

ГЛАВА V. СПОСОБЫ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ И ВРАЩЕНИЯ

§ 32. ПРИВЕДЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ И ПЛОСКИХ ФИГУР В ЧАСТНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Задание прямых линий и плоских фигур в частных положениях относительно плоскостей проекций (см. §§ 11, 19) значительно упрощает построения и решение задач, а подчас позволяет получить ответ или непосредственно по данному чертежу, или при помощи простейших построений.

Например, определение расстояния точки A до горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 201), заданной треугольником BCD , сводится к проведению перпендикуляра из проекции A' к проекции, выраженной отрезком $B'D'$. Искомое расстояние определяется отрезком $A'K'$.

Излагаемые в настоящей главе способы дают возможность переходить от общих положений прямых линий и плоских фигур в системе π_1, π_2 к частным в той же системе или в дополнительной.

Достигается это:

1) введением дополнительных плоскостей проекций так, чтобы прямая линия или плоская фигура, не изменяя своего положения в пространстве, оказалась в каком-либо частном положении в новой системе плоскостей проекций (*способ перемены плоскостей проекций*);

2) изменением положения прямой линии или плоской фигуры путем поворота вокруг некоторой оси так, чтобы прямая или фигура оказалась в частном положении относительно неизменной системы плоскостей проекций (*способ вращения и частный случай его — способ совмещения*).

Введение дополнительных плоскостей проекций в систему π_1, π_2 рассматривалось в § 8, а примеры построений в дополнительных системах были приведены в §§ 13 и 15. Теперь рассмотрим это подробнее.

§ 33. СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ ¹⁾

Общие сведения. Сущность способа перемены плоскостей проекций ²⁾ заключается в том, что положение точек, линий, плоских фигур, поверхностей в пространстве остается неизменным, а система π_1, π_2 дополняется плоскостями, образующими с π_1 или π_2 , или между собой системы двух взаимно перпендикулярных плоскостей, принимаемых за плоскости проекций.

¹⁾ Мы применяем распространенное название «перемена плоскостей проекций», но на самом деле плоскости проекций π_1 и π_2 остаются и лишь вводятся дополнительные плоскости проекций.

²⁾ Впервые на русском языке способ перемены плоскостей проекций был изложен И. И. Сомовым в его книге «Начертательная геометрия», 1862. Затем этот вопрос получил более подробное и углубленное освещение в трудах Н. И. Макарова и В. И. Курдюмова.

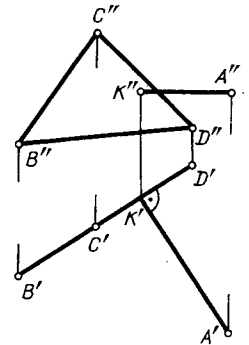


Рис. 201

Каждая новая система выбирается так, чтобы получить положение, наиболее удобное для выполнения требуемого построения.

В ряде случаев для получения системы плоскостей проекций, разрешающей задачу, бывает достаточно ввести только одну плоскость, например $\pi_3 \perp \pi_1$ или $\pi_4 \perp \pi_2$; при этом пл. π_3 окажется горизонтально-проецирующей, а пл. π_4 — фронтально-проецирующей. Если введение одной плоскости, π_3 или π_4 , не позволяет разрешить задачу, то прибегают к последовательному дополнению основной системы плоскостей проекций новыми: например, вводят плоскость $\pi_3 \perp \pi_1$, получают первую новую систему — π_3, π_1 , а затем от этой системы переходят ко второй новой системе, вводя некоторую пл. $\pi_4 \perp \pi_3$. При этом пл. π_4 оказывается плоскостью общего положения в основной системе π_1, π_2 . Таким образом, производится последовательный переход от системы π_1, π_2 к системе π_3, π_4 через промежуточную систему π_3, π_1 .

Если плоскости π_3 и π_4 все же не разрешают вопроса полностью, можно перейти к третьей новой системе, вводя еще одну плоскость, перпендикулярную к π_4 .

При построениях в новой системе плоскостей проекций соблюдаются те же условия относительно положения зрителя, которые были установлены для системы плоскостей π_1 и π_2 (см. § 7).

Ось проекций будем отмечать записью в виде дроби, считая, что черта лежит на этой оси; обозначения плоскостей представляют собой как бы числитель и знаменатель дроби, причем каждая буква ставится по ту сторону оси, где должны размещаться соответствующие проекции.

Введение в систему π_1, π_2 одной дополнительной плоскости проекций. В большинстве случаев дополнительная плоскость, вводимая в систему π_1, π_2 в качестве плоскости проекций, выбирается согласно какому-либо условию, отвечающему цели построения. Примером может служить пл. π_3 на рис. 77: так как требовалось определить натуральную величину отрезка AB и угол между AB и пл. π_1 , то пл. π_3 была расположена перпендикулярно к пл. π_1 (образовалась система π_3, π_1) и $\parallel AB$.

На рис. 202 также выбор пл. π_3 подчинен цели — определить угол между прямой CD и плоскостью проекций π_2 . Поэтому $\pi_3 \perp \pi_2$ и в то же время пл. π_3 параллельна прямой CD (ось $\pi_3/\pi_2 \parallel C''D''$). Кроме искомого угла φ_2 определилась и натуральная величина отрезка CD (ее выражает проекция $C'''D'''$).

И в случае, изображенном на рис. 203, выбор пл. π_3 вполне зависит от задания: определить натуральный вид $\triangle ABC$. Так как в данном случае плоскость, определяемая треугольником, перпендикулярна к пл. π_2 , то для его изображения без искажения надо ввести в систему π_1, π_2 дополнительную плоскость, отвечающую двум условиям: $\pi_3 \perp \pi_2$ (для образования системы π_2, π_3) и $\pi_3 \parallel ABC$ (что дает возможность изобразить $\triangle ABC$ без искажения). Новая ось π_2/π_3 проведена параллельно проекции $A''C''B''$. Для построения проекции $A'''B'''C'''$ от новой оси отложены отрезки, равные расстояниям точек A', B' и C' от оси π_2/π_1 . Натуральный вид $\triangle ABC$ выражается новой его проекцией $A'''B'''C'''$.

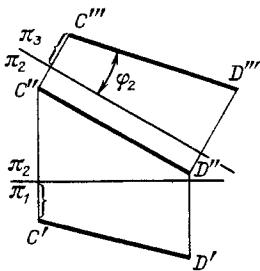


Рис. 202

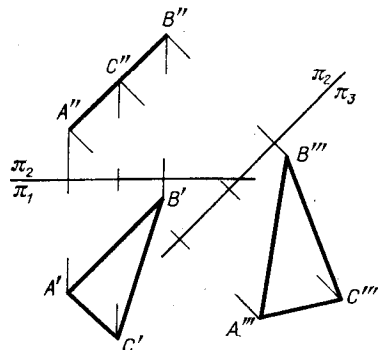


Рис. 203

Примером построения, в котором выбор дополнительной пл. π_3 не уточнен и она может быть любой горизонтально-проецирующей, или фронтально-проецирующей, или профильной плоскостью, лишь бы удобно было строить на ней проекции, служит рис. 204. Цель построения – получить проекции точки пересечения двух профильных прямых AB и CD , лежащих в общей для них профильной плоскости¹⁾. На рис. 204 показана горизонтально-проецирующая пл. π_3 в качестве дополнительной плоскости проекций.

Взаимное положение новых проекций $A''B'''$ и $C''D'''$ определяет взаимное положение заданных прямых: в данном случае прямые между собой пересекаются. Проекцией точки пересечения на пл. π_3 является точка K''' ; по ней находим проекции K' и K'' .

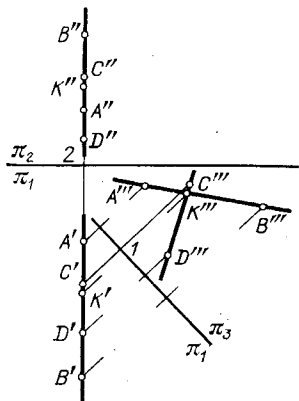


Рис. 204

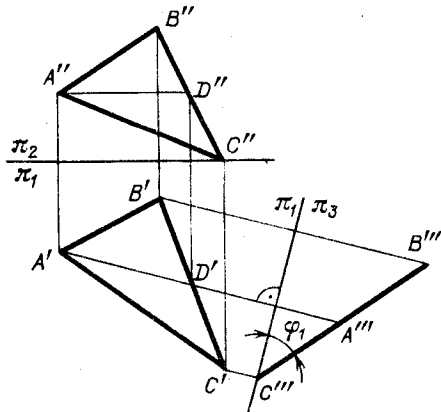


Рис. 205

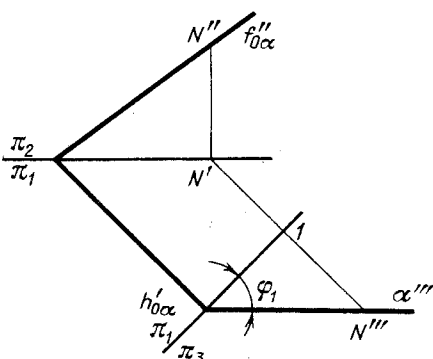


Рис. 206

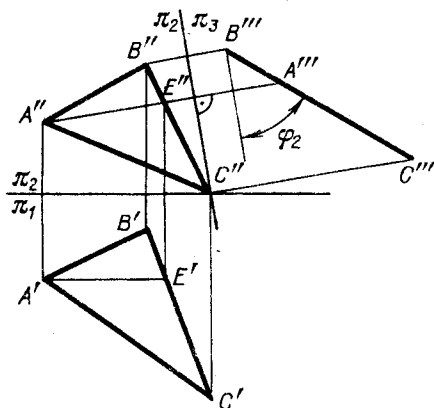


Рис. 207

Введение дополнительной плоскости проекций дает возможность, например, преобразовать чертеж так, что плоскость общего положения, заданная в системе π_1, π_2 , становится перпендикулярной к дополнительной плоскости проекций. Пример дан на рис. 205, где дополнительная плоскость π_3 проведена так, что плоскость общего положения, заданная треугольником ABC , стала перпендикулярной к пл. π_3 . Как же это получено?

В треугольнике ABC проведена горизонталь AD . Плоскость, перпендикулярная к AD , перпендикулярна к ABC и в то же время к пл. π_1 (так как $AD \parallel \pi_1$). Этому удовлетворяет пл. π_3 , $\triangle ABC$ проецируется на нее в отрезок $B''C''$. Если же плоскость общего положения задана следами (рис. 206), то пл. π_3 следует провести перпенди-

¹⁾ То, что прямые AB и CD пересекаются, следует из сравнения положений точек A и B , C и D .

кулярно к следу $h'_{0\alpha}$, т. е. к линии пересечения пл. α и пл. π_1 . Тем самым пл. π_3 окажется перпендикулярной к пл. π_1 (т. е. явится дополнительной плоскостью проекций) и к пл. α . Теперь надо построить след пл. α на пл. π_3 . Так как $\alpha \perp \pi_3$, то проекция на пл. π_3 любой точки пл. α получится на прямой пересечения пл. α с пл. π_3 , т. е. на следе α''' . На рис. 206 такой точкой служит точка N , взятая на следе $f'_{0\alpha}$; построена ее проекция N''' ($N'''I = N''N'$), через которую, а также через точку пересечения следа $h'_{0\alpha}$ с осью π_3/π_1 проходит след α''' .

Построения на рис. 205 и 206 приводят к получению угла ϕ_1 наклона заданных плоскостей к пл. π_1 . Если же взять пл. π_3 (рис. 207), перпендикулярную к пл. π_2 и к плоскости, заданной треугольником ABC (для чего надо провести ось π_2/π_3 перпендикулярно к фронтали этой плоскости), то определится угол ϕ_2 наклона плоскости ABC к пл. π_2 .

Введение в систему π_1, π_2 двух дополнительных плоскостей проекций. Рассмотрим введение в систему π_1, π_2 двух дополнительных плоскостей проекций на следующем примере.

Пусть требуется заданную в системе π_1, π_2 прямую общего положения AB расположить перпендикулярно к дополнительной плоскости проекций. Можно ли достигнуть этого введением лишь одной дополнительной плоскости? Нет. Ведь такая плоскость, будучи перпендикулярной к прямой общего положения, сама в системе π_1, π_2 окажется плоскостью общего положения, т. е. не перпендикулярной ни к π_1 , ни к π_2 . Но этим нарушится условие введения дополнительных плоскостей проекций (см. с. 22).

Как же обойти это препятствие и применить все же способ перемены плоскостей проекций? Надо придерживаться следующей схемы: от системы π_1, π_2 перейти к системе π_3, π_1 , в которой $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \parallel AB$, а затем перейти к системе π_3, π_4 , где $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\pi_4 \perp AB$ (рис. 208). Соответствующий чертеж дан на рис. 209. Дело сводится к последовательному построению проекций A''' и A^{IV} точки A , B''' и B^{IV} точки B . Прямая общего положения в системе π_1, π_2 оказалась перпендикулярной к дополнительной плоскости проекций π_4 с переходом через промежуточную стадию параллельности по отношению к первой дополнительной плоскости π_3 . Так как пл. π_3 расположена параллельно прямой AB , то расстояния точек A и B от пл. π_3 равны между собой и выражаются, например, отрезком $A'2$; взяв ось π_3/π_4 перпендикулярно к $A'''B'''$ (что соответствует в пространстве перпендикулярности пл. π_4 к прямой AB) и отложив отрезок $A^{IV}3$, равный $A'2$, получаем обе проекции, A^{IV} и B^{IV} в одной точке, т. е. то, что и должно получиться, если $AB \perp \pi_4$.

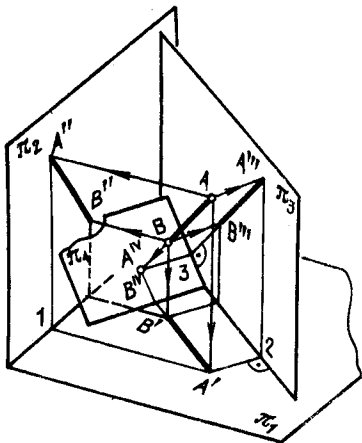


Рис. 208

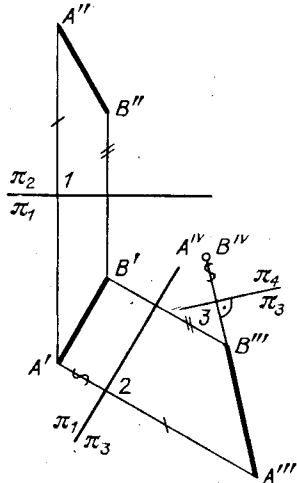


Рис. 209

На рис. 210 дан пример построения натурального вида $\triangle ABC$. Здесь также введены две дополнительные плоскости проекций π_3 и π_4 , но по такой схеме: $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \perp ABC$, а $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\pi_4 \parallel ABC$. Заключительная стадия построения свелась к проведению пл. $\pi_4 \parallel$ пл. ABC (так как требовалось определить натуральный вид $\triangle ABC$); промежуточной стадией была перпендикулярность дополнительной плоскости π_3 к пл. ABC . Эта промежуточная стадия повторяет построение, показанное несколько раньше на рис. 205. В заключительной стадии построения на рис. 210 ось $\pi_3/\pi_4 \parallel C''A''B''$, т. е. пл. π_4 проведена параллельно пл. ABC , что и приводит к определению натурального вида, выражаемого проекцией $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$.

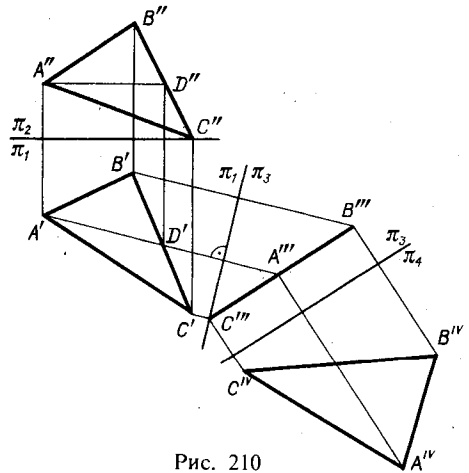


Рис. 210

Итак, в этом примере, чтобы получить параллельность плоскости $\triangle ABC$ и пл. π_4 , потребовалось предварительно расположить взаимно перпендикулярно $\triangle ABC$ и пл. π_3 . Наоборот, в примере на рис. 209, чтобы получить перпендикулярность ($AB \perp \pi_4$), предварительно потребовалось положение параллельности ($AB \parallel \pi_3$).

ВОПРОСЫ К §§ 32–33

1. Какие способы преобразования чертежа рассматриваются в главе V?
2. В чем заключается основное различие этих способов?
3. В чем заключается способ, известный под названием «способ перемены плоскостей проекций»?
4. Какое положение в системе π_1, π_2 должна занять плоскость проекций π_3 , вводимая для образования системы π_3, π_1 ?
5. Какое положение в системе π_1, π_2 займет плоскость проекций π_4 при последовательных переходах от π_1, π_2 через π_3, π_1 к π_3, π_4 ?
6. Как найти длину отрезка прямой линии и углы этой прямой с плоскостями π_1 и π_2 , вводя дополнительные плоскости проекций?
7. Сколько дополнительных плоскостей надо ввести в систему π_1, π_2 , чтобы определить натуральный вид фигуры, плоскость которой перпендикулярна к пл. π_1 или к пл. π_2 ?
8. Сколько и в какой последовательности надо ввести дополнительных плоскостей в систему π_1, π_2 , чтобы заданная прямая общего положения оказалась перпендикулярной к дополнительной плоскости проекций?
9. Тот же вопрос, но в отношении получения натурального вида фигуры, плоскость которой есть плоскость общего положения.

§ 34. ОСНОВЫ СПОСОБА ВРАЩЕНИЯ¹⁾

При вращении вокруг некоторой неподвижной прямой (*ось вращения*) каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (*плоскость вращения*). Точка перемещается по окружности, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения (*центр вращения*), а радиус окружности равеняется расстоянию от вращаемой точки до центра (это *радиус вращения*). Если какая-либо из точек данной системы находится на оси вращения, то при вращении системы эта точка считается неподвижной.

¹⁾ Подробное изложение способа вращения дал в свое время В. И. Курдюмов в книге «Курс начертательной геометрии», в отделе, посвященном ортогональным проекциям.