ГЛАВА IV. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

§ 22. ОБЗОР ВЗАИМНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

Две плоскости могут быть параллельными или пересекаться между собой. Рассмотрим случай взаимной параллельности плоскостей. Если плоскости α и β параллельны (рис. 152), то *всегда в каждой из них можно построить по две пересекающиеся между собой прямые линии так, чтобы прямые одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым другой плоскости.*

Это служит основным признаком для определения, параллельны плоскости между собой или не параллельны. Такими прямыми могут служить, например,

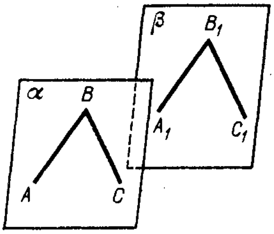

Рис. 152

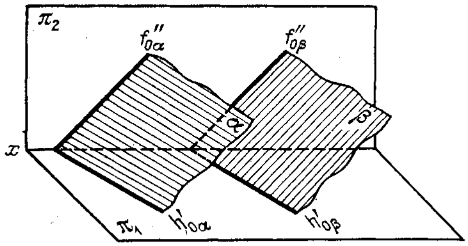

Рис. 153

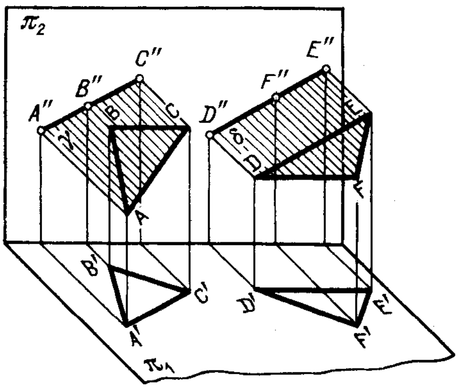

Рис. 154

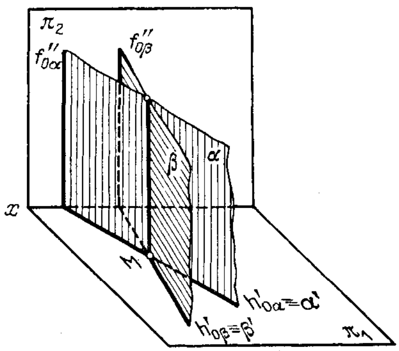

Рис. 155

следы обеих плоскостей: *если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то обе плоскости параллельны между собой* (рис. 153, где $h'_{0\alpha} \parallel h'_{0\beta}$, $f''_{0\alpha} \parallel f''_{0\beta}$).

На рис. 154 показаны параллельные между собой фронтально-проецирующие плоскости, заданные треугольниками ABC и DEF. Их параллельность определяется параллельностью фронтальных проекций $A''B''C''$ и $D''F''E''$. Если же эти плоскости выразить их следами на π_2 и π_1, то так же, как на рис. 153, фронтальные следы окажутся взаимно параллельными и горизонтальные следы будут также взаимно параллельны. Очевидно, если известно, что параллельные между собой плоскости фронтально-проецирующие, то на чертеже можно в некоторых случаях ограничиться только приведением их фронтальных следов так, как это показано далее на рис. 166 ($\alpha_1'' \parallel \alpha_2''$). Для горизонтально-проецирующих плоскостей (если известно, что они взаимно параллельны) в аналогичных случаях достаточно провести их горизонтальные следы – один параллельно другому.

Рассмотрим случай взаимного пересечения плоскостей. В случае задания плоскостей их следами легко установить, что эти плоскости пересекаются: *если хотя бы одна пара одноименных следов пересекается, то плоскости пересекаются.* Так, например, на рис. 155 $f_{0\alpha}'' \parallel f_{0\beta}''$, но β' и α' пересекаются: плоскости α и β пересекаются между собой.

Изложенное относится к плоскостям, заданным *пересекающимися следами.* Если же обе плоскости имеют на π_1 и на π_2 следы, параллельные оси x, то эти плоскости могут или пересекаться, или быть параллельными. Для решения вопроса

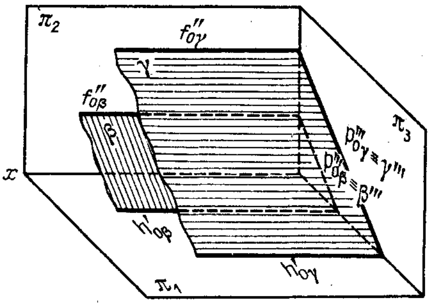

Рис. 156

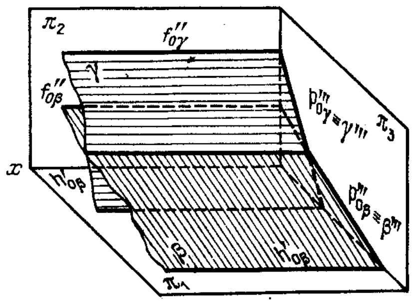

Рис. 157

о взаимном положении таких плоскостей можно построить третий след: если следы обеих плоскостей на третьей плоскости проекций также параллельны друг другу, то плоскости параллельны (рис. 156: $h_{0\beta}' \parallel h_{0\gamma}'$, $f_{0\beta}'' \parallel f_{0\gamma}''$ и $\beta''' \parallel \gamma'''$); если же третьи следы пересекаются, то плоскости пересекаются (рис. 157) [1].

Так решается вопрос о взаимном положении двух плоскостей, *заданных следами. Если же плоскости заданы не следами*, а каким-либо другим способом, и надо узнать, пересекаются ли эти плоскости, *то вообще следует прибегать к некоторым вспомогательным построениям.* Примеры этих построений будут даны при дальнейшем изложении.

Рассмотрим случаи взаимного положения прямой линии и плоскости. *Взаимное положение прямой линии и плоскости в пространстве* может быть следующим: а) прямая лежит в плоскости, б) прямая пересекает плоскость, в) прямая параллельна плоскости.

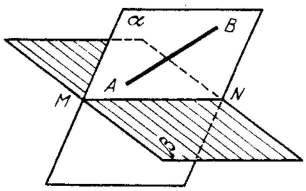

Рис. 158

Если на чертеже непосредственно нельзя установить взаимного положения прямой и плоскости, то прибегают к некоторым вспомогательным построениям, в результате которых от вопроса о взаимном положении прямой и плоскости переходят к вопросу о взаимном положении данной прямой и некоторой вспомогательной прямой. Для этого (рис. 158) проводят через данную прямую AB некоторую вспомогательную плоскость α и рассматривают взаимное положение прямой MN пересечения плоскостей β и α и прямой AB.

[1]) Очевидно, что при такой, например, последовательности в расположении параллельных оси x следов: $f_{0\gamma}''$, $f_{0\beta}''$, $h_{0\gamma}'$, $h_{0\beta}'$ плоскости не могут быть параллельны между собой и построение следов γ''' и β''' излишне.

При этом возможны три случая:

1) Прямая MN сливается с прямой AB; это соответствует тому, что прямая AB принадлежит пл. β.

2) Прямая MN пересекает прямую AB; это соответствует тому, что прямая AB пересекает пл. β.

3) Прямая MN параллельна прямой AB; это соответствует тому, что прямая AB параллельна пл. β.

Итак, *указанный прием определения взаимного положения прямой и плоскости заключается в следующем:*

1) *через данную прямую проводят вспомогательную плоскость и строят линию пересечения этой плоскости и данной плоскости;*

2) *устанавливают взаимное положение данной прямой и прямой пересечения плоскостей; найденное положение определяет взаимное положение данных прямой и плоскости.*

Для решения вопроса о взаимном положении плоскости и прямой мы применили *способ вспомогательных плоскостей*, которым часто пользуются при построениях, связанных со взаимным расположением различных поверхностей и линий с поверхностями.

Подбор вспомогательных плоскостей обычно производят с таким расчетом, чтобы построения были как можно более простыми. Может оказаться, например, что плоскости горизонтальные или фронтальные, горизонтально- и фронтально-проецирующие, вообще весьма удобные в качестве вспомогательных, нельзя будет применить совсем или их применение вызовет усложнение построения даже по сравнению с плоскостями общего положения, взятыми в качестве вспомогательных. Решая ту или иную задачу с применением вспомогательных плоскостей, необходимо выбирать эти плоскости так, чтобы все возникающие при этом построения были возможно проще и чтобы этих построений было как можно меньше.

§ 23. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПЛОСКОСТЬЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ОДНОЙ ИЛИ К ДВУМ ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, проецируется на последнюю в виде прямой линии. На этой прямой (проекции плоскости) должна находиться соответствующая проекция точки, в которой некоторая прямая пересекает такую плоскость[1]).

На рис. 159 фронтальная проекция K'' точки пересечения прямой AB с треугольником CDE определяется в пересечении проекций $A''B''$ и $C''E''$, так как треугольник проецируется на пл. π_2 в виде прямой линии. Найдя точку K'', определяем положение проекции K'. Так как прямая AB в направлении от K к B находится под

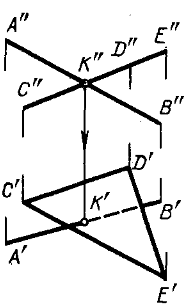

Рис. 159

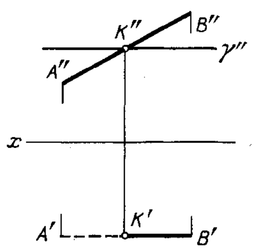

Рис. 160

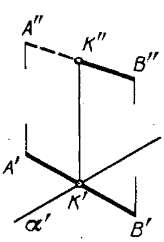

Рис. 161

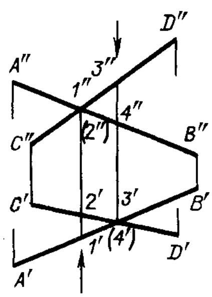

Рис. 162

[1]) Точку пересечения прямой с плоскостью называют также *точкой встречи* прямой с плоскостью.