Но *через прямую общего положения нельзя провести ни фронтальную, ни горизонтальную, ни профильную плоскость.* Такие плоскости можно проводить лишь через соответственно расположенные прямые: через горизонтальную прямую про-

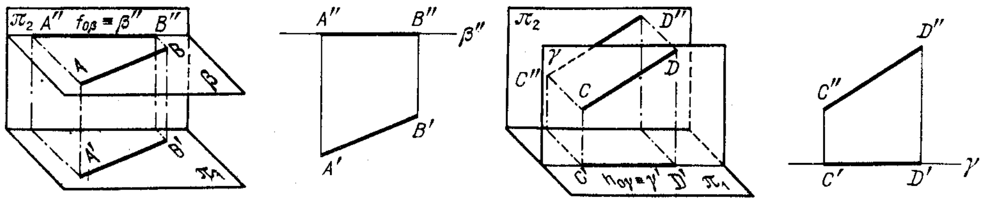

Рис. 139

вести горизонтальную плоскость, через фронтальную прямую – фронтальную плоскость, через профильную прямую – профильную плоскость. На рис. 139 изображены горизонтальная плоскость β, проходящая через горизонтальную прямую AB, и фронтальная пл. γ, проходящая через фронтальную прямую CD.

§ 21. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Построение проекций плоских фигур (т. е. фигур, все точки которых лежат в одной плоскости, например, квадрата, круга, эллипса и т. д.) сводится к построению проекций ряда точек, отрезков прямых и кривых линий, образующих контуры проекций фигур. Зная координаты вершин, например, треугольника, можно построить проекции этих точек, затем проекции сторон и получить таким образом проекции фигуры.

Чертежи, содержащие проекции треугольника, уже встречались (например, рис. 110, 112 и др.). Если сравнить между собой рис. 110 и 112, то можно заметить, что на рис. 110 одна из проекций, положим фронтальная, изображает «лицевую» сторону треугольника, а горизонтальная – «тыльную». А на рис. 112 каждая из проекций изображает треугольник с одной и той же его стороны. Признаком может служить порядок обхода вершин: на рис. 110 для фронтальной проекции по часовой стрелке (считая от A'' к C''), а для горизонтальной – против часовой стрелки; на рис. 112 для обеих проекций обход в одном направлении – в данном случае по часовой стрелке.

В общем случае в системе π_1, π_2, π_3 проекции какого-либо многоугольника представляют собой также многоугольники с тем же числом сторон; при этом плоскость этого многоугольника является плоскостью общего положения. Но если в системе π_1, π_2 обе проекции, например, треугольника представляют собой треугольник, то его плоскость может оказаться плоскостью общего положения или профильно-проецирующей: на рис. 112 – плоскость общего положения, а на рис. 127 – профильно-проецирующая. Определителем служит, как было сказано на с. 52 в пояснении к рис. 127, горизонталь (или фронталь): если ее проекции на π_1 и π_2 взаимно параллельны, то плоскость профильно-проецирующая (рис. 127); если же не параллельны, то плоскость общего положения (например, рис. 112, 115, слева).

Если проекция многоугольника на π_1 или на π_2 представляет собой отрезок прямой, то плоскость этого многоугольника соответственно перпендикулярна к π_1 или к π_2. Например, на рис. 123 плоскость треугольника горизонтально-проецирующая, на рис. 125 – фронтально-проецирующая.

Фигура, расположенная параллельно плоскости проекций, проецируется на нее без искажения. Например, все элементы треугольника CDE, изображенного на рис. 133, проецируются на пл. π_2 без искажения; круг, изображенный на рис. 140, проецируется на пл. π_1 без искажения.

Если же плоскость фигуры не параллельна плоскости проекций, то для определения натурального вида (т. е. без искажения) этой фигуры применяют способы, указанные далее, в главе V. Конечно, можно было бы и теперь, не зная еще этих способов, построить, например, натуральный вид треугольника, изображенного на рис. 112, определив длину каждой его стороны как длину отрезка (см. § 13) и затем построив треугольник по найденным отрезкам. Вместе с тем определились бы и углы данного треугольника. Так поступают, например, при построении развертки

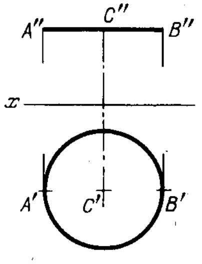

Рис. 140

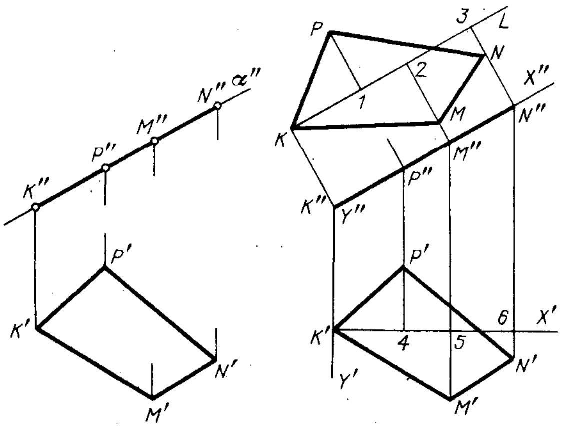

Рис. 141

боковой поверхности пирамиды, призмы и др. (см. далее § 44). Если же многоугольник расположен в проецирующей плоскости, то можно построить его натуральный вид так, как показано на рис. 141.

Положим, требуется определить натуральный вид четырехугольника $KPNM$, расположенного в фронтально-проецирующей пл. α. Тогда, как это показано на рис. 141 справа, можно взять в плоскости фигуры две оси прямоугольных координат с началом хотя бы в точке K; ось абсцисс ($K''X''$, $K'X'$) параллельно пл. π_2, ось ординат перпендикулярно к π_2 (проекции этой оси $K''Y''$, $K'Y'$), провести прямую KL (это можно сделать, например, параллельно $K''X''$) и отложить на ней $K1 = K''P''$, $K2 = K''M''$, $K3 = K''N''$. Затем на перпендикулярах к прямой KL в точках 1, 2 и 3 отложим отрезки $P1 = P'4$, $M2 = M'5$ и $N3 = N'6$. Построенный таким образом четырехугольник $KMNP$ представляет собой натуральный вид заданного.

При решении многих задач вопрос о том, какое положение занимает плоская фигура относительно плоскостей проекций, приобретает существенное значение. В качестве примера рассмотрим вопрос о построении четырех замечательных точек треугольника.

Так как делению отрезка прямой в пространстве пополам отвечает такое же деление проекций этого отрезка (см. § 12), то построение точки пересечения медиан треугольника [1]) может быть произведено на чертеже во всех случаях непосредственно. Достаточно (рис. 142) провести медианы на каждой из проекций треугольника, и точка пересечения его медиан будет определена. При этом можно ограничиться построением обеих проекций лишь одной из медиан (например, $A'D'$ и $A''D''$) и одной проекции второй медианы (например, $B''E''$); в пересечении $A''D''$ и $B''E''$ получаем точку M'', а по ней находим на $A'D'$ точку M'.

Можно было бы также, построив лишь одну из медиан треугольника, найти на ней точку M на основании известного из геометрии свойства этой точки (она делит каждую медиану в отношении 2 : 1).

Построение точки пересечения трех высот треугольника [2]) и точки перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины [3]), связано с проведением взаимно перпендикулярных прямых.

---

[1]) Точка пересечения медиан есть центр тяжести треугольника.

[2]) Ортоцентр треугольника.

[3]) Центр описанной окружности.

В § 15 были указаны условия, при которых перпендикулярные отрезки в пространстве имеют своими проекциями также перпендикулярные отрезки. Если плоскость треугольника параллельна плоскости проекций (например, треугольник CDE на рис. 133), то, опустив перпендикуляры из точек C'', D'' и E'' на противоположные им стороны, получаем проекции высот треугольника. Но в треугольнике общего положения так поступить нельзя.

В частном случае, когда одна сторона треугольника параллельна пл. π_1, а другая параллельна пл. π_2 (рис. 143), проведя $C''F''$ перпендикулярно к $A''B''$ и $B'E'$ перпендикулярно к $A'C'$, получаем в пространстве $CF \perp AB$ и $BE \perp AC$; точка пересечения высот оказалась построенной без каких-либо особых приемов.

В самом же общем случае для проведения на проекционном чертеже перпендикулярных линий приходится прибегать к особым приемам, которые будут изложены дальше.

Построение *точки пересечения биссектрис треугольника*[1]) также может быть произведено непосредственно лишь в частных случаях расположения треугольника относительно плоскостей проекций. Это объясняется тем, что деление пополам проекции какого-либо угла отвечает его делению пополам в пространстве только в том случае, если стороны данного угла одинаково наклонены к той плоскости проекций, на которой производится деление пополам проекции угла (см. § 15).

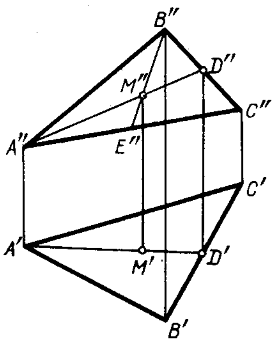

Рис. 142

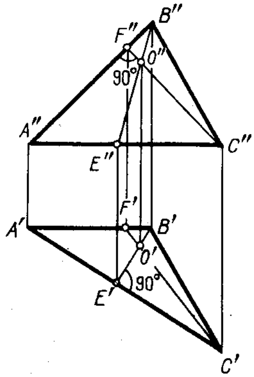

Рис. 143

При построении проекций какого-либо многоугольника необходимо обратить внимание на то, чтобы не нарушалось условие нахождения всех точек данной фигуры в одной плоскости.

На рис. 144 даны полностью горизонтальная проекция некоторого пятиугольника $ABCDE$ и фронтальные проекции только трех его вершин: A'', B'' и E''. Справа

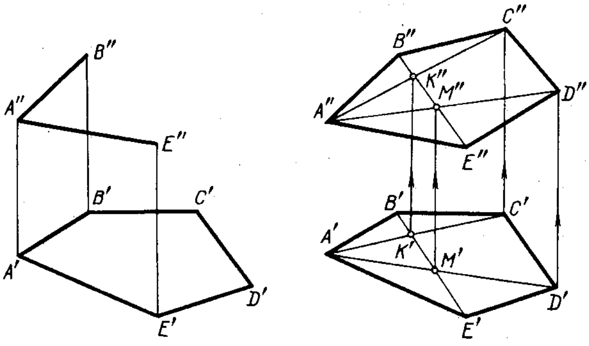

Рис. 144

на рис. 144 показано построение проекций остальных двух вершин, C'' и D'', пятиугольника. Чтобы точки C и D лежали в плоскости, определенной тремя точками A,

[1]) Центр вписанной окружности.

B и E, необходимо, чтобы они находились на прямых, лежащих в этой плоскости. Этими прямыми являются диагонали AC, AD и BE, горизонтальные проекции которых мы можем построить. На фронтальной проекции пятиугольника мы можем провести лишь $B''E''$. Но в плоскости пятиугольника лежат точки пересечения диагоналей K и M, горизонтальные проекции которых (K' и M') имеются, а фронтальные проекции получаются сразу, так как они должны лежать на $B''E''$. По двум точкам строятся фронтальные проекции и остальных двух диагоналей $A''K''$ и $A''M''$; на них должны лежать точки C'' и D'', которые определяются по их горизонтальным проекциям.

Круг, плоскость которого параллельна какой-либо плоскости проекций, проецируется на эту плоскость без искажения (см. рис. 140, где круг взят в горизонтальной плоскости). Если плоскость круга расположена перпендикулярно к плоскости проекций, то на эту плоскость круг проецируется в виде отрезка прямой, равного диаметру круга.

Но если круг расположен в плоскости, составляющей с плоскостью проекций какой-либо острый угол φ, *то проекцией круга является фигура, называемая эллипсом.*

Эллипсом называется также кривая, ограничивающая эллипс-фигуру: если эллипс-фигура является проекцией круга, то эллипс-линия является проекцией окружности. В дальнейшем изложении, говоря об эллипсе, будем подразумевать проекцию окружности.

Эллипс относится к числу кривых, называемых кривыми второго порядка. Уравнения таких кривых в декартовых координатах представляют собой уравнения второго порядка. Кривая второго порядка пересекается с прямой линией в двух точках. Далее мы встретимся еще с параболой и гиперболой, тоже кривыми второго порядка.

Эллипс можно рассматривать как «сжатую» окружность. Это показано на рис. 145, слева. Положим, что на радиусе OB отложен отрезок OB_1 длиной b, причем $b < a$ (т. е. меньше радиуса окружности). Если теперь взять на окружности какую-либо точку K и, проведя из K перпендикуляр на A_1A_2, отметить на KM точку K_1 так, чтобы $MK_1 : MK = b : a$, то эта точка K_1 будет принадлежать эллипсу. Так можно преобразовать каждую точку окружности в точку эллипса, соблюдая одно и то же отношение $b : a$. Окружность как бы равномерно сжимается; линия, в которую при этом преобразуется окружность, является эллипсом. Отношение $b : a$ называется коэффициентом сжатия эллипса. Если b приближается к a, то эллипс расширяется и при $b = a$ превращается в окружность.

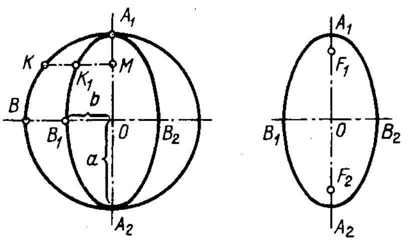

Рис. 145

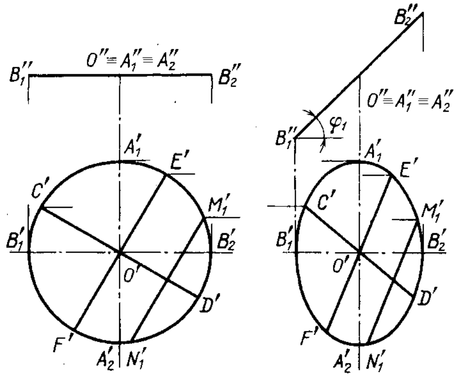

Рис. 146

Напомним (из курса черчения средней школы), что

1) отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется *большой осью* эллипса;
2) отрезок $B_1B_2 = 2b$ называется *малой осью* эллипса;
3) большая и малая оси взаимно перпендикулярны;
4) точка пересечения осей называется *центром* эллипса;

5) отрезок прямой между двумя точками эллипса, проходящий через центр эллипса, называется его *диаметром*;

6) точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами* эллипса;

7) эллипс симметричен относительно его осей и относительно его центра;

8) эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (рис. 145, справа) имеет одно и то же значение $2a$ (размер большой оси).

Из рассмотрения рис. 146 следует, что при повороте окружности вокруг диаметра A_1A_2 на угол φ_1 этот диаметр, параллельный пл. π_1, сохраняет в горизонтальной проекции свою величину и становится большой осью эллипса (см. рис. 146, справа). Диаметр же B_1B_2, повернутый на угол φ_1 к пл. π_1, проецируется на нее с сокращением:

$$B_1'B_2' = B_1''B_2'' \cos\varphi_1.$$

Это соответствует отношению осей эллипса, т. е. его коэффициенту сжатия.

Если в окружности провести какие-либо два взаимно перпендикулярных диаметра, то в проекции, представляющей собой эллипс (рис. 146, справа), проекции таких диаметров окружности оказываются диаметрами эллипса, называемыми *сопряженными*. Если в окружности (рис. 146, слева) провести, например, хорду $M_1'N_1'$, параллельную диаметру $E'F'$, то диаметр $C'D'$ разделит эту хорду (и все хорды, ей параллельные) пополам. Очевидно, что и в эллипсе сохранится это свойство (см. рис. 146, справа): диаметр $C'D'$ делит хорду $M_1'N_1'$, параллельную диаметру $E'F'$, сопряженному с $C'D'$, пополам. Но именно *такие два диаметра эллипса, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, являются сопряженными.*

Сопряженные диаметры эллипса не перпендикулярны один к другому; исключение составляют оси эллипса, также являющиеся парой сопряженных диаметров.

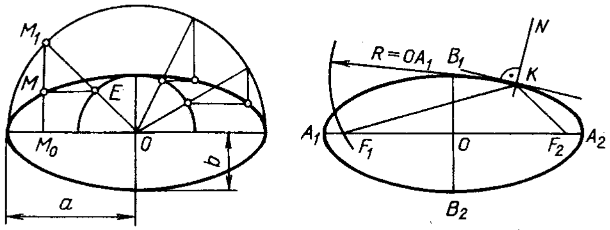

Рис. 147

Напомним, как производится построение эллипса по его осям (рис. 147, слева). Построение выполняется при помощи двух концентрических окружностей, проведенных радиусами a (большая полуось) и b (малая полуось). Если провести какой-либо радиус OM_1 и прямые M_1M_0 и EM, параллельные малой и большой осям эллипса, то при пересечении этих прямых получится точка M, принадлежащая эллипсу. Действительно,

$$\frac{MM_0}{M_1M_0} = \frac{OE}{OM_1} = \frac{b}{a}.$$

Проводя ряд радиусов и повторяя указанное построение, получаем ряд точек эллипса.

Построив какую-нибудь точку эллипса, можно построить еще три точки, расположенные симметрично найденной относительно осей эллипса или его центра.

На рис. 147 справа показано построение фокусов эллипса: засекая из точки B_1 большую ось дугой радиуса, равного большой полуоси OA_1, получаем точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса. Построив угол F_1KF_2, где K – любая точка эллипса, проводим в нем биссектрису и перпендикулярно к ней в точке K касательную к эллипсу. Прямая KN, перпендикулярная к касательной, является нормалью[1]) к эллипсу в точке K.

---

[1]) От normalis (*лат.*) – прямолинейный.

Как построить оси эллипса, если известны его сопряженные диаметры?

Пусть получены сопряженные полудиаметры CA и CB (рис. 148). Для построения осей эллипса:

1) один из сопряженных полудиаметров, например CB, поворачиваем на угол 90° по направлению к другому (до положения CB_2);

2) проводим отрезок AB_2 и делим его пополам;

3) из точки K проводим окружность радиусом KC;

4) прямую, определяемую отрезком AB_2, продолжаем до пересечения с этой окружностью в точках D и E;

5) проводим прямую DC, получаем направление большой оси эллипса;

6) проводим EC – направление малой оси эллипса;

7) откладываем $C1 = AE$ – большая полуось;

8) откладываем $C3 = AD$ – малая полуось;

9) откладываем $C2' = C1$, $C4 = C3$, $C5 = CA$, $C6 = CB$.

Эллипс может быть проведен через восемь точек *1*, *A*, *3*, *B*, *2*, *5*, *4* и *6* или построен по большой и малой осям, как показано на рис. 147.

Итак, проведя прямые CD и CE, мы получили направления большой и малой осей эллипса; точка A, принадлежащая эллипсу, делит диаметр ED на два отрезка, из которых один (AE) равен большой полуоси этого эллипса, а другой (AD) – малой полуоси. Если (рис. 149)

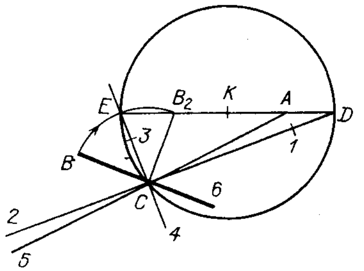

Рис. 148

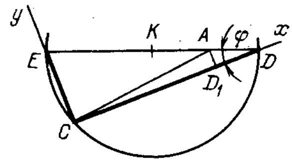

Рис. 149

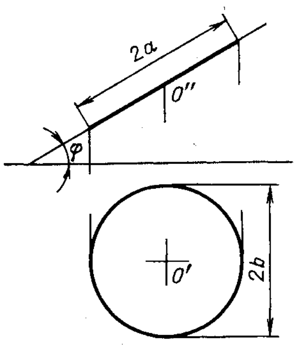

Рис. 150

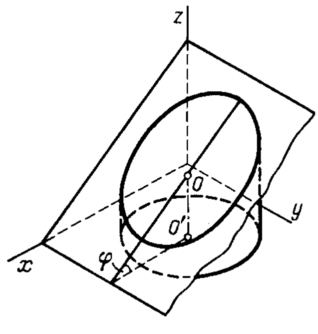

Рис. 151

взять оси координат x и y соответственно по прямым CD и CE и из точки A провести перпендикуляр AD к прямой CD, то координаты точки A могут быть выражены следующим образом:

$$x_a = AE\cos\varphi, \quad y_a = AD\sin\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{x_a^2}{(AE)^2} + \frac{y_a^2}{(AD)^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Это уравнение эллипса, у которого AE – большая полуось, а AD – малая полуось.

На рис. 146 было показано построение горизонтальной проекции окружности, расположенной в фронтально-проецирующей плоскости, наклоненной к пл. π_1. Пусть теперь в такой плоскости лежит эллипс с полуосями a и b. Его проекцией иногда может оказаться окружность с диаметром, равным малой оси эллипса: это будет тогда, когда для угла между плоскостью, в которой лежит эллипс, и пл. π_1 имеет место соотношение $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ (рис. 150). Полученная окружность будет служить проекцией ряда эллипсов, если изменять угол φ и размер a, оставляя b неизменным. Представим себе прямой круговой цилиндр с вертикальной осью (рис. 151); наклонные сечения этого цилиндра будут эллипсами, малая ось которых равна диаметру цилиндра.

ВОПРОСЫ К §§ 20–21

1. Как изображается на чертеже фронтально-проецирующая плоскость, проведенная через прямую общего положения?
2. Как построить проекции центра тяжести в заданном чертеже треугольника?
3. Что могут представлять собой проекции круга в зависимости от положения его плоскости относительно плоскости проекций?
4. Можно ли рассматривать эллипс как «сжатую» окружность?
5. Что такое коэффициент сжатия эллипса?
6. Имеет ли эллипс: а) оси симметрии, б) центр симметрии?
7. Какие диаметры эллипса называются: а) осями, б) сопряженными диаметрами?
8. Как по заданным сопряженным диаметрам эллипса построить его оси?