Ось вращения может быть задана или выбрана; в последнем случае выгодно расположить ось перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, так как при этом упрощаются построения.

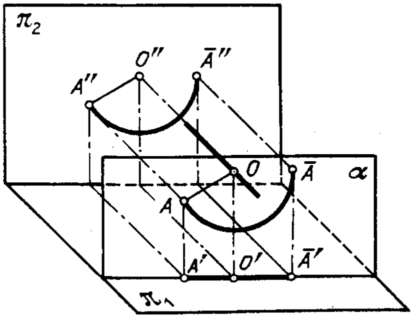

Рис. 211

Действительно, если ось вращения перпендикулярна, например, к пл. π_2, то плоскость, в которой происходит вращение точки, параллельна пл. π_2. Следовательно, траектория точки проецируется на пл. π_2 без искажения, а на пл. π_1 – в виде отрезка прямой линии (рис. 211).

§ 35. ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Вращение вокруг заданной оси.

1. Пусть точка A вращается вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_1 (рис. 212). Через точку A проведена пл. α, перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная пл. π_1. При вращении точка A описывает в пл. α окружность радиуса R; величина радиуса выражается длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой A, проецируется на пл. π_1 без искажения. Так как пл. α перпендикулярна к пл. π_2, то проекции точек окружности на пл. π_2 расположатся на α'', т. е. на прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения. Чертеж дан на рис. 212 справа: окружность, описанная точкой A при вращении ее вокруг оси, спроецирована без искажения на пл. π_1. Из точки O', как из центра, проведена окружность радиуса $R = O'A'$; на пл. π_2 эта окружность изображена отрезком прямой, равным $2R$.

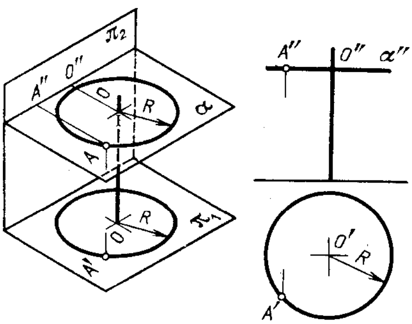

Рис. 212

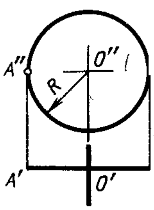

Рис. 213

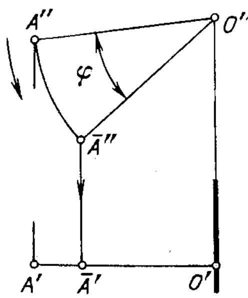

Рис. 214

На рис. 213 изображено вращение точки A вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_2. Окружность, описанная точкой A, спроецирована без искажения на пл. π_2. Из точки O'', как из центра, проведена окружность радиуса $R = O'A'$; на пл. π_1 эта окружность изображена отрезком прямой, равным $2R$.

Из рассмотрения рис. 212 и рис. 213 отчетливо видно, что *при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к какой-нибудь из плоскостей проекций, одна из проекций вращаемой точки перемещается по прямой, перпендикулярной к проекции оси вращения.*

На рис. 214 показан поворот точки A против движения часовой стрелки на угол φ вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к пл. π_2. Из точки O'', как из центра, проведена дуга радиуса $O''A''$, соответствующая углу φ и направлению вращения. Новое положение фронтальной проекции точки A — точка $\bar{A}''$.

2. Теперь рассмотрим поворот отрезка прямой линии вокруг заданной оси. Отрезок AB (рис. 215) повернут в положение $\bar{A}\bar{B}$. Очевидно, дело свелось к повороту точек A и B на заданный угол φ по заданному направлению. Пути перемещения фронтальных проекций этих точек указаны прямыми, проведенными через A'' и B'' перпендикулярно к фронтальной проекции оси вращения.

Новое положение горизонтальной проекции точки A (точка $\bar{A}'$) получено при повороте радиуса $O'A'$ на заданный угол φ. Для нахождения точки $\bar{B}'$ (положение горизонтальной проекции точки B после поворота) проведена дуга радиусом $O'B'$

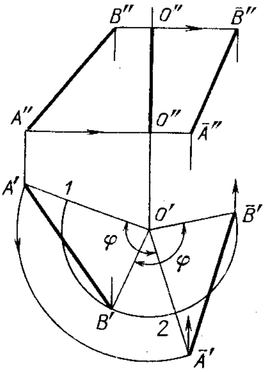

Рис. 215

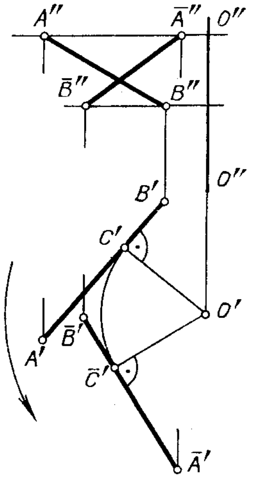

Рис. 216

и в этой дуге отложена хорда $B'\bar{B}'$, равная хорде $1-2$; это соответствует повороту точки B на тот же угол φ.

Далее, из точек $\bar{A}'$ и $\bar{B}'$ проведены линии связи до пересечения с направлениями перемещения фронтальных проекций; получены проекции $\bar{A}''$ и $\bar{B}''$.

Отрезки прямых между точками $\bar{A}''$ и $\bar{B}''$ и между точками $\bar{A}'$ и $\bar{B}'$ определяют новые положения фронтальной и горизонтальной проекций отрезка AB после его поворота в положение $\bar{A}\bar{B}$.

Так как в треугольниках $A'B'O'$ и $\bar{A}'\bar{B}'O'$ (рис. 215) стороны $B'O'$ и $A'O'$ треугольника $A'B'O'$ равны (как радиусы) соответственно сторонам $\bar{B}'O'$ и $\bar{A}'O'$ треугольника $\bar{A}'\bar{B}'O'$ и углы, заключенные между указанными сторонами, также равны, то эти треугольники равны между собой. Значит, $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$, т. е. *величина горизонтальной проекции отрезка, повернутого вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_1, не изменяется.* Очевидно, такое же заключение справедливо в отношении *фронтальной проекции отрезка при его повороте вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_2.*

В равных между собой треугольниках $A'B'O'$ и $\bar{A}'\bar{B}'O'$ (рис. 215) будут равны и их высоты, проведенные, например, из точки O' на $A'B'$ и $\bar{A}'\bar{B}'$.

Сделанные выводы позволяют установить следующий способ построения новых проекций отрезка, вращаемого около оси на заданный угол (рис. 216). Через точку O' проводим прямую, перпендикулярную к $A'B'$; точку C' (пересечение перпендикуляра с $A'B'$) повертываем на заданный угол. Проведя через точку $\bar{C}'$ (новое положение точки C') прямую, перпендикулярную к радиусу $O'\bar{C}'$, получаем направление нового положения горизонтальной проекции отрезка. Так как отрезки $C'A'$ и $C'B'$ не изменяют своей величины, то, откладывая от точки $\bar{C}'$ отрезки $\bar{C}'\bar{A}' = C'A'$ и $\bar{C}'\bar{B}' = C'B'$, находим новое положение $\bar{A}'\bar{B}'$ проекции всего отрезка. Нахождение нового положения фронтальной проекции $\bar{A}''\bar{B}''$ остается прежним.

Указанным способом можно не только повернуть отрезок на заданный угол, но и определить угол, на который надо повернуть заданный отрезок, чтобы придать ему некоторое требуемое положение (например, расположить параллельно плоскости π_2).

3. Поворот плоскости вокруг заданной оси сводится к повороту принадлежащих ей точек и прямых линий.

Пример дан на рис. 217: треугольник ABC, определяющий плоскость, повернут в положение $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ согласно заданным углу φ и направлению, указанному стрелкой. Построение подобно показанному на рис. 215: там были повернуты две точки A и B, здесь же три точки – вершины A, B и C, а следовательно, и вся фигура. Треугольники $A'B'C'$ и $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ равны между собой по построению: при оси, перпендикулярной к пл. π_1, горизонтальная проекция величины своей не изменяет. Это

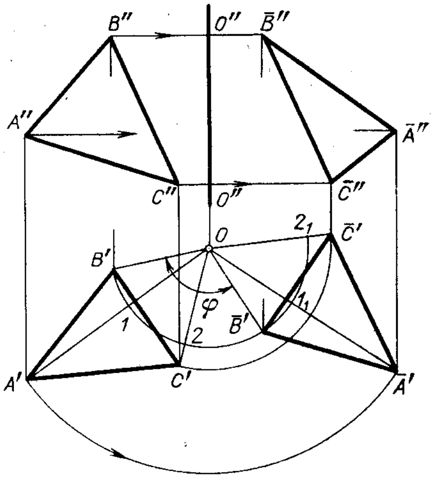

Рис. 217

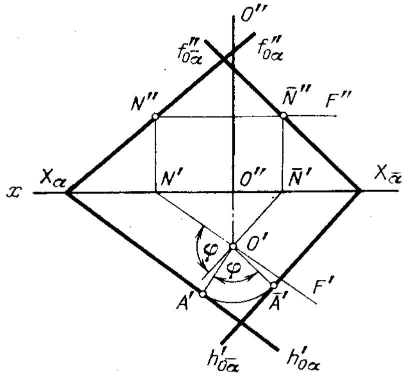

Рис. 218

соответствует тому, что угол наклона пл. ABC по отношению к пл. π_1 не изменяется, если ось вращения перпендикулярна к пл. π_1. Очевидно, при повороте вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_2, не изменяется угол наклона вращаемой плоскости к пл. π_2 и сохраняется величина фронтальных проекций.

При вращении плоскости, выраженной ее следами, обычно поворачивают один из следов и горизонталь (или фронталь) плоскости. Пример дан на рис. 218; плоскость общего положения α повернута на угол φ вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_1. На следе $h'_{0\alpha}$ взята точка, ближайшая к оси вращения,– точка A' ($O'A' \perp h'_{0\alpha}$), подобно тому, как была на рис. 216 взята точка C'. Затем точка A' повернута на угол φ. Через полученную точку $\bar{A}'$ проведена прямая линия, перпендикулярная к $O'\bar{A}'$; это горизонтальный след плоскости в ее новом положении.

Для нахождения фронтального следа плоскости после ее поворота достаточно найти, помимо найденной точки $X_{\bar{\alpha}}$ на оси x, еще одну точку, принадлежащую следу. В пл. α взята горизонталь $N'F'$, $N''F''$, пересекающая ось вращения ($N'F'$ проходит через горизонтальную проекцию оси вращения). Конечно, можно взять горизонталь и не пересекающую ось вращения. Так как горизонталь и при новом положении плоскости останется параллельной ее горизонтальному следу, то надо провести через O' прямую, параллельную $h'_{0\bar{\alpha}}$; получится новое положение горизонтальной проекции горизонтали. Фронтальная ее проекция не изменит своего направления, а поэтому легко найти новый фронтальный след горизонтали – точку N''. Теперь можно построить фронтальный след ($f''_{0\bar{\alpha}}$).

Вращение вокруг выбранной оси. В ряде случаев ось вращения может быть выбрана. При этом, если ось вращения выбрать проходящей через один из концов отрезка, то построение упростится, так как точка, через которую проходит ось, будет «неподвижной» и для поворота отрезка надо построить новое положение проекций только одной точки – другого конца.

На рис. 219 показан случай, когда для поворота отрезка AB выбрана ось вращения, перпендикулярная к пл. π_1 и проходящая через точку A. При повороте вокруг такой оси можно, например, расположить отрезок параллельно пл. π_2.

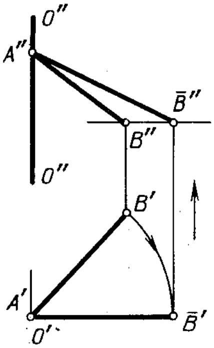

Рис. 219

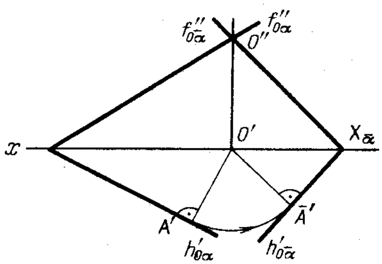

Рис. 220

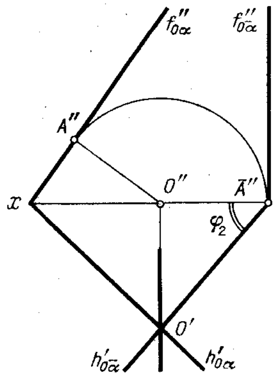

Рис. 221

Именно такое положение показано на рис. 219. Горизонтальная проекция отрезка в своем новом положении перпендикулярна к линии связи $A'A''$. Найдя точку $\bar{B}''$ и построив отрезок $A''\bar{B}''$, получаем фронтальную проекцию отрезка AB в его новом положении. Проекция $A''\bar{B}''$ выражает длину отрезка AB. Угол $A''\bar{B}''B''$ равен углу между прямой AB и пл. π_1.

Если поставить перед собой цель – определить угол наклона прямой общего положения к пл. π_2, то надо провести ось вращения перпендикулярно к пл. π_2 и повернуть прямую так, чтобы она стала параллельной пл. π_1. Предоставляем читателю выполнить такое построение.

Если при повороте плоскости, выраженной следами, можно выбрать ось вращения, то ее целесообразно расположить в плоскости проекций; построения в этом случае упрощаются. Пример дан на рис. 220. Положим, что ось вращения должна быть перпендикулярна к пл. π_1. Если ее взять в пл. π_2, то на следе $f''_{0\alpha}$ оказывается «неподвижная» точка O (в пересечении с осью вращения). После поворота плоскости фронтальный след должен пройти через эту точку. Следовательно, найдя положение горизонтального следа ($h'_{0\bar{\alpha}}$) после поворота, надо провести след $f''_{0\bar{\alpha}}$ через точку $X_{\bar{\alpha}}$ и через точку O''. По сравнению с рис. 218 упрощение состоит в том, что отпала горизонталь. Она понадобилась бы в случае «ухода» точки $X_{\bar{\alpha}}$ за пределы чертежа; но в аналогичном случае на рис. 218 пришлось бы взять две вспомогательные линии.

На рис. 221 плоскость общего положения повернута в положение горизонтально-проецирующей; при этом определился угол наклона пл. α к пл. π_2. Если взять ось вращения, перпендикулярную к пл. π_1, то можно пл. α поставить в положение фронтально-проецирующей, определив при этом угол наклона плоскости к пл. π_1.

Сравнивая между собой плоскости до и после поворота, замечаем, что угол, образуемый следами $f''_{0\alpha}$ и $h'_{0\alpha}$ на чертеже, вообще изменяется.

Если представить себе круговой конус с вершиной в точке O и с основанием на рис. 220 в пл. π_1, а на рис. 221 в пл. π_2, и касательную к конусу пл. α, то поворот пл. α вокруг оси вращения, совпадающей с осью конуса, представляет собой как бы «обкатку» конуса касательной к нему плоскостью.

ВОПРОСЫ К §§ 34–35

1. В чем заключается способ вращения?
2. Что такое плоскость вращения точки и как она располагается по отношению к оси вращения?
3. Что такое центр вращения точки при повороте ее вокруг некоторой оси?
4. Что такое радиус вращения точки?

Последующие вопросы относятся к вращению вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

5. Как перемещаются проекции точки?
6. Какая из проекций отрезка прямой линии не изменяет своей величины?
7. Как осуществляется поворот плоскости: а) не выраженной следами, б) выраженной следами?
8. В каком случае не изменяется при вращении наклон прямой линии по отношению: а) к пл. π_1, б) к пл. π_2?
9. Такой же вопрос относительно плоскости π_3.
10. Можно ли путем поворота определить длину отрезка прямой линии и угол ее наклона к пл. π_1 и к пл. π_2?
11. Можно ли путем поворота плоскости определить угол ее наклона к пл. π_1 и к пл. π_2?
12. Какое выгодное положение можно придать оси вращения при повороте: 1) отрезка прямой, 2) плоскости, выраженной следами?

§ 36. ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ВРАЩЕНИЯ БЕЗ УКАЗАНИЯ НА ЧЕРТЕЖЕ ОСЕЙ ВРАЩЕНИЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ К ПЛОСКОСТИ π_1 ИЛИ π_2

Раньше (см. § 35) мы видели, что если вращать отрезок прямой линии или плоскую фигуру вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не изменяется ни по виду, ни по величине – меняется лишь положение этой проекции относительно оси проекций. Что же касается другой проекции – на плоскости, параллельной оси вращения, то все точки этой проекции (за исключением, конечно, проекций точек, расположенных на оси вращения) перемещаются по прямым, параллельным оси проекций, и проекция вообще изменяется по форме и по величине. Пользуясь этими свойствами, можно применить способ вращения, не задаваясь изображением оси вращения и не устанавливая величины радиуса вращения; достаточно лишь, не изменяя вида и величины одной из проекций рассматриваемой фигуры, переместить эту проекцию в требуемое положение, а затем построить другую проекцию так, как указано выше.

Например, задавшись целью повернуть отрезок AB прямой общего положения (рис. 222) так, чтобы он оказался перпендикулярным к пл. π_1, начинаем с поворота вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_1, до положения, параллельного пл. π_2, но эту ось на чертеже не указываем. Так как при таком повороте горизонтальная проекция отрезка не изменяет своей величины, то проекцию $\bar{A}'\bar{B}'$ берем равной $A'B'$ и располагаем параллельно оси x, что соответствует параллельности самого отрезка пл. π_2.

Найдя соответствующую фронтальную проекцию отрезка ($\bar{A}''\bar{B}''$), выполняем второй поворот, теперь вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_2, до искомого положения – перпендикулярности AB к пл. π_1. И эту ось на чертеже не изображаем. Располагаем проекцию $\bar{\bar{A}}''\bar{\bar{B}}''$, равную $\bar{A}''\bar{B}''$, перпендикулярно к оси x. Горизонтальная проекция отрезка выражается точкой с двойным обозначением – $\bar{\bar{A}}'\bar{\bar{B}}'$.

Итак, выполненные операции соответствуют поворотам вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, но оси эти не указаны. Конечно, их можно найти.