

1. Как задается плоскость на чертеже?
2. Что такое след плоскости на плоскости проекций?
3. Где располагаются фронтальная проекция горизонтального следа и горизонтальная проекция фронтального следа плоскости?
4. Как определяется на чертеже, принадлежит ли прямая данной плоскости?
5. Как построить на чертеже точку, принадлежащую данной плоскости?
6. Что такое фронталь, горизонталь и линия ската плоскости?
7. Может ли служить линия ската плоскости для определения угла наклона этой плоскости к плоскости проекций π_1 ?
8. Определяет ли прямая линия плоскость, для которой эта прямая является линией ската?

§ 19. ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Возможны следующие положения плоскости относительно плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 : 1) плоскость не перпендикулярна ни к одной из плоскостей проекций, 2) плоскость перпендикулярна лишь к одной из них, 3) плоскость перпендикулярна к двум плоскостям проекций.

Плоскости второго и третьего положений носят общее название «проецирующие плоскости».

1. *Плоскость, не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, является плоскостью общего положения* (см. рис. 105).

Рассмотрим, например, плоскость, изображенную на рис. 112.

Эта плоскость не перпендикулярна ни к π_1 , ни к π_2 , ни к π_3 . То, что она не перпендикулярна ни к π_1 , ни к π_2 , подтверждается видом проекций $A'B'C'$ и $A''B''C''$: если бы плоскость, определяемая треугольником ABC , была перпендикулярна хотя бы к π_1 , то (рис. 120) проекция $A'B'C'$ представляла бы собой отрезок прямой.

Итак, рассматриваемая нами плоскость не перпендикулярна ни к π_1 , ни к π_2 . Но, может быть, эта плоскость перпендикулярна к π_3 ? Нет, горизонталь этой плоскости AK не перпендикулярна к π_3 (сравните с рис. 54, где показана прямая, перпендикулярная к π_3), и, следовательно, пл. ABC не перпендикулярна к π_3 .

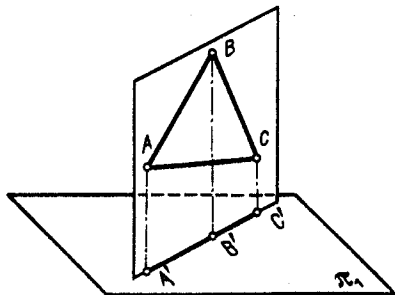


Рис. 120

Итак, на рис. 112 дан пример задания плоскости общего положения в системе π_1, π_2 .

Другими примерами задания плоскости общего положения служат рис. 109, 110, 111, 113, 116, а также рис. 102, 104, 107, слева, 108, 115, справа, 117, 119, на которых плоскости выражены следами. *Плоскость общего положения* (см. рис. 105) *пересекает каждую из осей x, y, z . Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к этим осям проекций.*

Если следы плоскости общего положения $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ образуют с осью x одинаковые углы, то это означает, что углы между пл. α и плоскостями π_1 и π_2 равны между собой. Действительно, если плоские углы трехгранного угла равны между собой, то равны и лежащие против них двугранные углы; углы, образуемые следами $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ с осью x (см. рис. 105), представляют собой плоские углы, против которых соответственно расположены двугранные углы, образуемые пл. α с плоскостями π_2 и π_1 .

Если плоскость общего положения должна быть одинаково наклонена к плоскостям π_1 , π_2 и π_3 , то (см. рис. 105), очевидно, $OX_\alpha = OY_\alpha = OZ_\alpha$, т. е. следы составляют с осями проекций углы 45° .

Рассматривая плоскость общего положения в пространстве в пределах первой четверти или первого октанта, замечаем, что угол между горизонтальным и фронтальным следами может быть острым (см. рис. 105) или тупым (рис. 121).

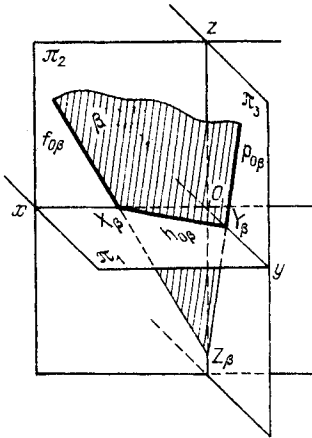


Рис. 121

Пл. β , изображенная на рис. 121, проходит через все октанты, кроме шестого.

Если чертеж плоскости общего положения строить по координатам точек пересечения следов, то, очевидно, на рис. 121 должны быть заданы положительные абсциссы и ордината точек X_β и Y_β и отрицательная аппликата точки Z_β .

На рис. 122 изображен частный случай плоскости общего положения — ее следы $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ на чертеже лежат на одной прямой. Вспоминая схему совмещения плоскостей проекций (рис. 15 на с. 17), заметим, что следы $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ образуют равные углы с осью x не только на чертеже, но и в пространстве. Как показано на рис. 122 справа, из равенства прямоугольных треугольников $K'X_\alpha K''$ и $K''K'X_\alpha$ следует, что угол $KX_\alpha K'$ равен углу $K'X_\alpha K''$, т. е. след $f''_{0\alpha}$ образует с осью x такой же угол, как и след $h'_{0\alpha}$.

Отсюда пл. α образует равные углы с плоскостями π_1 и π_2 . Часть пл. α , находящаяся в первой четверти, содержит в себе натуральный угол между $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ (в нашем примере — тупой).

На рис. 122 показано также построение третьего следа плоскости ($p''_{0\alpha}$) по заданным двум ее следам $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$. Вследствие того, что следы $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ лежат на одной прямой, точка Z_α сливается с точкой Y_α , и, следовательно, точка $Y'_{1\alpha}$ оказывается на таком же расстоянии от точки O , на каком находится точка Z_α ; поэтому след $p''_{0\alpha}$ наклонен под углом 45° к оси y (и к оси z); именно такой наклон профильного следа будет получаться во всех случаях построения

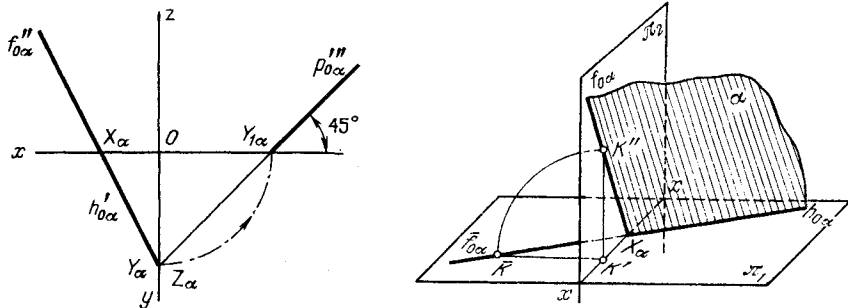


Рис. 122

плоскости, у которой на чертеже горизонтальный и фронтальный следы лежат на одной прямой, пересекающей ось x под острым углом.

Такая плоскость проходит через перпендикуляр к оси x , составляющий с пл. π_2 (или с π_1) угол 45° . А так как этот перпендикуляр является перпендикуляром к биссекторной плоскости двугранных углов, смежных с углом $\pi_1\pi_2$, то рассматриваемая плоскость может быть определена как плоскость, перпендикулярная к биссекторной плоскости второй и четвертой четвертей пространства ¹⁾.

¹⁾ Интересующихся более подробным изложением отсылаем к предыдущим изданиям этой книги.

2. Если плоскости перпендикулярны лишь к одной из плоскостей проекций, то возможны три случая частных положений.

а) *Плоскость перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Такие плоскости называются горизонтально-проецирующими.*

Пример дан на рис. 123: плоскость задана проекциями треугольника ABC . Горизонтальная проекция представляет собой отрезок прямой линии. Угол φ_2 равен углу между заданной плоскостью и пл. π_2 .

На рис. 124 дан пример изображения горизонтально-проецирующей плоскости ее следами: слева дано наглядное изображение, в середине – чертеж в системе

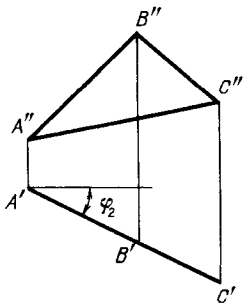


Рис. 123

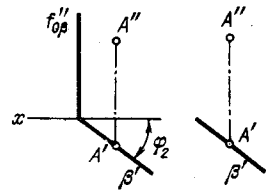
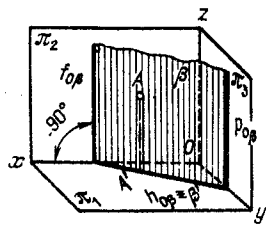


Рис. 124

π_1, π_2 с указанием оси x и следов $f''_{0\beta}$ и $h'_{0\beta}$, справа – без указания оси x и, следовательно, следа $f''_{0\beta}$.

Фронтальный след перпендикулярен к пл. π_1 и к оси проекций x . Горизонтальный же след может составлять с осью проекций любой угол; этот угол служит линейным углом двугранного между горизонтально-проецирующей плоскостью и пл. π_2 .

Угол между $h_{0\beta}$ и $f_{0\beta}$, а также угол между $h_{0\beta}$ и $p_{0\beta}$ в пространстве равен 90° .

Если в горизонтально-проецирующей плоскости расположена точка, то ее горизонтальная проекция должна быть на горизонтальном следе плоскости. Это относится и к любой системе точек, расположенных в горизонтально-проецирующей плоскости, будь то прямые линии, плоские кривые или фигуры.

След $h_{0\beta} \equiv \beta'$ можно рассматривать как горизонтальную проекцию плоскости.

б) *Плоскость перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций. Такие плоскости называются фронтально-проецирующими.*

Пример дан на рис. 125: плоскость задана проекциями треугольника DEF . Фронтальная проекция представляет собой отрезок прямой линии. Угол φ_1 равен углу между DEF и пл. π_1 .

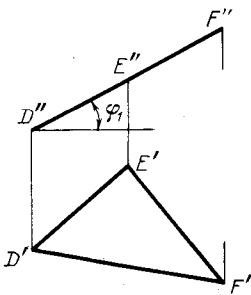


Рис. 125

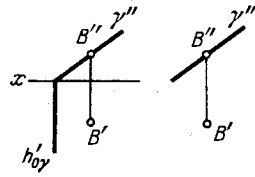
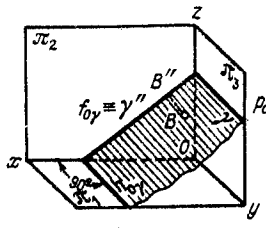


Рис. 126

На рис. 126 слева дано наглядное изображение, в середине – чертеж в системе π_1, π_2 с указанием оси проекций, справа – без указания оси проекций. Горизонтальный след перпендикулярен к пл. π_2 и к оси проекций. Фронтальный же след

жет составлять с осью проекций любой угол; этот угол служит линейным углом двугранного между фронтально-проецирующей плоскостью и пл. π_2 .

Угол между $f_{0\gamma}$ и $h_{0\gamma}$ в пространстве равен 90° .

Если в фронтально-проецирующей плоскости расположена точка, то ее фронтальная проекция должна быть на фронтальном следе плоскости. Это относится и к любой системе точек. След $f_{0\gamma} \equiv \gamma''$ (рис. 126) можно рассматривать как фронтальную проекцию пл. γ .

в) *Плоскость перпендикулярна к профильной плоскости проекций. Такие плоскости называются профильно-проецирующими.*

На рис. 127 дан пример профильно-проецирующей плоскости: плоскость задана проекциями треугольника ABC . Горизонталь этой плоскости расположена перпендикулярно к пл. π_3 ; проекции $A''D''$ и $A'D'$ взаимно параллельны. Это служит признаком того, что перед нами профильно-проецирующая плоскость, а не плоскость общего положения (сравните с рис. 112).

Профильная проекция треугольника ABC представляет собой отрезок прямой линии. Угол φ_1 между этим отрезком и линией связи $C''C'''$ равен углу наклона

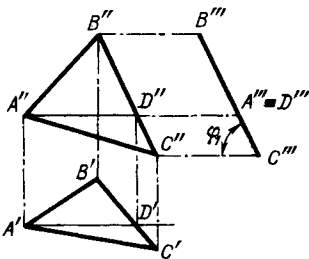


Рис. 127

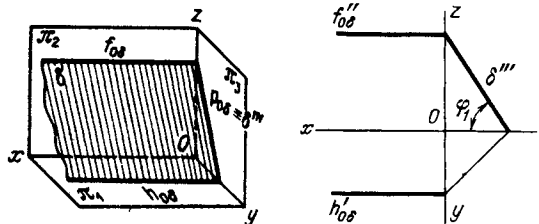


Рис. 128

плоскости треугольника к пл. π_1 , а угол наклона плоскости треугольника к пл. π_2 равен $90^\circ - \varphi_1$.

На рис. 128 дан пример изображения профильно-проецирующей плоскости ее следами.

Горизонтальный и фронтальный следы этой плоскости параллельны оси x и, следовательно, параллельны между собой.

Изображенная на рис. 107 справа плоскость также является профильно-проецирующей.

Плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций (горизонтально-, фронтально- или профильно-проецирующая), может, в частности, проходить через ось проекций. Такую плоскость дополнительно называют осевой плоскостью.

Рассмотрим, например, осевую профильно-проецирующую плоскость (рис. 129). Следы ее $f_{0\delta}$ и $h_{0\delta}$ сливаются с осью x ; в этом случае необходимо иметь еще третий ее след $\rho_{0\delta} \equiv \delta'''$ или хотя бы положение одной точки, принадлежащей этой плоскости и не лежащей на оси x .

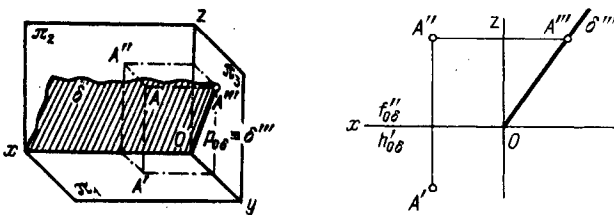


Рис. 129

Осевая плоскость может быть *биссекторной*; это значит, что осевая плоскость делит двугранный угол, образованный плоскостями проекций, пополам.

Как можно изобразить профильно-проецирующую плоскость на чертеже без осей проекций? Так, как дано на рис. 127. Другой пример представлен на рис. 130: плоскость задана двумя пересекающимися прямыми, из которых одна (AB) перпендикулярна к пл. π_3 , а другая занимает произвольное положение.

3. Если плоскости перпендикулярны к двум плоскостям проекций, то также возможны три случая частных положений¹⁾.

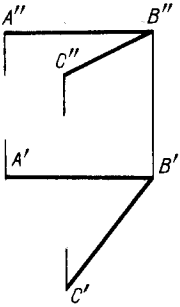


Рис. 130

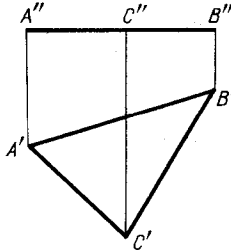


Рис. 131

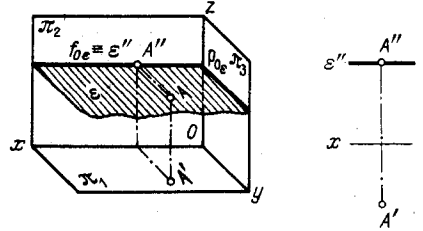


Рис. 132

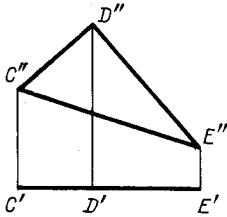


Рис. 133

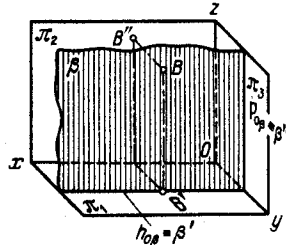


Рис. 134

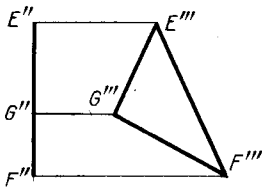


Рис. 135

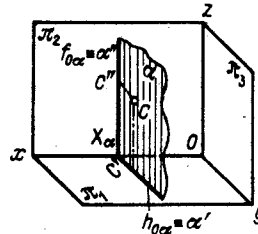


Рис. 136

а) *Плоскость перпендикулярна к плоскостям π_2 и π_3 , т. е. параллельна плоскости π_1 . Такие плоскости называются горизонтальными.*

На рис. 131 дан пример горизонтальной плоскости, заданной проекциями треугольника ABC . На рис. 132 справа изображена горизонтальная плоскость в системе π_1, π_2 при помощи фронтального следа. След ($f_{0\epsilon} \equiv \epsilon''$) можно рассматривать как фронтальную проекцию плоскости.

б) *Плоскость перпендикулярна к плоскостям π_1 и π_3 , т. е. параллельна плоскости π_2 . Такие плоскости называются фронтальными.*

На рис. 133 дан пример фронтальной плоскости, заданной проекциями треугольника CDE .

¹⁾ Для таких плоскостей встречается общее название «плоскости уровня». Однако это название отвечает обычному представлению только о горизонтальности.

На рис. 134 справа дан пример изображения фронтальной плоскости в системе π_1, π_2 при помощи следа ($h_{0\beta} \equiv \beta'$), который можно рассматривать как проекцию этой плоскости на пл. π_1 .

в) *Плоскость перпендикулярна к плоскостям π_1 и π_2 , т. е. параллельна плоскости π_3 . Такие плоскости называются профильными.*

Пример изображения в системе π_2, π_3 дан на рис. 135: плоскость задана проекциями треугольника EFG .

На рис. 136 дан пример изображения в системе π_1, π_2 при помощи следов. Каждый из них можно рассматривать как проекцию плоскости α на соответствующей плоскости проекций. Профильная плоскость сочетает в себе свойства фронтально- и горизонтально-проецирующей плоскостей.

ВОПРОСЫ К § 19

1. Как располагаются в системе π_1, π_2, π_3 плоскость общего положения и плоскости, называемые проецирующими?
2. Что такое фронтально-проецирующая плоскость, горизонтально-проецирующая, профильно-проецирующая?
3. Как определить, является ли плоскость, заданная в системе π_1, π_2 пересекающимися или параллельными прямыми, плоскостью общего положения или профильно-проецирующей?
4. Что представляет собой горизонтальная проекция горизонтально-проецирующей плоскости и фронтальной плоскости?
5. Тот же вопрос в отношении фронтальной проекции фронтально-проецирующей плоскости и горизонтальной плоскости.
6. Где располагается горизонтальная проекция любой системы точек, расположенной в горизонтально-проецирующей или фронтальной плоскости?
7. Где располагается фронтальная проекция любой системы точек, расположенной в горизонтальной или фронтально-проецирующей плоскости?
8. Чему равен в пространстве угол между фронтальным и горизонтальным следами горизонтально- и фронтально-проецирующей плоскостей?

§ 20. ПРОВЕДЕНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ ЧЕРЕЗ ПРЯМУЮ ЛИНИЮ

В дальнейшем изложении будут иметь место случаи, когда придется проводить проецирующую плоскость через прямую линию согласно какому-либо условию. Через прямую общего положения можно провести любую из таких плоскостей. Примеры даны на рис. 137. Через заданную в системе π_1, π_2 прямую, проходящую через точку K , проведены фронтально-проецирующая плоскость, выраженная ее фронтальной проекцией β'' , горизонтально-проецирующая плоскость, выраженная ее горизонтальной проекцией γ' , и профильно-проецирующая плоскость, определяемая, помимо заданной прямой AK , еще прямой AB , перпендикулярной к пл. π_3 .

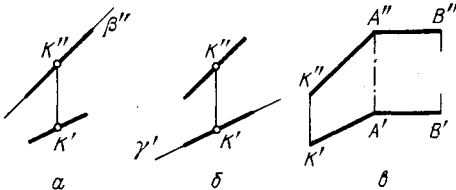


Рис. 137

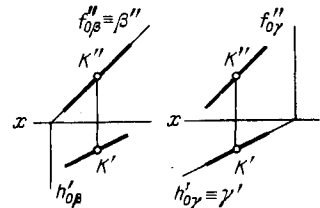


Рис. 138

На рис. 138 плоскости, проведенные через заданную прямую, выражены следами. Положение оси x или задается, или может быть выбрано.