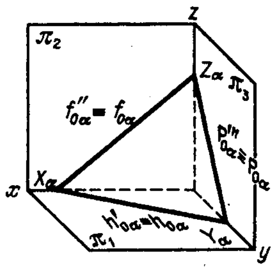

Рис. 105

две грани которого совпадают с плоскостями проекций (рис. 103). Но сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла. Поэтому угол, образованный следами $f''_{0\alpha}$ и $h'_{0\alpha}$ на чертеже (рис. 104), всегда больше угла между этими следами в пространстве.

Если рассматривать плоскость в системе π_1, π_2, π_3, то в общем случае плоскость пересечет каждую из осей проекций (рис. 105: пл. α пересекает оси x, y и z). Такая плоскость называется *плоскостью общего положения*. След $p'''_{0\alpha} \equiv p_{0\alpha}$ называется *профильным следом плоскости*.

Так как точки X_α, Y_α и Z_α лежат соответственно на осях x, y и z, то для построения чертежа плоскости в системе π_1, π_2, π_3 достаточно иметь заданными отрезки OX_α, OY_α и OZ_α, т. е. знать координаты точек X_α, Y_α и Z_α в системе осей x, y, z. Дело сводится лишь к одной координате для каждой из этих точек, так как две другие координаты равны нулю. Например, для построения точки Z_α надо знать лишь ее аппликату: абсцисса и ордината этой точки равны нулю.

§ 18. ПРЯМАЯ И ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ. ПРЯМЫЕ ОСОБОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Как построить на чертеже прямую линию, лежащую в заданной плоскости? Это построение основано на двух положениях, известных из геометрии.

1) *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.*

2) *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или параллельной ей.*

Положим, что пл. α (рис. 106) определена двумя пересекающимися прямыми AB и CB, а пл. β – двумя параллельными – DE и FG. Согласно первому положе-

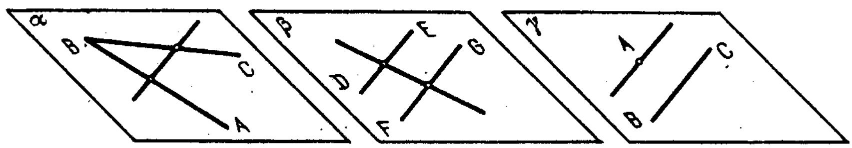

Рис. 106

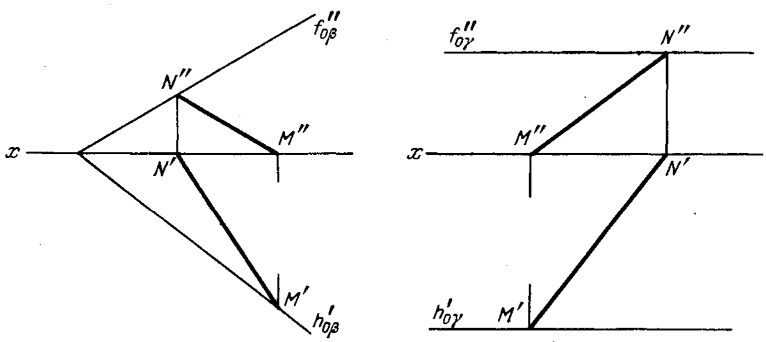

Рис. 107

нию прямая, пересекающая прямые, определяющие плоскость, находится в данной плоскости.

Отсюда вытекает, что если плоскость задана следами, то *прямая принадлежит плоскости, если следы прямой находятся на одноименных с ними следах плоскости* (рис. 107).

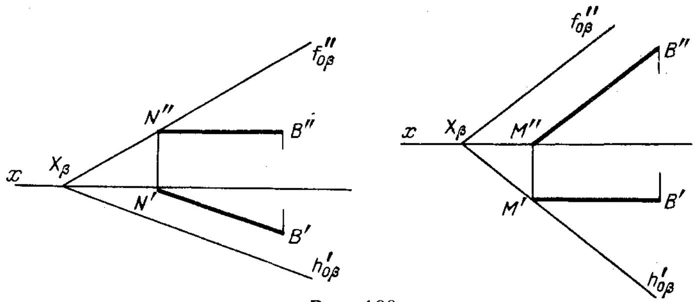

Рис. 108

Положим, что пл. γ (рис. 106) определяется точкой A и прямой BC. Согласно второму положению прямая, проведенная через точку A параллельно прямой BC, принадлежит пл. γ. Отсюда *прямая принадлежит плоскости, если она параллельна одному из следов этой плоскости и имеет с другим следом общую точку* (рис. 108).

Примеры построений на рис. 107 и 108 не должны быть поняты так, что для построения прямой в плоскости надо предварительно строить следы этой плоскости. Это не требуется.

Например, на рис. 109 выполнено построение прямой AM в плоскости, заданной точкой A и прямой, проходящей через точку L. Положим, что прямая AM должна быть параллельна пл. π_1. Построение начато с проведения проекции $A''M''$ перпендикулярно к линии связи $A''A'$. По точке M'' найдена точка M', и затем проведена проекция $A'M'$. Прямая AM отвечает условию: она параллельна пл. π_1 и лежит в данной плоскости, так как проходит через две точки (A и M), заведомо принадлежащие этой плоскости.

Как построить на чертеже точку, лежащую в заданной плоскости? Для того чтобы сделать это, *предварительно строят прямую, лежащую в заданной плоскости, и на этой прямой берут точку.*

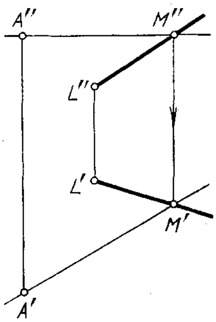

Рис. 109

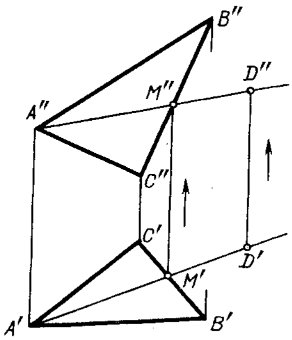

Рис. 110

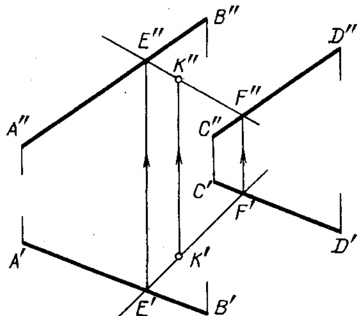

Рис. 111

Например, требуется найти фронтальную проекцию точки D, если задана ее горизонтальная проекция D' и известно, что точка D должна лежать в плоскости, определяемой треугольником ABC (рис. 110).

Сначала строят горизонтальную проекцию некоторой прямой так, чтобы точка D могла оказаться на этой прямой, а последняя была бы расположена в данной плоскости. Для этого проводят прямую через точки A' и D' и отмечают точку M', в которой прямая $A'D'$ пересекает отрезок $B'C'$. Построив фронтальную проекцию M'' на $B''C''$, получают прямую AM, расположенную в данной плоскости: эта прямая проходит через точки A и M, из которых первая заведомо принадлежит данной плоскости, а вторая в ней построена.

Искомая фронтальная проекция D'' точки D должна быть на фронтальной проекции прямой AM.

Другой пример дан на рис. 111. В пл. β, заданной параллельными прямыми AB и CD, должна находиться точка K, для которой дана лишь горизонтальная проекция — точка K

Через точку K' проведена некоторая прямая, принимаемая в качестве горизонтальной проекции прямой в данной плоскости. По точкам E' и F' строим E'' на $A''B''$ и F'' на $C''D''$. Построенная прямая EF принадлежит пл. β, так как проходит через точки E и F, заведомо принадлежащие плоскости. Если взять точку K'' на $E''F''$, то точка K окажется в пл. β.

К числу прямых, занимающих особое положение в плоскости, отнесем *горизонтали, фронтали*[1]) и *линии наибольшего наклона к плоскостям проекций*. Линию наибольшего наклона к пл. π_1 будем называть *линией ската плоскости*[2]).

Горизонталями плоскости называются прямые, лежащие в ней и параллельные горизонтальной плоскости проекций.

Построим горизонталь плоскости, заданной треугольником ABC. Требуется провести горизонталь через вершину A (рис. 112).

Так как горизонталь плоскости есть прямая, параллельная пл. π_1, то фронтальную проекцию этой прямой получим, проведя $A''K'' \perp A''A'$. Для построения горизонтальной проекции этой горизонтали строим точку K' и проводим прямую через точки A' и K'.

Построенная прямая AK действительно является горизонталью данной плоскости: эта прямая лежит в плоскости, так как проходит через две точки, заведомо ей принадлежащие, и параллельна плоскости проекций π_1.

Теперь рассмотрим построение горизонтали плоскости, заданной следами.

Горизонтальный след плоскости есть одна из ее горизонталей («нулевая» горизонталь). Поэтому построение какой-либо из горизонталей плоскости сводится

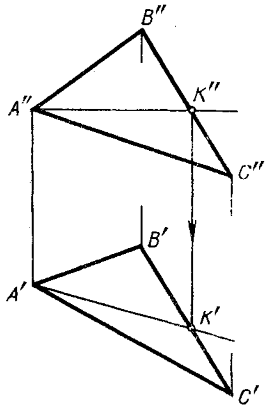

Рис. 112

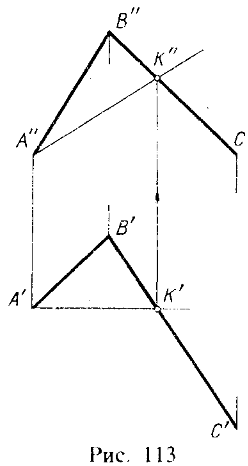

Рис. 113

к проведению в этой плоскости прямой, параллельной горизонтальному следу плоскости (рис. 108, слева). Горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости; фронтальная проекция горизонтали параллельна оси проекций.

Фронталями плоскости называются прямые, лежащие в ней и параллельные плоскости проекций π_2.

Пример построения фронтали в плоскости дан на рис. 113. Построение выполнено аналогично построению горизонтали (см. рис. 112).

Пусть фронталь проходит через точку A (рис. 113). Начинаем построение с проведения горизонтальной проекции фронтали — прямой $A'K'$, так как направление

---

[1]) Наряду с горизонталями и фронталями плоскости можно рассматривать также ее профильные прямые — прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные пл. π_3. Для горизонталей, фронталей и профильных прямых встречается общее название — линия уровня. Однако такое название отвечает обычному представлению только о горизонтальности.

[2]) Для линии ската плоскости распространено название «линия наибольшего ската», но понятие «скат» по отношению к плоскости не требует добавления «наибольший».

этой проекции известно: $A'K' \perp A''A'$. Затем строим фронтальную проекцию фронтали – прямую $A''K''$.

Построенная прямая действительно является фронталью данной плоскости: эта прямая лежит в плоскости, так как проходит через две точки, заведомо ей принадлежащие, и параллельна пл. π_2.

Построим теперь фронталь плоскости, заданной следами. Рассматривая рис. 108, справа, на котором изображена пл. β и прямая MB, устанавливаем, что эта прямая – фронталь плоскости. Действительно, она параллельна фронтальному следу («нулевой» фронтали) плоскости. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси x, фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости.

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям π_1, π_2 и π_3 называются прямые, лежащие в ней и перпендикулярные или к горизонталям плоскости, или к ее фронталям, или к ее профильным прямым. В первом случае определяется наклон к пл. π_1, во втором – к пл. π_2, в третьем – к пл. π_3. Для проведения линий наибольшего наклона плоскости можно, конечно, соответственно брать ее следы.

Как было сказано выше, линия наибольшего наклона плоскости к пл. π_1 называется *линией ската плоскости*.

Согласно правилам проецирования прямого угла (см. § 15) горизонтальная проекция линии ската плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости или к ее горизонтальному следу. Фронтальная проекция линии ската строится после горизонтальной и может занимать различные положения в зависимости от задания плоскости. На рис. 114 изображена линия ската пл. α: $BK \perp h'_{0\alpha}$. Так как $B'K$ также перпендикулярна к $h'_{0\alpha}$, то $\angle BKB'$ есть линейный угол

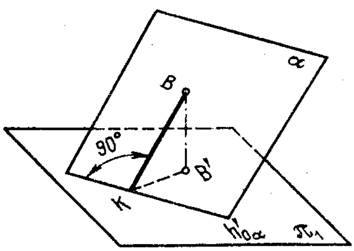

Рис. 114

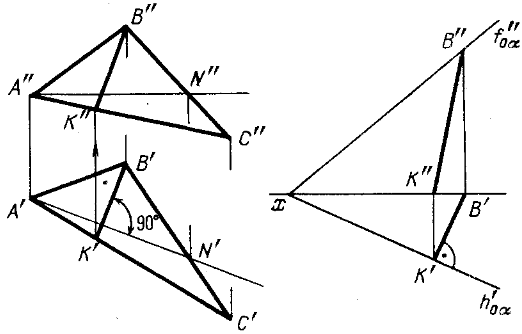

Рис. 115

двугранного, образованного плоскостями α и π_1. Следовательно, *линия ската плоскости может служить для определения угла наклона этой плоскости к плоскости проекций π_1.*

Аналогично, линия наибольшего наклона плоскости к пл. π_2 служит для определения угла между этой плоскостью и пл. π_2, а линия наибольшего наклона к пл. π_3 – для определения угла с пл. π_3.

На рис. 115 построены линии ската в заданных плоскостях. Угол пл. α с пл. π_1 выражен проекциями – фронтальной в виде угла $B''K''B'$ и горизонтальной в виде отрезка $K'B'$. Определить величину этого угла можно, построив прямоугольный треугольник по катетам, равным $K'B'$ и $B''B'$.

Очевидно, линия наибольшего наклона плоскости определяет положение этой плоскости. Например, если (рис. 115) задана линия ската KB, то, проведя перпендикулярную к ней горизонтальную прямую AN или задавшись осью проекций x и проведя $h'_{0\alpha} \perp K'B'$, мы вполне определяем плоскость, для которой KB является линией ската.

Рассмотренные нами прямые особого положения в плоскости, главным образом горизонтали и фронтали, весьма часто применяются в различных построениях и при решении задач. Это объясняется значительной простотой построения указанных прямых; их поэтому удобно применять в качестве вспомогательных.

На рис. 116 была задана горизонтальная проекция K' точки K. Требовалось найти фронтальную проекцию K'', если точка K должна быть в плоскости, заданной двумя параллельными прямыми, проведенными из точек A и B.

Сначала была проведена некоторая прямая линия, проходящая через точку K и лежащая в заданной плоскости. В качестве такой прямой выбрана фронталь MN: ее горизонтальная проекция проведена через данную проекцию K'. Затем построены точки M'' и N'', определяющие фронтальную проекцию фронтали.

Искомая проекция K'' должна находиться на прямой $M''N''$.

На рис. 117 слева по данной фронтальной проекции A'' точки A, принадлежащей пл. α, найдена ее горизонтальная проекция (A'); построение произведено при помощи горизонтали EK. На рис. 117 справа аналогичная задача решена при помощи фронтали MN.

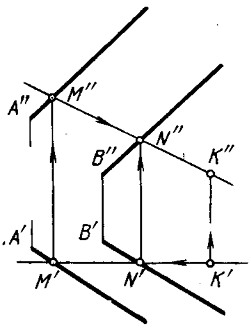

Рис. 116

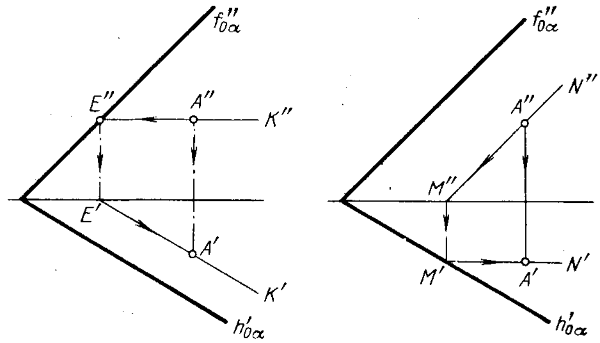

Рис. 117

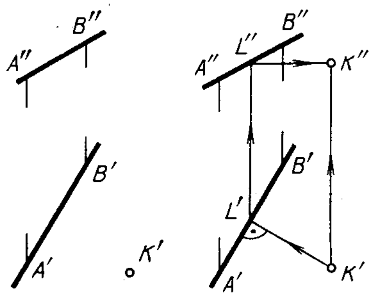

Рис. 118

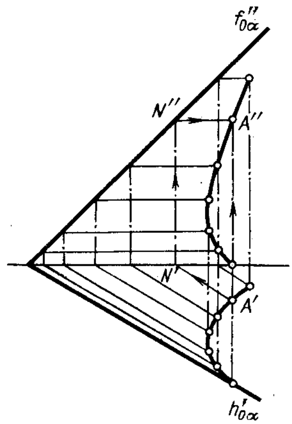

Рис. 119

Еще один пример построения недостающей проекции точки, принадлежащей некоторой плоскости, дан на рис. 118. Слева показано задание: линия ската плоскости (AB) и горизонтальная проекция точки (K'). Справа на рис. 118 показано построение: через точку K' проведена (перпендикулярная к $A'B'$) горизонтальная проекция горизонтали, на которой должна лежать точка K, по точке L'' найдена фронтальная проекция этой горизонтали и на ней искомая проекция K''.

На рис. 119 дан пример построения второй проекции некоторой плоской кривой, если известна одна проекция (горизонтальная) и пл. α, в которой эта кривая расположена. Взяв на горизонтальной проекции кривой ряд точек, находим при помощи горизонталей точки для построения фронтальной проекции кривой.

Стрелками показан ход построения фронтальной проекции A'' по горизонтальной проекции A'.

ВОПРОСЫ К §§ 16–18

1. Как задается плоскость на чертеже?
2. Что такое след плоскости на плоскости проекций?
3. Где располагаются фронтальная проекция горизонтального следа и горизонтальная проекция фронтального следа плоскости?
4. Как определяется на чертеже, принадлежит ли прямая данной плоскости?
5. Как построить на чертеже точку, принадлежащую данной плоскости?
6. Что такое фронталь, горизонталь и линия ската плоскости?
7. Может ли служить линия ската плоскости для определения угла наклона этой плоскости к плоскости проекций π_1?
8. Определяет ли прямая линия плоскость, для которой эта прямая является линией ската?

§ 19. ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Возможны следующие положения плоскости относительно плоскостей проекций π_1, π_2, π_3: 1) *плоскость не перпендикулярна ни к одной из плоскостей проекций,* 2) *плоскость перпендикулярна лишь к одной из них,* 3) *плоскость перпендикулярна к двум плоскостям проекций.*

Плоскости второго и третьего положений носят общее название «проецирующие плоскости».

1. *Плоскость, не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, является плоскостью общего положения* (см. рис. 105).

Рассмотрим, например, плоскость, изображенную на рис. 112.

Эта плоскость не перпендикулярна ни к π_1, ни к π_2, ни к π_3. То, что она не перпендикулярна ни к π_1, ни к π_2, подтверждается видом проекций $A'B'C'$ и $A''B''C''$: если бы плоскость, определяемая треугольником ABC, была перпендикулярна хотя бы к π_1, то (рис. 120) проекция $A'B'C'$ представляла бы собой отрезок прямой.

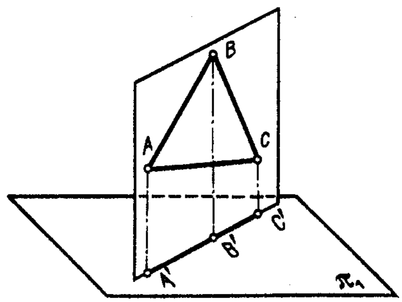

Рис. 120

Итак, рассматриваемая нами плоскость не перпендикулярна ни к π_1, ни к π_2. Но, может быть, эта плоскость перпендикулярна к π_3? Нет, горизонталь этой плоскости AK не перпендикулярна к π_3 (сравните с рис. 54, где показана прямая, перпендикулярная к π_3), и, следовательно, пл. ABC не перпендикулярна к π_3.

Итак, на рис. 112 дан пример задания плоскости общего положения в системе π_1, π_2.

Другими примерами задания плоскости общего положения служат рис. 109, 110, 111, 113, 116, а также рис. 102, 104, 107, слева, 108, 115, справа, 117, 119, на которых плоскости выражены следами. *Плоскость общего положения* (см. рис. 105) *пересекает каждую из осей x, y, z. Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к этим осям проекций.*

Если следы плоскости общего положения $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ образуют с осью x одинаковые углы, то это означает, что углы между пл. α и плоскостями π_1 и π_2 равны между собой. Действительно, если плоские углы трехгранного угла равны между собой, то равны и лежащие против них двугранные углы; углы, образуемые следами $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ с осью x (см. рис. 105), представляют собой плоские углы, против которых соответственно расположены двугранные углы, образуемые пл. α с плоскостями π_2 и π_1.