

Строим профильную проекцию ( $A''B''$ ), определяем положение профильных проекций горизонтального следа ( $M''$ ) и фронтального следа ( $N''$ ) и затем находим положение остальных проекций этих следов (последовательность построения на чертеже показана стрелками).

### ВОПРОСЫ К §§ 10–12

1. При каком положении относительно плоскостей проекций прямая называется прямой общего положения?
2. Как доказывается, что чертеж, содержащий две связанные между собой проекции в виде отрезков прямой линии, выражает именно отрезок прямой линии?
3. Как выражается соотношение между проекцией отрезка прямой и самим отрезком?
4. Как расположена прямая в системе  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ , если все три проекции отрезка этой прямой равны между собой?
5. Как построить профильную проекцию отрезка прямой общего положения по данным фронтальной и горизонтальной проекциям?
6. Как выполнить построение по вопросу 5 на чертеже без осей проекций?
7. Какие положения прямой линии в системе  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  считаются «особыми» (иначе – «частными»)?
8. Как располагается фронтальная проекция отрезка прямой линии, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
9. Как располагается горизонтальная проекция отрезка прямой линии, если его фронтальная проекция равна самому отрезку?
10. Какое свойство параллельного проецирования касается отношения отрезков прямой линии?
11. Как разделить на чертеже отрезок прямой линии в заданном отношении?
12. Что называется следом прямой линии на плоскости проекций?
13. Какая координата равна нулю: а) для фронтального следа прямой, б) для горизонтального следа прямой?
14. Где располагается горизонтальная проекция фронтального следа прямой линии?
15. Где располагается фронтальная проекция горизонтального следа прямой линии?
16. Может ли быть случай, когда прямая линия в системе  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  имеет следы на каждой из этих плоскостей, сливающиеся в одну точку?

### § 13. ПОСТРОЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ И УГЛОВ НАКЛОНА ПРЯМОЙ К ПЛОСКОСТИМ ПРОЕКЦИЙ $\pi_1$ И $\pi_2$

Из рассмотрения левой части рис. 69 можно заключить, что отрезок  $AB$  является гипotenузой прямоугольного треугольника  $AB1$ , в котором один катет равен проекции отрезка ( $A1 = A^0B^0$ ), а другой катет равен разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций  $\pi_0$ .

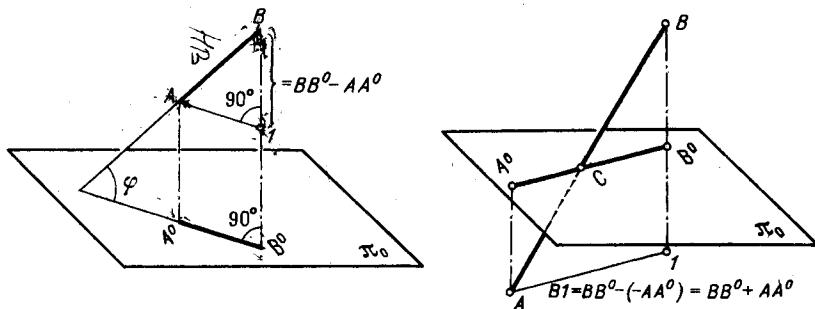


Рис. 69

Если координаты, определяющие расстояния концов отрезка от плоскости проекций, имеют разные знаки (рис. 69, справа), то надо иметь в виду разность алгебраическую:

$$BI = BB^0 - (-AA^0) = BB^0 + AA^0.$$

Угол прямой линии с плоскостью проекций определяется как угол, составленный прямой с ее проекцией на этой плоскости. Этот угол входит в тот же прямоугольный треугольник, который строят для определения натуральной величины отрезка.

Очевидно, зная по чертежу катеты треугольника, можно его построить в любом месте поля чертежа. На рис. 70 показано построение, примененное Г. Монжем:

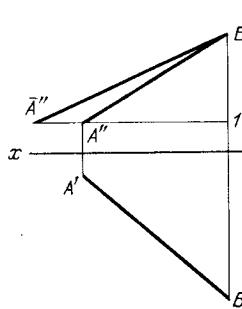


Рис. 70

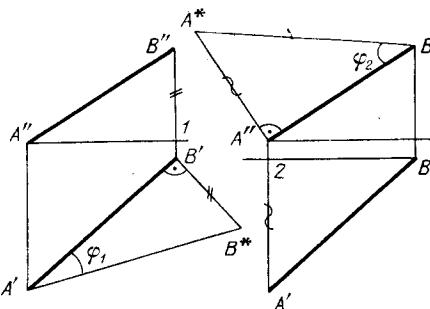


Рис. 71

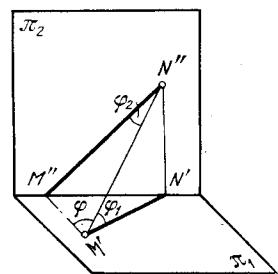


Рис. 72

от точки  $I$  отложен отрезок  $A'I$ , равный проекции  $A'B'$ , и проведена гипотенуза  $\bar{A}''B''$ , выражающая натуральную величину отрезка  $AB$ . Угол с вершиной в точке  $\bar{A}''$  равен углу между  $AB$  и пл.  $\pi_1$ .

На рис. 71 слева длина отрезка  $AB$  и угол, составленный прямой  $AB$  с пл.  $\pi_1$ , определены из прямоугольного треугольника, построенного на проекции  $A'B'$  при втором катете  $B'B^*$ , равном  $B''I$ .  $AB = A'B^*$ .

На рис. 71 справа длина отрезка и угол, составленный с пл.  $\pi_2$ , определены из прямоугольного треугольника, построенного на проекции  $A''B''$  ( $A''A^* = A'2$ ).  $AB = B''A^*$ .

Ограничены ли чем-либо углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  для прямой общего положения? Да, каждый из них может быть только острым. Но, кроме того, для прямой общего положения  $\varphi_1 + \varphi_2 < 90^\circ$ . Действительно (рис. 72), в прямоугольном треугольнике  $N''M''M'$  сумма углов  $\varphi + \varphi_2 = 90^\circ$ . Но в треугольниках  $N''M''M'$  и  $N''N'M'$  при общей гипотенузе  $N''M'$  катет  $N''M'$  больше катета  $N''N'$  и, следовательно,  $\varphi > \varphi_1$ . Подставляя в  $\varphi + \varphi_2 = 90^\circ$  угол  $\varphi_1$  вместо  $\varphi$ , получим  $\varphi_1 + \varphi_2 < 90^\circ$ .

Рассмотрим (рис. 71) прямоугольные треугольники  $A'B'B^*$  и  $A''B''A^*$ . В каждом из них гипотенуза выражает натуральную величину отрезка, а один из катетов является проекцией этого отрезка. Другой же катет равен разности расстояний концов отрезка от соответствующей плоскости проекций ( $B'B^* = B''I =$  разности расстояний от  $\pi_1$ , а  $A''A^* = A'2 =$  разности расстояний от  $\pi_2$ ). Кроме того, в одном из этих треугольников содержится угол между отрезком и пл.  $\pi_1$  (угол  $\varphi_1$ ), в другом – угол между отрезком и пл.  $\pi_2$  (угол  $\varphi_2$ ).

В данном случае нам были известны катеты и мы определяли гипотенузу и угол. Но может быть и такое положение: известны гипотенуза и угол, определить катеты (т. е. даны натуральная величина отрезка и углы, составляемые им с плоскостями проекций; построить проекции этого отрезка).

Положим (рис. 73), что  $AB$  есть заданный отрезок (на рис. 71 он соответствует гипотенузам  $A'B^*$  и  $B''A^*$ ). Построим на нем, как на диаметре, окружность. Приняв точку  $A$  за вершину, построим угол  $\varphi_1$  (т. е. заданный угол с пл.  $\pi_1$ ) и прямоугольный треугольник  $AIB$ . Из сравнения этого треугольника с треугольником  $A'B'B^*$  (рис. 71) следует, что катет  $AI$  выражает горизонтальную проекцию отрезка  $AB$ , а катет  $BI$  – разность расстояний концов отрезка  $AB$  от пл.  $\pi_1$ .

Построим (рис. 73) также прямоугольный треугольник  $A2B$  по той же гипотенузе  $AB$  и заданному углу  $\varphi_2$  с плоскостью проекций  $\pi_2$  и сравним его с треугольником  $B''A''A^*$  на рис. 71. Очевидно, катет  $B2$  выражает фронтальную проекцию заданного отрезка, а катет  $A2$  – разность расстояний концов отрезка от пл.  $\pi_2$ .

Теперь построим чертеж (рис. 74). Положим, что отрезок надо провести через точку  $B$  влево вниз на себя. Отложив на линии связи  $B''B'$  от точки  $B''$  отрезок  $B''I$ , равный  $B1$  (см. рис. 73), проведем через точку  $I$  прямую перпендикулярно к  $B''B'$ . Засекая эту прямую из точки  $B''$  дугой, радиус которой должен равняться фронтальной проекции, т. е. отрезку  $B2$ , получим точку  $A''$ . Чтобы найти горизонтальную проекцию  $A'$ , можно засечь линию связи,

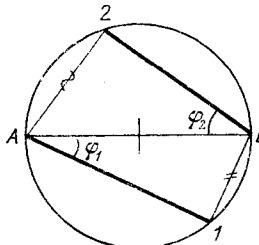


Рис. 73

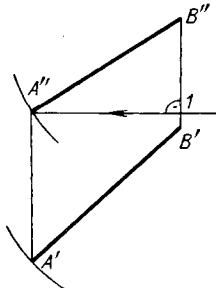


Рис. 74

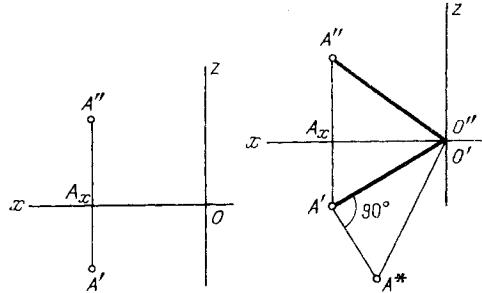


Рис. 75

проведенную через точку  $A''$ , дугой, радиус которой равен  $A1$  (см. рис. 73). При этом должно получиться  $A''A' = B'I = A2$ .

На рис. 74 дано лишь одно положение отрезка. Но может быть еще семь других положений при начальной точке  $B$ . Предоставляем читателю изобразить отрезок  $AB$  и в этих положениях.

На рис. 75 дан пример определения расстояния от точки  $A$  до точки  $O$ . Сначала построены проекции искомого отрезка –  $A''O''$  и  $A'O'$  (точка  $O$  выражена ее проекциями  $O''$  и  $O'$ ). Затем построен треугольник  $A'O'A^*$ , один катет которого – проекция  $A'O'$ , другой – отрезок  $A'A^* = A''A_x$ . Искомое расстояние определяется гипотенузой  $O'A^*$ .

Теперь мы можем определить угол, составляемый прямой, равнонаклоненной к плоскостям  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ , с этими плоскостями. Об этом говорилось в § 10, и была указана его величина ( $\approx 35^\circ$ ). Ее можно определить, если рассмотреть хотя

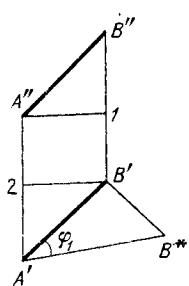


Рис. 76

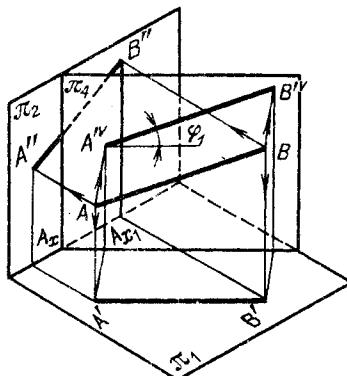
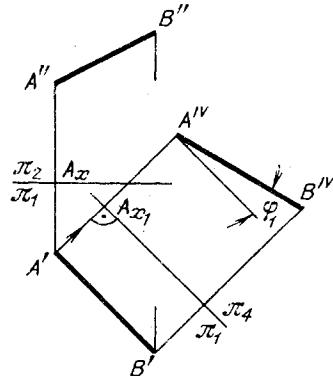


Рис. 77



бы рис. 76: проекции  $A''B''$  и  $A'B'$  равны между собой, и углы  $A''B''I$  и  $2A'B'$  равны каждый  $45^\circ$  (см. § 10).

Искомый угол определен из прямоугольного треугольника  $A'B'B^*$ , в котором катет  $B'B^* = B'I$ . Если принять  $B'I$  равным единице, то  $A'B' = A''B'' = \sqrt{2}$  и угол  $\phi_1 \approx 35^\circ 15'$ . Таковы же углы между этой прямой и плоскостями  $\pi_2$  и  $\pi_3$ .

Если применить то, что было сказано в § 8; т. е. дополнить систему  $\pi_1, \pi_2$  системой  $\pi_4, \pi_1$ , выбрав пл.  $\pi_4 \perp \pi_1$  и параллельно заданному на чертеже отрезку прямой линии, то, очевидно, проекция этого отрезка на пл.  $\pi_4$  выразит его натуральную величину и угол с пл.  $\pi_1$ .

Положим (рис. 77), требуется определить натуральную величину отрезка  $AB$  и угол его с пл.  $\pi_1$ . В систему  $\pi_1, \pi_2$  введена пл.  $\pi_4 \perp \pi_1$  так, что  $\pi_4 \parallel AB$ . Возникла дополнительная система  $\pi_4, \pi_1$ . В ней  $AB \parallel \pi_4$  (ось  $\pi_4/\pi_1 \parallel A'B'$ ); проекция  $A''B''$  выражает натуральную величину отрезка  $AB$ .

#### § 14. ВЗАЙМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

**Параллельные прямые.** К числу свойств параллельного проецирования относится следующее: *проекции двух параллельных прямых параллельны между собой*. Если (рис. 78) прямая  $AB$  параллельна прямой  $CD$ , то проецирующие плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны между собой и при пересечении этих плоскостей с плоскостью проекций  $\pi_0$  получаются параллельные между собой проекции  $A^0B^0$  и  $C^0D^0$ .

Однако, хотя  $A^0B^0 \parallel C^0D^0$  (рис. 78), прямые, для которых  $A^0B^0$  и  $C^0D^0$  являются проекциями, могут быть не параллельны между собой: например, прямая  $AB$  не параллельна прямой  $C_1D_1$ .

Из указанного свойства параллельного проецирования следует, что *горизонтальные проекции параллельных прямых параллельны между собой, фронтальные проекции параллельны между собой и профильные проекции параллельны между собой*.

Справедливо ли обратное заключение, т. е. будут ли параллельны две прямые в пространстве, если на чертеже их одноименные проекции попарно параллельны?

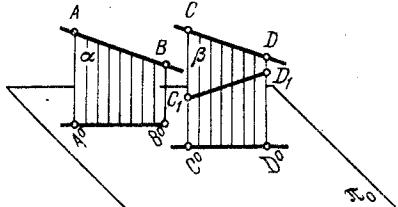


Рис. 78

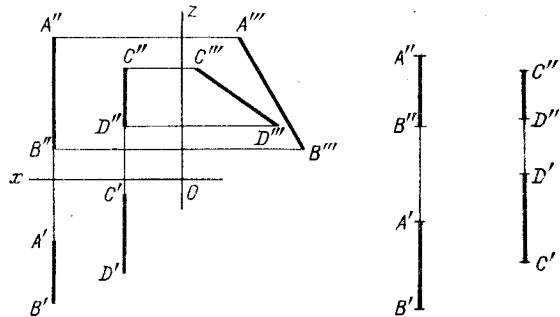


Рис. 79

Рис. 80

Да, если даны параллельные между собой проекции на каждой из трех плоскостей проекций  $\pi_1, \pi_2$  и  $\pi_3$ . Но если даны параллельные между собой проекции прямых лишь на двух плоскостях проекций, то этим параллельность прямых в пространстве подтверждается всегда для прямых общего положения и может не подтверждаться для прямых, параллельных одной из плоскостей проекций.

Пример дан на рис. 79. Хотя профильные прямые  $AB$  и  $CD$  заданы проекциями  $A'B'$ ,  $A''B''$  и  $C'D'$ ,  $C''D''$ , между собой параллельными, но самые прямые не параллельны — это видно из взаимного расположения их профильных проекций, построенных по заданным проекциям.

Итак, вопрос был решен при помощи проекций прямых на той плоскости проекций, по отношению к которой данные прямые параллельны.

На рис. 80 показан случай, когда можно установить, что профильные прямые  $AB$  и  $CD$  не параллельны между собой, не прибегая к построению третьей