На рис. 184 изображены две параллельные между собой плоскости – одна из них задана треугольником ABC, другая – параллельными прямыми DE и FG. Чем же устанавливается параллельность этих плоскостей? Тем, что в плоскости, заданной прямыми DE и FG, оказалось возможным провести две пересекающиеся

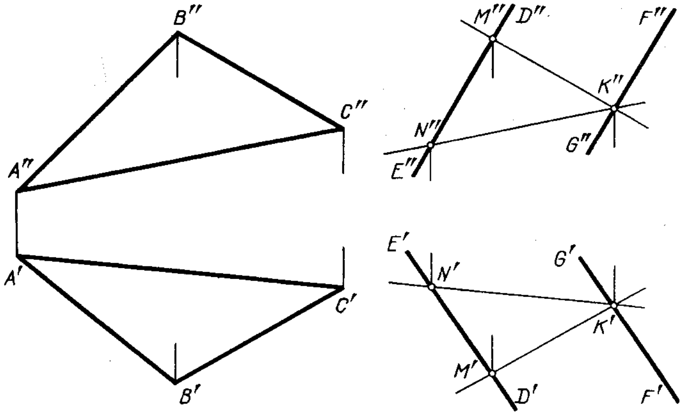

Рис. 184

прямые KN и KM, соответственно параллельные пересекающимся прямым AC и BC другой плоскости.

Конечно, можно было бы попытаться найти точку пересечения хотя бы прямой DE с плоскостью треугольника ABC. Неудача подтвердила бы параллельность плоскостей.

ВОПРОСЫ К §§ 27–28

1. На чем основано построение прямой линии, которая должна быть параллельна некоторой плоскости?
2. Как провести плоскость через прямую параллельно заданной прямой?
3. Чем определяется взаимная параллельность двух плоскостей?
4. Как провести через точку плоскость, параллельную заданной плоскости?
5. Как проверить на чертеже, параллельны ли одна другой заданные плоскости?

§ 29. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Из всех возможных положений прямой, пересекающей плоскость, отметим случай, когда прямая перпендикулярна к плоскости, и рассмотрим свойства проекций такой прямой.

На рис. 185 задана плоскость, определяемая двумя пересекающимися прямыми AN и AM, причем AN является горизонталью, а AM – фронталью этой плоскости. Прямая AB, изображенная на том же чертеже, перпендикулярна к AN и к AM и, следовательно, перпендикулярна к определяемой ими плоскости.

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой, проведенной в этой плоскости. Но чтобы при этом проекция перпендикуляра к плоскости общего положения оказалась перпендикулярной к одноименной проекции какой-либо прямой этой плоскости, прямая должна быть горизонталью, или фронталью, или профильной прямой плоскости. Поэтому, желая построить перпендикуляр к плоскости, берут в общем случае две такие прямые (например, горизонталь и фронталь, как это показано на рис. 185).

Итак, *у перпендикуляра к плоскости его горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, фронтальная проекция перпендику-*

лярна к фронтальной проекции фронтали, профильная проекция перпендикулярна к профильной проекции профильной прямой этой плоскости.

Очевидно, в случае, когда плоскость выражена следами (рис. 186), мы получаем следующий вывод: *если прямая перпендикулярна к плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальному следу плоскости.*

Итак, если в системе π_1, π_2 горизонтальная проекция прямой перпендикулярна к горизонтальному следу и фронтальная проекция прямой перпендикулярна к фронтальному следу плоскости, то *в случае плоскостей общего положения* (рис. 186), *а также горизонтально- и фронтально-проецирующих прямая перпендикулярна к плоскости.* Но для профильно-проецирующей плоскости может оказаться, что прямая к этой плоскости не перпендикулярна, хотя

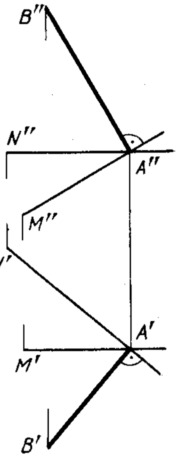

Рис. 185

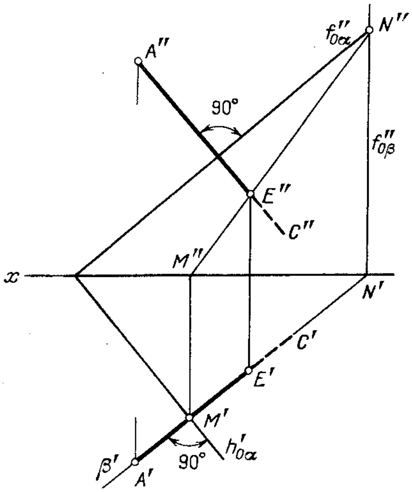

Рис. 186

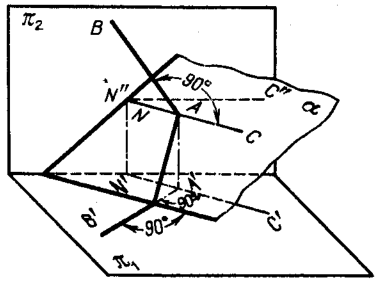

Рис. 187

проекции прямой соответственно перпендикулярны к горизонтальному и фронтальному следам плоскости. Поэтому в случае профильно-проецирующей плоскости надо рассмотреть также взаимное положение профильной проекции прямой и профильного следа данной плоскости и лишь после этого установить, будут ли перпендикулярны между собой данные прямая и плоскость.

Очевидно (рис. 187), горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости сливается с горизонтальной проекцией линии ската, проведенной в плоскости через основание перпендикуляра.

На рис. 186 из точки A проведен перпендикуляр к пл. α ($A''C'' \perp f''_{0\alpha}$, $A'C' \perp h'_{0\alpha}$) и показано построение точки E, в которой перпендикуляр AC пересекает пл. α. Построение выполнено с помощью горизонтально-проецирующей пл. β, проведенной через перпендикуляр AE.

На рис. 188 показано построение перпендикуляра к плоскости, определяемой треугольником ABC. Перпендикуляр проведен через точку A.

Так как фронтальная проекция перпендикуляра к плоскости должна быть перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости, а его горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, то в плоскости через точку A проведены фронталь с проекциями $A'D'$ и $A''D''$ и горизонталь $A''E''$, $A'E'$. Конечно, эти прямые не обязательно проводить именно через точку A.

Далее проведены проекции перпендикуляра: $M''N'' \perp A''D''$, $M'N' \perp A'E'$. Почему проекции на рис. 188 на участках $A''N''$ и $A'M'$ показаны штриховыми линиями? Потому, что здесь рассматривается плоскость, заданная треугольником ABC, а не только этот треугольник: перпендикуляр находится частично перед плоскостью, частично за ней.

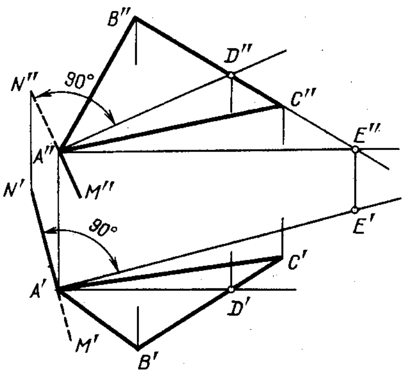

Рис. 188

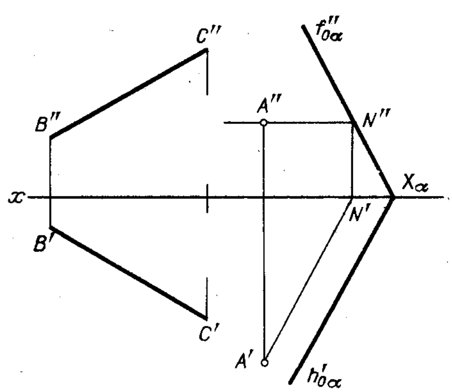

Рис. 189

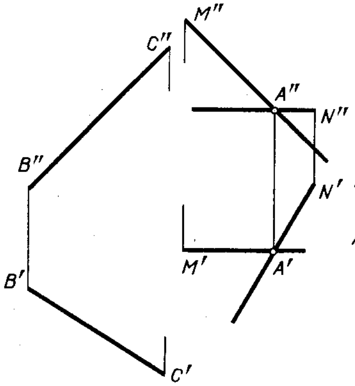

Рис. 190

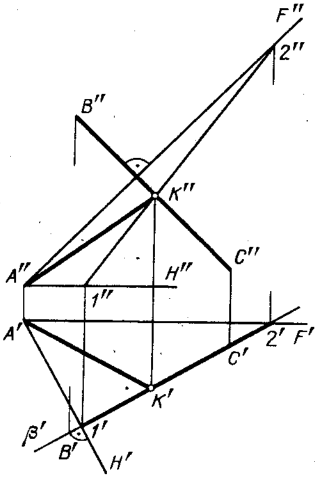

Рис. 191

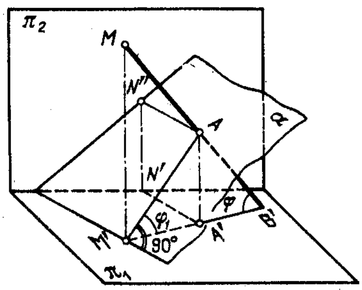

Рис. 192

На рис. 189 и 190 показано построение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой BC. На рис. 189 плоскость выражена следами. Построение начато с проведения через точку A горизонтали искомой плоскости: так как горизонтальный след плоскости должен быть перпендикулярен к $B'C'$, то и горизонтальная проекция горизонтали должна быть перпендикулярна к $B'C'$. Поэтому $A'N' \perp B'C'$. Проекция $A''N''$ ‖ оси x, как это должно быть у горизонтали. Затем проведен через точку N'' (N'' – фронтальная проекция фронтального следа горизонтали AN) след $f''_{0\alpha} \perp B''C''$, получена точка X_α и проведен след $h'_{0\alpha} \parallel A'N'$ ($h'_{0\alpha} \perp B'C'$).

На рис. 190 плоскость определена ее фронталью AM и горизонталью AN. Эти прямые перпендикулярны к BC ($A''M'' \perp B''C''$, $A'N' \perp B'C'$); определяемая ими плоскость перпендикулярна к BC.

Так как перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к каждой прямой, проведенной в этой плоскости, то, научившись проводить плоскость перпендикулярно к прямой, можно воспользоваться этим для проведения перпендикуляра из некоторой точки A к прямой общего положения BC. Очевидно, можно наметить следующий план построения проекций искомой прямой:

1) через точку A провести плоскость (назовем ее γ), перпендикулярную к BC;

2) определить точку K пересечения прямой BC с пл. γ;

3) соединить точки A и K отрезком прямой линии.

Прямые AK и BC взаимно перпендикулярны.

Пример построения дан на рис. 191. Через точку A проведена плоскость (γ), перпендикулярная к BC. Это сделано при помощи фронтали, фронтальная проекция

$A''F''$ которой проведена перпендикулярно к фронтальной проекции $B''C''$, и горизонтали, горизонтальная проекция которой перпендикулярна к $B'C'$.

Затем найдена точка K, в которой прямая BC пересекает пл. γ. Для этого через прямую BC проведена горизонтально-проецирующая плоскость β (на чертеже она задана только горизонтальным следом β'). Пл. β пересекает пл. γ по прямой с проекциями $1'2'$ и $1''2''$. В пересечении этой прямой с прямой BC получается точка K. Прямая AK является искомым перпендикуляром к BC. Действительно, прямая AK пересекает прямую BC и находится в пл. γ, перпендикулярной к прямой BC; следовательно, $AK \perp BC$.

В § 15 было показано (рис. 92), как можно провести перпендикуляр из точки на прямую. Но там это было выполнено при помощи введения в систему π_1, π_2 дополнительной плоскости и образования, таким образом, системы π_3, π_1, в которой пл. π_3 проводится параллельно заданной прямой. Рекомендуем сравнить построения, данные на рис. 92 и 191.

На рис. 192 изображены плоскость общего положения α, проходящая через точку A, и перпендикуляр AM к этой плоскости, продолженный до пересечения с пл. π_1 в точке B'.

Угол φ_1 между пл. α и пл. π_1 и угол φ между прямой AM и пл. π_1 являются острыми углами прямоугольного треугольника $B'AM'$, и, следовательно, $\varphi_1 + \varphi = 90°$. Аналогично, если пл. α составляет с пл. π_2 угол σ_2, а прямая AM, перпендикулярная к α, составляет с пл. π_2 угол σ, то $\sigma_2 + \sigma = 90°$. Из этого, прежде всего, следует, что плоскость общего положения, которая должна составлять с пл. π_1 угол φ_1, а с пл. π_2 угол σ_2, может быть построена, лишь если $180° > \varphi_1 + \sigma_2 > 90°$.

Действительно, складывая почленно $\varphi_1 + \varphi = 90°$ и $\sigma_2 + \sigma = 90°$, получим $\varphi_1 + \sigma_2 + \varphi + \sigma = 180°$, т. е. $\varphi_1 + \sigma_2 < 180°$, а так как $\varphi + \sigma < 90°$ (см. с. 33), то $\varphi_1 + \sigma_2 > 90°$. Если взять $\varphi_1 + \sigma_2 = 90°$, то получится профильно-проецирующая плоскость, а если взять $\varphi_1 + \sigma_2 = 180°$, то получится профильная плоскость, т. е. в обоих этих случаях плоскость не общего положения, а частного.

§ 30. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Построение плоскости β, перпендикулярной к плоскости α, может быть произведено двумя путями: 1) пл. β проводится через прямую, перпендикулярную к пл. α; 2) пл. β проводится перпендикулярно к прямой, лежащей в пл. α или параллельной этой плоскости. Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

На рис. 193 показано построение плоскости, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником CDE. Дополнительным условием здесь служит то, что искомая плоскость должна проходить через прямую AB. Следовательно, искомая плоскость определяется прямой AB и перпендикуляром к плоскости треугольника. Для проведения этого перпендикуляра к пл. CDE в ней взяты фронталь CN и горизонталь CM: если $B''F'' \perp C''N''$ и $B'F' \perp C'M'$, то $BF \perp$ пл. CDE.

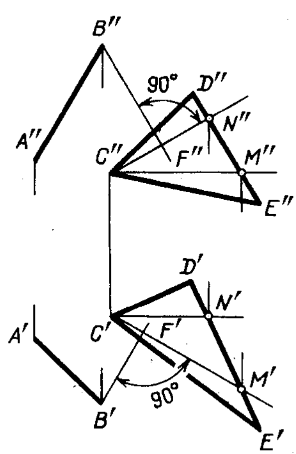

Рис. 193

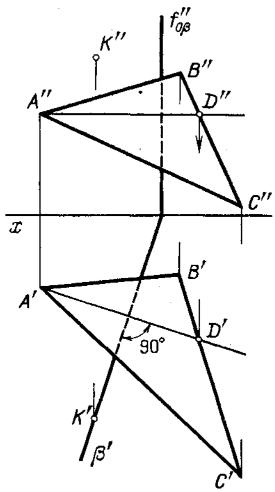

Рис. 194

Образованная пересекающимися прямыми AB и BF плоскость перпендикулярна к пл. CDE, так как проходит через перпендикуляр к этой плоскости. На рис. 194 горизонтально-проецирующая плоскость β проходит через точку K перпендикулярно к плоскости, заданной треугольником ABC. Здесь дополнительным условием явля-