Аналогично, расстояние от точки A до оси y выражается отрезком l_y и расстояние от точки A до оси z – отрезком l_z (рис. 20).

Итак, *расстояния точки от плоскостей проекций и от осей проекций могут быть измерены непосредственно, как определенные отрезки на чертеже.* При этом должен быть учтен его масштаб.

Рассмотрим примеры построения третьей проекции точки по двум заданным. Пусть (рис. 21) точка B задана ее фронтальной и горизонтальной проекциями. Введя ось z (рис. 22:

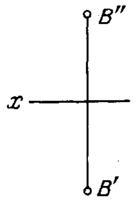

Рис. 21

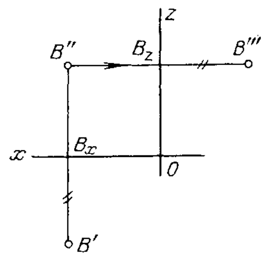

Рис. 22

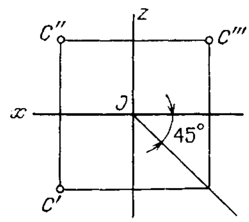

Рис. 23

расстояние OB_x произвольно, если нет каких-либо условий) и проведя через B'' линию связи, перпендикулярную к оси z, откладываем на ней вправо от этой оси отрезок $B'''B_z$, равный $B'B_x$.

На рис. 23 построена проекция C' по заданным проекциям C'' и C''' (ход построения указан стрелками).

ВОПРОСЫ К §§ 4–5

1. Что такое «система π_1, π_2» и как называются плоскости проекций π_1 и π_2?
2. Что называется осью проекций?
3. Как получается чертеж точки в системе π_1, π_2?
4. Что такое «система π_1, π_2, π_3» и как называется плоскость проекций π_3?
5. Что такое «линия связи»?
6. Как доказывается, что чертеж, содержащий две связанные между собой проекции в виде точек, выражает некоторую точку?
7. Как строится профильная проекция точки по ее фронтальной и горизонтальной проекциям?

§ 6. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ И СИСТЕМА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Модель положения точки в системе π_1, π_2, π_3 (рис. 16) аналогична модели, которую можно построить, зная прямоугольные координаты [1]) этой точки, т. е. числа, выражающие ее расстояния от трех взаимно перпендикулярных плоскостей – *плоскостей координат.* Прямые, по которым пересекаются плоскости координат, называются *осями координат.* Точка пересечения осей координат называется началом координат и обозначается буквой O [2]). Для осей координат будем применять обозначения, показанные на рис. 16.

Плоскости координат в своем пересечении образуют восемь трехгранных углов, деля пространство на восемь частей – восемь октантов [3]). На рис. 16 изображен один из октантов. Показано образование отрезков, определяющих координаты некоторой точки A: из точки A проведены перпендикуляры к каждой из плоскостей

[1]) Иначе – «декартовы координаты». Система координат Декарта может быть прямоугольной и косоугольной; здесь рассматривается прямоугольная система. Декарт (1596–1650) – французский математик и философ.

[2]) Начальная буква латинского слова «origo» – начало.

[3]) Octo (*лат.*) – восемь.

координат. Первая координата точки A, называемая ее *абсциссой* [1]), выразится числом, полученным от сравнения отрезка AA''' (или равного ему отрезка OA_x на оси x) с некоторым отрезком, принятым за единицу масштаба. Также отрезок AA'' (или равный ему отрезок OA_y на оси y) определит вторую координату точки A, называемую *ординатой* [2]); отрезок AA' (или равный ему отрезок OA_z на оси z) – третью координату, называемую *аппликатой* [3]).

При буквенном обозначении координат абсцисса указывается буквой x, ордината – буквой y, аппликата – буквой z.

Построенный на рис. 16 параллелепипед называют *параллелепипедом координат* данной точки A. Построение точки по заданным ее координатам сводится к построению трех ребер параллелепипеда координат, составляющих трехзвенную ломаную линию (рис. 24). Надо отложить последовательно отрезки OA_x, A_xA' и $A'A$ или OA_y, A_yA''' и $A'''A$ и т. п., т. е. точку A можно получить шестью комбинациями, в каждой из которых должны быть все три координаты.

На рис. 24 для наглядного изображения взята известная из курса черчения средней школы проекция, называемая *кабинетной* [4]). В ней оси x и z взаимно перпендикулярны, а ось y является продолжением биссектрисы угла xOz. В кабинетной проекции отрезки, откладываемые по оси y или параллельно ей, сокращаются вдвое.

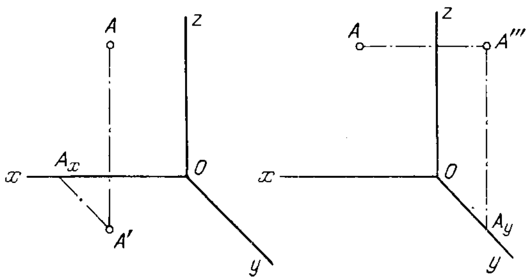

Рис. 24

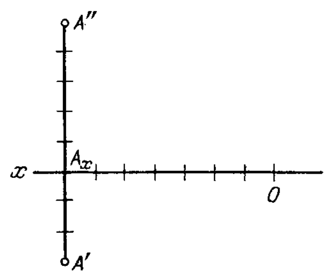

Рис. 25

Рис. 16 показывает, что построение проекций точки сопровождается построением отрезков, определяющих координаты этой точки, если принять плоскости проекций за плоскости координат. Каждая из проекций точки A определяется двумя координатами этой точки; например, положение проекции A' определяется координатами x и y.

Положим, дана точка A (7; 3; 5); эта запись означает, что точка A определяется координатами $x = 7$, $y = 3$, $z = 5$. Если масштаб для построения чертежа задан или выбран, то (рис. 25) откладывают на оси x от некоторой точки O отрезок OA_x, равный 7 единицам, и на перпендикуляре к этой оси, проведенном из точки A_x, отрезки $A_xA' = 3$ ед. и $A_xA'' = 5$ ед. Получаем проекции A' и A''. Для построения достаточно взять только ось x.

Принимая оси проекций за оси координат, можно найти координаты точки по данным ее проекциям. Например, на рис. 18 отрезок OA_x выражает абсциссу точки A, отрезок A_xA' – ее ординату, отрезок A_xA'' – аппликату.

Если задается лишь абсцисса, то этому соответствует плоскость, параллельная плоскости, определяемой осями y и z. Действительно, такая плоскость является геометрическим местом точек, у которых абсциссы равны заданной величине (рис. 26, плоскость α).

---

[1]) Abscissa (*лат.*) – отсеченная, отделенная.

[2]) Ordinata (*лат.*) – от ordinatim ducta (*лат.*) – подряд проведенная.

[3]) Applicata (*лат.*) – приложенная.

[4]) Кабинетная проекция относится к числу косоугольных (подробнее см. в § 75).

Если задаются две координаты, то этим определяется прямая, параллельная соответствующей координатной оси. Например, имея заданными абсциссу и ординату, получаем прямую, параллельную оси z (на рис. 26 это прямая AB). Она является линией пересечения двух плоскостей α и β, где β – геометрическое место точек с равными ординатами. Прямая AB служит геометрическим местом точек, у которых равны между собой абсциссы и равны между собой ординаты.

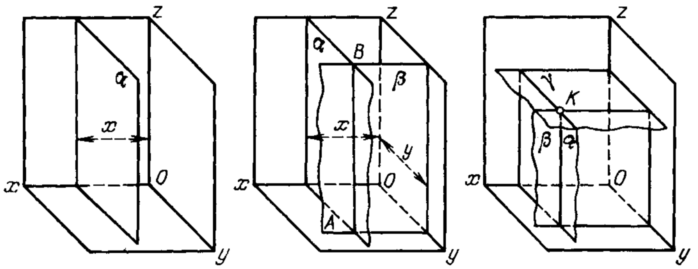

Рис. 26

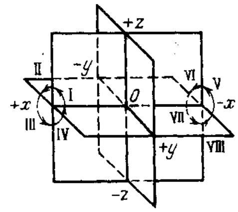

Рис. 27

Если задаются все три координаты, то этим определяется точка. На рис. 26 показана точка K, полученная в пересечении трех плоскостей, из которых α есть геометрическое место точек по заданной абсциссе, β – по заданной ординате и γ – по заданной аппликате.

Точка может находиться в любом из восьми октантов (нумерацию октантов см. на рис. 27). Следовательно, нужно знать не только расстояние данной точки от той или иной плоскости координат, но и направление, по которому надо это расстояние отложить; для этого координаты точек выражают относительными числами. Мы будем применять для отсчета координат систему знаков, указанную на рис. 27, т. е. будем применять систему координат, называемую «правой». Правая система характеризуется тем, что поворот на 90° «положительного» луча Ox (рис. 27) в сторону «положительного» луча Oy происходит против часовой стрелки (при условии, что мы смотрим на плоскость xOy сверху).

В системе, называемой «левой», «положительный» луч Ox направлен от точки O вправо.

При изображении тел обычно принимают в качестве плоскостей координат не плоскости проекций, а систему некоторых трех взаимно перпендикулярных плоскостей, непосредственно связанных с данным телом, например грани прямоугольного параллелепипеда, две грани и плоскость симметрии и т. п. Для такой системы координат встречается название «внутренняя».

§ 7. ТОЧКА В ЧЕТВЕРТЯХ И ОКТАНТАХ ПРОСТРАНСТВА

В § 4 было сказано, что плоскости π_1 и π_2 при пересечении образуют четыре двугранных угла; их называют *квадрантами* или *четвертями пространства*. На рис. 28 указан принятый порядок отсчета четвертей. Ось проекций делит каждую из плоскостей π_1 и π_2 на «пóлы» (полуплоскости), условно обозначенные π_1 и $-\pi_1$, π_2 и $-\pi_2$. Если, например, точка расположена во второй четверти, то горизонтальная проекция получается на $-\pi_1$, а фронтальная – на π_2.

В дальнейшем изложении за основу для построения чертежа точки в любой из четырех четвертей мы будем брать рисунок по типу 13 (см. с. 16).

Считают, что зритель всегда находится в первой четверти (условно – на бесконечно большом расстоянии от π_1 и от π_2). Плоскости проекций считают непрозрачными; поэтому видимы только точки, расположенные в первой четверти, а также на полуплоскостях π_1 и π_2.