Изображенные на рис. 84 пересекающиеся прямые расположены в общей для них проецирующей плоскости, перпендикулярной к пл. π_2. Поэтому фронтальные проекции этих прямых расположены на одной прямой.

Скрещивающиеся прямые. Скрещивающиеся прямые линии не пересекаются и не параллельны между собой. На рис. 86 изображены две скрещивающиеся прямые общего положения: хотя одноименные проекции и пересекаются между собой, но точки их пересечения не могут быть соединены линией связи, параллельной линиям связи $L''L'$ и $M''M'$, т. е. эти прямые не пересекаются между собой. Прямые, изображенные на рис. 79, 80 и 85, также скрещивающиеся.

Как надо рассматривать точку пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых? Она представляет собой проекции двух точек, из которых одна

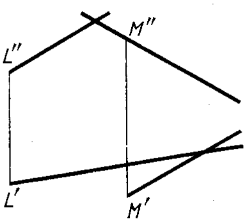

Рис. 86

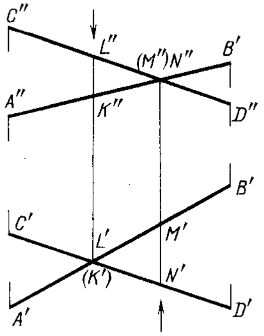

Рис. 87

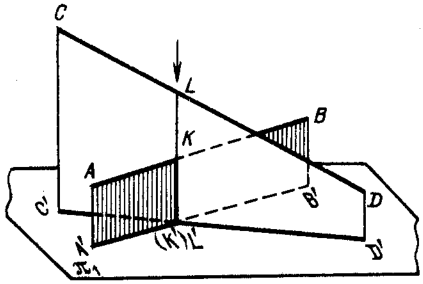

Рис. 88

принадлежит первой, а другая – второй из этих скрещивающихся прямых. Например, на рис. 87 точка с проекциями K'' и K' принадлежит прямой AB, а точка с проекциями L'' и L' принадлежит прямой CD. Эти точки одинаково удалены от пл. π_2, но расстояния их от пл. π_1 различны: точка с проекциями L'' и L' дальше от π_1, чем точка с проекциями K'' и K' (рис. 88).

Точки с проекциями M'', M' и N'', N' одинаково удалены от пл. π_1, но расстояния этих точек от пл. π_2 различны.

Точка с проекциями L'' и L', принадлежащая прямой CD, закрывает собой точку с проекциями K'' и K' прямой AB по отношению к пл. π_1; соответствующее направление взгляда показано стрелкой у проекции L''. По отношению к пл. π_2 точка с проекциями N'' и N' прямой CD закрывает собой точку с проекциями M'' и M' прямой AB; направление взгляда указано стрелкой внизу, у проекции N'.

Обозначения проекций «закрытых» точек помещены в скобках[1]).

§ 15. О ПРОЕКЦИЯХ ПЛОСКИХ УГЛОВ

1. *Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость проекций в виде прямой линии.*

2. *Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.*

Положим, что сторона CB прямого угла ACB (рис. 89) параллельна плоскости проекций. В таком случае прямая CB параллельна C^0B^0. Пусть вторая сторона (AC) прямого угла пересекает свою проекцию A^0C^0 в точке K. Проводим в плоскости проекций через точку K прямую параллельно C^0B^0. Прямая KL также параллель-

[1]) Для точек, принадлежащих скрещивающимся прямым и расположенных на одной и той же проецирующей прямой, встречается название «конкурирующие».

на CB, и угол CKL получается прямым. Согласно теореме о трех перпендикулярах угол C^0KL – также прямой [1]). Следовательно, и угол $A^0C^0B^0$ – прямой.

Этой теореме о проецировании прямого угла соответствуют две обратные (пп. 3 и 4).

3. *Если проекция плоского угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что по крайней мере одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций.*

4. *Если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, представляет собой прямой угол, то проецируемый угол тоже прямой* [2]).

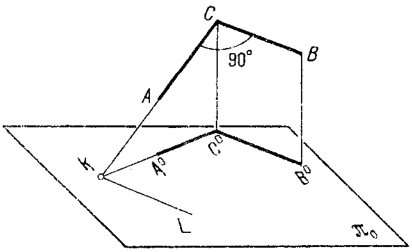

Рис. 89

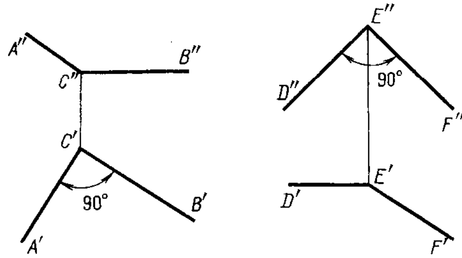

Рис. 90

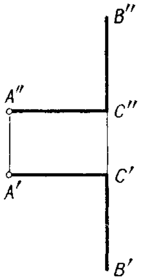

Рис. 91

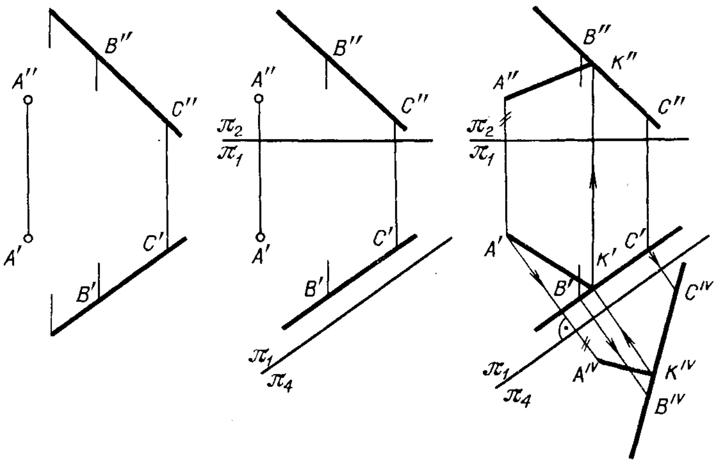

Рис. 92

На основании изложенного можно установить, что углы, изображенные на рис. 90, в пространстве прямые.

В каком случае проекции прямого угла на двух плоскостях проекций представляют собой прямые углы? Это бывает, когда одна сторона прямого угла перпендикулярна к третьей плоскости проекций (тогда другая его сторона параллельна этой плоскости). Пример дан на рис. 91: сторона AC перпендикулярна к π_3, сторона BC параллельна π_3.

Пользуясь сведениями о проецировании прямого угла, о дополнении системы π_1, π_2 системой π_4, π_1 (§ 8) и о расположении проекций прямой, параллельной одной из плоскостей проекций (§ 11), мы можем выполнить следующее построение: провести через некоторую точку A прямую так, чтобы она пересекла данную прямую под углом 90°. Решение показано на рис. 92, где слева дано исходное положение, в середине показано образование, кроме си-

[1]) Согласно прямой теореме о трех перпендикулярах: если $KL \perp C^0K$, то $KL \perp CK$. Согласно обратной теореме: если $KL \perp CK$, то $KL \perp C^0K$.

[2]) Интересующихся доказательством обратных теорем отсылаем к предыдущим изданиям книги.

стемы π_1, π_2, еще одной системы π_4, π_1, причем пл. $\pi_4 \parallel BC$, а справа выполнено построение прямой $AK \perp BC$.

Так как пл. $\pi_4 \parallel BC$, что обеспечивается проведением оси π_4/π_1 параллельно $B'C'$, то прямой угол AKB (или AKC) проецируется на пл. π_4 в виде прямого же угла $A^{IV}K^{IV}B^{IV}$. Построив проекции точки A и прямой BC на пл. π_4, проводим $A^{IV}K^{IV} \perp B^{IV}C^{IV}$, а затем получаем проекции K' и K'' и проекции $A'K'$ и $A''K''$ (ход построения указан стрелками).

Можно ли считать, что, построив перпендикуляр AK к прямой BC, мы определили расстояние от A до BC? Нет, мы только построили проекции отрезка AK; ни одна из них не определяет величины расстояния. Если надо определить величину отрезка AK, т. е. расстояние от A до BC, то надо продолжить построение, применив хотя бы способ, изложенный в § 13.

5. *Если плоскость тупого или острого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна сторона угла параллельна плоскости проекций, то проекция тупого угла на эту плоскость представляет собой тупой угол, а проекция острого угла — острый угол.*

Предположим, что прямая CB (рис. 93) параллельна плоскости проекций. Рассмотрим тупой угол KCB или острый угол MCB и проведем в плоскости этого угла прямую $CL \perp CB$. Так как угол LCB — прямой, то его проекция — угол LC^0B^0

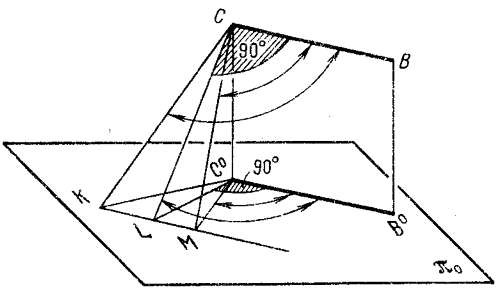

Рис. 93

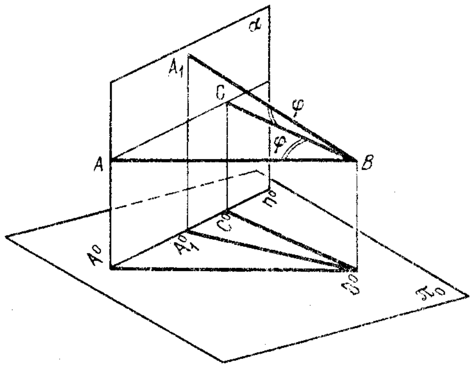

Рис. 94

представляет собой также прямой угол. Этот угол заключен внутри угла KC^0B^0 и заключает внутри себя угол MC^0B^0, следовательно, угол KC^0B^0 — тупой, а угол MC^0B^0 — острый. Таким образом, проекция угла представляет собой угол с тем же названием (прямой, тупой или острый), что и сам угол, если хотя бы одна сторона угла параллельна плоскости проекций. Вообще же проекция любого угла может представлять собой или острый, или прямой, или тупой угол, в зависимости от положения угла относительно плоскости проекций.

6. *Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то его проекция равна по величине проецируемому углу.*

Это следует из равенства углов с параллельными и одинаково направленными сторонами.

Поэтому, например, угол между прямой AB (рис. 50, с. 27) и пл. π_2 легко определить: это — угол между проекцией $A'B'$ и осью x; таким же образом угол между CD и пл. π_1 (рис. 51) определится как угол между $C''D''$ и осью x, угол между EF (рис. 52) и пл. π_2 — как угол между $E'''F'''$ и осью z.

Для прямого угла равенство между его проекцией и самим углом имеет место и тогда, когда лишь одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций.

Но для острого или тупого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, проекция угла не может равняться проецируемому углу. При этом проекция *острого* угла меньше проецируемого угла, а проекция *тупого* больше проецируемого угла.

Пусть (рис. 94) угол A_1BC — острый и его сторона CB параллельна пл. π_0; $C^0B^0 \parallel CB$. Пл. α, проведенная через точку C перпендикулярно к CB, перпендикулярна к пл. π_0, пересекая последнюю по прямой n^0, проходящей через C^0 и перпендикулярной к C^0B^0. Если провести через точку B различные прямые под тем же самым острым углом к прямой CB, то все эти прямые будут пересекать пл. α в точках, проекции которых расположатся на прямой n^0. Положим, что прямые AB и A_1B составляют с прямой CB равные между собой углы: $\angle ABC = \angle A_1BC$. Если при этом AB параллельна плоскости π_0, то $\angle A^0B^0C^0 = \angle ABC$. Если же сторона A_1B не параллельна π_0, то проекция точки A_1 получится на прямой n^0 ближе к C^0, чем проекция точки A. Следовательно, проекция угла A_1BC представляет собой угол, *меньший* угла $A^0B^0C^0$, т. е. $\angle A_1^0B^0C^0 < \angle A_1BC$.

7. *Если стороны угла параллельны плоскости проекций или одинаково наклонены к ней, то деление проекции угла на этой плоскости пополам соответствует делению пополам и самого угла в пространстве.*

8. *Деление угла в пространстве пополам соответствует делению пополам и его проекции только при условии, что стороны угла составляют с плоскостью проекций равные углы*[1]).

9. *Если стороны угла одинаково наклонены к плоскости проекций, то угол-проекция не может равняться проецируемому углу.*

Это (рис. 95) можно установить путем совмещения угла MKN с пл. π_0 при вращении вокруг прямой MN. При этом угол MK^0N окажется внутри угла MK_1N, а вершины K_1 и K^0 – на общем перпендикуляре к MN.

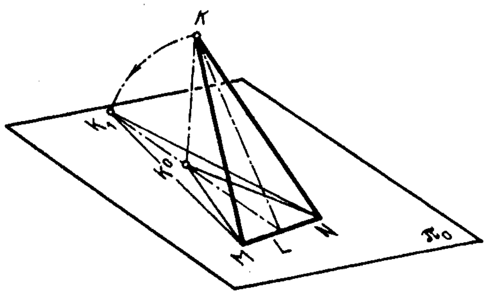

Рис. 95

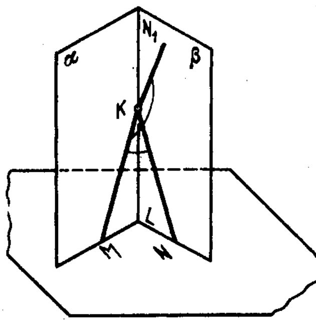

Рис. 96

10. *Проекции острого и тупого углов могут равняться проецируемому углу не только при условии параллельности сторон угла плоскости проекций.*

Из рис. 96 видно, что все углы, например острый угол MKN и тупой угол MKN_1, стороны которых соответственно расположены в проецирующих плоскостях α и β, имеют своей проекцией угол, равный углу MLN, причем эти углы могут приближаться к 0° и к 180°. Очевидно, среди этих углов может оказаться угол, равный своей проекции.

Пример построения такого угла дан в § 38.

ВОПРОСЫ К §§ 13–15

1. Как построить на чертеже прямоугольные треугольники для определения длины отрезка прямой линии общего положения и ее углов с плоскостями проекций π_1 и π_2?

2. Каким условиям должны отвечать углы между прямой общего положения и плоскостями проекций π_1 и π_2?

3. Какое свойство параллельного проецирования относится к параллельным прямым?

[1]) Интересующихся доказательством положений 7 и 8 отсылаем к предыдущим изданиям книги.

4. Можно ли по чертежу двух профильных прямых в системе π_1, π_2 определить, параллельны ли между собой эти прямые?

5. Как изображаются в системе π_1, π_2 две пересекающиеся прямые линии?

6. Как следует истолковывать точку пересечения проекций двух скрещивающихся прямых?

7. В каком случае прямой угол проецируется в виде прямого угла?

8. В каком случае проекция тупого или острого угла обязательно является углом с тем же названием (тупой или острый)?

9. Может ли проекция острого или тупого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, равняться самому углу в пространстве?

10. В каком случае деление проекции угла пополам соответствует такому делению самого угла в пространстве?

11. Может ли угол-проекция на некоторой плоскости проекций равняться проецируемому углу, стороны которого составляют с этой плоскостью равные углы?

12. Может ли острый или тупой угол, стороны которого не параллельны плоскости проекций, равняться своей проекции на этой плоскости?