C., Dresselhaus G., Phys. Rev. **111**, 403 (1958).
9. Rodriguez S., Phys. Rev. **112**, 1016 (1958).
10. Азбель М. И., Канер Э. А., ЖЭТФ **39**, 80 (1960).
11. Miller P. B., Haering R. R., Phys. Rev. **128**, 126 (1962).
12. Holstein T., Phys. Rev. **88**, 1427 (1952).
13. Bowers R., Legendy C., Rose F., Phys. Rev. Letts **7**, 339 (1961),
14. Dyson F. J., Phys. Rev. **98**, 349 (1955).