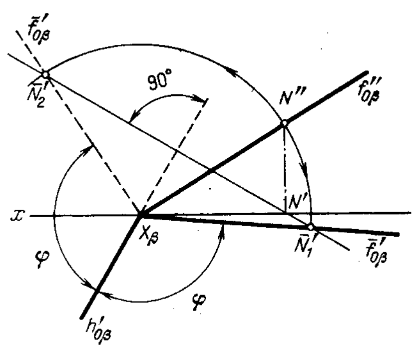

Рис. 234

где надо было «поднять в пространство» (т. е. на пл. α) отрезок AB, заданный в совмещенном с пл. π_1 положении ($\bar{A}'\bar{B}'$). Построение несколько усложнено тем, что точка пересечения следов $f''_{0\alpha}$ и $h'_{0\alpha}$ считается недоступной.

Построена вспомогательная пл. $\beta \parallel \alpha$, и найден след $\bar{f}'_{0\beta}$ в совмещении с пл. π_1. Так как $\beta \parallel \alpha$, то $\bar{f}'_{0\beta}$ определяет направление фронталей как пл. β, так и пл. α в совмещенном с пл. π_1 положении. Поэтому, проведя $\bar{B}'\bar{N}' \parallel \bar{f}'_{0\beta}$, получаем в совмещении с пл. π_1 ту фронталь пл. α, на которой расположена в пространстве точка B. Построив проекции этой фронтали, находим на них проекции B' и B''. Если же теперь продолжить прямую $\bar{A}'\bar{B}'$ до пересечения в точке M' со следом $h'_{0\alpha}$, то на прямой, проходящей через эту «неподвижную» точку M' и через построенную проекцию B', расположится горизонтальная проекция $A'B'$. Проекция $A''B''$ получится на прямой, проходящей через точки M'' и B''.

Нами рассмотрено совмещение плоскости с горизонтальной плоскостью проекций, причем вращение плоскости производилось вокруг горизонтального следа. Если требуется совместить ее с фронтальной плоскостью проекций, то следует вращать плоскость вокруг ее фронтального следа.

Если горизонтально-проецирующую плоскость вращать вокруг ее фронтального следа до совмещения с пл. π_2, то горизонтальный след плоскости после совмещения расположится на оси проекций. Также, если фронтально-проецирующую плоскость вращать вокруг ее горизонтального следа до совмещения с пл. π_1, то фронтальный след плоскости расположится на оси проекций.

На рис. 234 изображена плоскость с тупым углом между следами $f''_{0\beta}$ и $h'_{0\beta}$ в совмещении с пл. π_1 при «вращении на зрителя» и при вращении в обратном направлении.

ВОПРОСЫ К §§ 36–37

1. Можно ли показать на чертеже поворот, например, прямой вокруг оси, перпендикулярной к пл. π_1 или пл. π_2, не изображая самой оси? На чем основан такой прием?
2. Какое название встречается для вращения без изображения оси?
3. Ка́к располагается плоскость вращения точки, если ось вращения последней лишь параллельна пл. π_1 или пл. π_2, но не перпендикулярна ни к π_1, ни к π_2? Почему при этом приходится определять натуральную величину радиуса вращения?
4. Что служит признаком достижения горизонтального положения плоскости, заданной горизонталью и точкой, при повороте вокруг этой горизонтали и где получается фронтальная проекция точки после поворота?
5. Что понимается под названием «способ совмещения»?
6. Что понимается под названием «подъем в пространство»?

§ 38. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ СПОСОБОВ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ И ВРАЩЕНИЯ

1. Построить проекции точки пересечения двух профильных прямых, лежащих в общей для них профильной плоскости.

Решение дано на рис. 204. Применен способ перемены плоскостей проекций. Для получения проекции K'' надо отложить отрезок $K''2$, равный найденному отрезку $K'''1$.

2. Провести дополнительную плоскость проекций так, чтобы прямая общего положения оказалась перпендикулярной к этой плоскости.

Решение дано на рис. 209. Введены последовательно две дополнительные плоскости проекций. Отрезок AB расположен перпендикулярно ко второй дополнительной пл. пр. π_4.

3. Повернуть прямую общего положения так, чтобы она стала перпендикулярной к пл. π_1.

Решение дано на рис. 222. Применены два поворота. После второго поворота отрезок AB перпендикулярен к пл. π_1.

4. Определить длину отрезка прямой общего положения и углы ее наклона к плоскостям проекций π_1 и π_2.

На рис. 202 показано решение способом перемены плоскостей проекций. Введена дополнительная пл. $\pi_3 \perp \pi_2$, параллельная данному отрезку CD. Определены длина отрезка и угол с пл. π_2.

На рис. 219 показано решение способом вращения. Выполнен поворот вокруг оси, проведенной через точку A отрезка AB, который выведен в положение, параллельное пл. π_2. Определены длина отрезка и угол с пл. π_1.

5. Определить расстояние от точки до прямой.

Обратимся к рис. 228. На нем показан поворот плоскости, определяемой точкой K и прямой AB, вокруг горизонтали KD этой плоскости. В результате поворота плоскость располагается параллельно пл. π_1. Теперь (рис. 235) можно провести перпендикуляр $K'\bar{L}'$: отрезок $K'\bar{L}'$ определяет искомое расстояние от точки K до прямой AB.

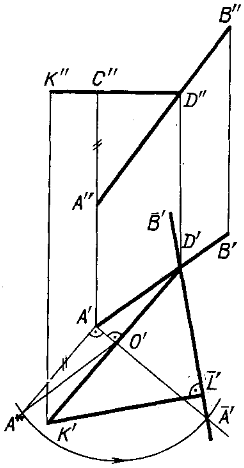

Рис. 235

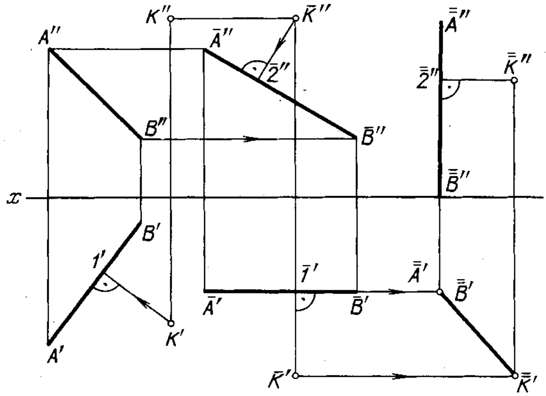

Рис. 236

На рис. 236 показано решение той же задачи вращением системы, состоящей из точки K и прямой AB, вокруг осей – сначала перпендикулярной к пл. π_1, затем перпендикулярной к пл. π_2. Оси не изображаются (см. § 36). Так как при первом повороте горизонтальная проекция системы только меняет свое положение, но не конфигурацию и величину, то, проведя перпендикуляр $K'1'$, строим горизонтальную проекцию $\bar{A}'\bar{B}'$ в требуемом положении. По этой проекции находим фронтальную проекцию $\bar{A}''\bar{B}''\bar{2}''\bar{K}''$. При втором повороте надо сохранить конфигурацию и величину этой проекции. «Привязываем» точку $\bar{K}''$ к $\bar{A}''\bar{B}''$ при помощи перпендикуляра $\bar{K}''\bar{2}''$ и строим проекцию $\bar{\bar{A}}''\bar{\bar{B}}''\bar{\bar{2}}''\bar{\bar{K}}''$, а по ней проекцию $\bar{\bar{K}}'$ точки K и точку с двойным обозначением ($\bar{\bar{A}}'$ и $\bar{\bar{B}}'$) – проекцию отрезка AB. Искомое расстояние от точки K до прямой AB выражается отрезком $\bar{\bar{K}}'\bar{\bar{A}}'$ ($\bar{\bar{K}}'\bar{\bar{B}}'$).

6. Определить расстояние от точки до плоскости.

На рис. 201 показано решение для случая горизонтально-проецирующей плоскости. Решение сводится к проведению перпендикуляра $A'K'$.

На рис. 237 показано решение для случая плоскости общего положения; слева плоскость задана треугольником, справа – следами. Применен способ перемены плоскостей проекций – введена дополнительная пл. π_3, перпендикулярная к пл. π_1 и к данной плоскости, которая в результате оказывается перпендикулярной к пл. π_3 (см. рис. 205 и 206 и пояснения к ним). Искомое расстояние определяется перпендикуляром, проведенным из точки K''' к проекции $B'''C'''$ (рис. 237, слева) и к следу α''' (рис. 237, справа).

7. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Решение этой задачи можно свести к определению расстояния от точки, взятой в одной из плоскостей, до другой плоскости или ввести в систему π_1, π_2 дополнительную плоскость

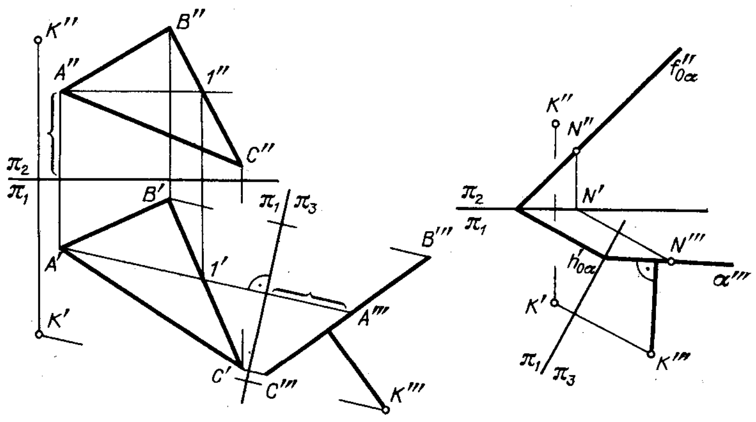

Рис. 237

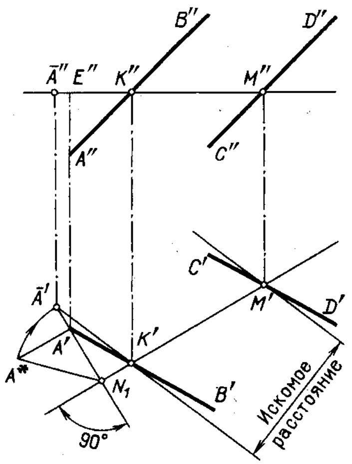

Рис. 238

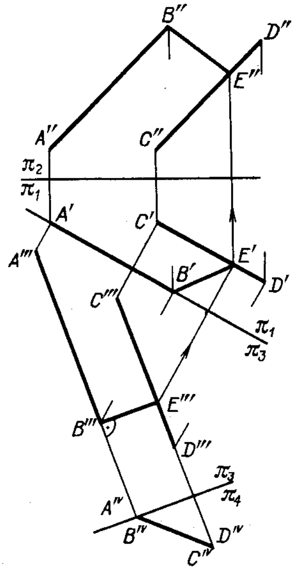

Рис. 239

проекций, перпендикулярную к данным параллельным плоскостям, как это сделано на рис. 237 в отношении одной плоскости.

8. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми.

Решение этой задачи можно свести к определению расстояния от точки, взятой на одной из прямых, до другой прямой (см. рис. 235 и 236).

На рис. 238 показано построение, при котором плоскость, определяемая параллельными прямыми, повернута вокруг одной из ее горизонталей (или фронталей) так, что плоскость, а следовательно, и данные прямые расположились параллельно плоскости проекций.

Вращение произведено вокруг горизонтали KM. Достаточно найти новое положение хотя бы точки A (на горизонтальной плоскости точка $\bar{A}'$): прямая $\bar{A}'K'$ и параллельная ей прямая, проведенная через точку M', представляют собой горизонтальные проекции данных параллельных прямых, когда плоскость, ими определяемая, расположена параллельно пл. π_1.

На рис. 239 показано решение той же задачи способом перемены плоскостей проекций. Сначала обе прямые спроецированы на пл. π_3, им параллельную (пл. π_3 проведена через одну из прямых — через AB). Затем прямые спроецированы на пл. π_4, к ним перпендикулярную. На ней проекции прямых являются точками. Отрезок $A^{IV}C^{IV}$ (или $B^{IV}D^{IV}$) определяет искомое расстояние между прямыми.

На том же рис. 239 показаны проекции отрезка, определяющего расстояние между данными прямыми. Проекция на пл. π_3 проведена через точку B''' (можно было бы взять и какуюлибо другую точку на $A'''B'''$) параллельно оси π_3/π_4, так как в системе π_3, π_4 проекция на пл. π_4 выражает натуральную величину расстояния между AB и CD. Дальнейшее ясно из чертежа. Проекция на пл. π_4 должна быть больше каждой из проекций $B'''E'''$, $B'E'$, $B''E''$.

9. Определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми и выразить в проекциях общий к ним перпендикуляр. Напомним, что кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть в то же время и расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые.

На рис. 240 показан общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и CD.

Если через AB и CD провести параллельные между собой плоскости α и β, затем через одну из этих прямых, хотя бы через AB, провести пл. δ, перпендикулярную к α и β, и найти прямую пересечения плоскостей δ и β (эта прямая MN параллельна прямой AB), то в точке E пересечения прямых CD и MN будет проходить искомый перпендикуляр к прямым AB и CD.

В построении, показанном на рис. 241, одна из скрещивающихся прямых (AB) спроецирована в точку на дополнительную плоскость проекций (π_4). Выполнен следующий план построения:

а) От системы π_1, π_2 перейти к системе π_3, π_1, где $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \parallel AB$.

б) От системы π_3, π_1 перейти к системе π_3, π_4, где $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\pi_4 \perp AB$.

в) Получив на плоскости проекций π_4 проекцию прямой AB в виде точки и проекцию второй прямой $C^{IV}D^{IV}$ и проведя из A^{IV} (B^{IV}) перпендикуляр на $C^{IV}D^{IV}$, найти искомое расстояние между данными скрещивающимися прямыми AB и CD.

Далее, на рис. 241 показано построение проекций общего для AB и CD перпендикуляра. Ход построения указан стрелками. Проекция $E'''F'''$ проведена параллельно оси π_3/π_4.

10. Построить проекции отрезка прямой общего положения, составляющей с пл. π_1 угол φ_1, а с пл. π_2 угол φ_2. Такое построение было уже показано в § 13 (рис. 73 и 74), но без применения способов, изложенных в главе V. Теперь рассмотрим решение при помощи способа вращения.

Пусть (рис. 242) прямая должна пройти через точку A под углом φ_1 к пл. π_1 и под углом φ_2 к пл. π_2. Известно (см. § 13), что для прямой общего положения $\varphi_1 + \varphi_2 < 90°$.

Через точку A проведены две прямые: одна параллельно пл. π_2 под углом φ_1 к π_1, другая параллельно пл. π_1 под углом φ_2 к π_2. На обеих прямых отложены равные отрезки: $A''\bar{\bar{B}}'' = A'\bar{B}'$. Повернем отрезок $A\bar{B}$ вокруг оси, перпендикулярной к π_1, а отрезок $A\bar{\bar{B}}$ вокруг оси, перпендикулярной к π_2, причем обе эти оси проходят через точку A (что позволяет сохранить эту точку в заданном ее положении). В некоторый момент оба отрезка совпадут

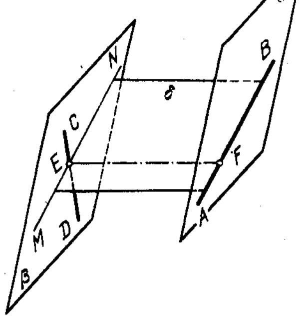

Рис. 240

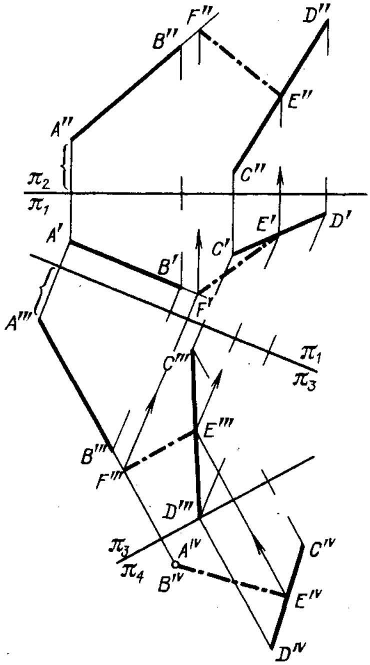

Рис. 241

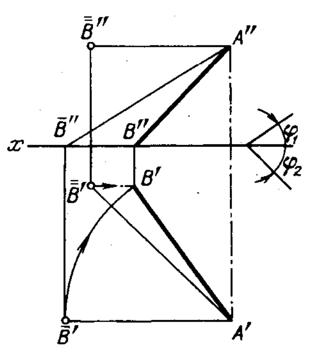

Рис. 242

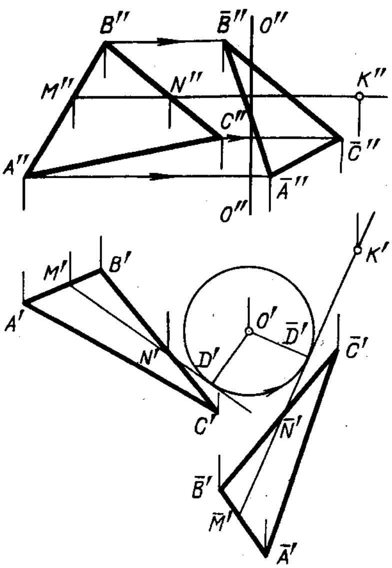

Рис. 243

(на рис. 242 это показано в виде отрезка AB), и, следовательно, окажется построенной искомая прямая. Всего можно провести через точку A четыре такие прямые.

11. Построить плоскость общего положения, проходящую через точку A и расположенную под заданными углами к пл. π_1 и к пл. π_2.

На с. 77 была установлена зависимость между углами, составляемыми плоскостью общего положения с пл. π_1 и с пл. π_2, и углами, составляемыми перпендикуляром к этой плоскости с теми же плоскостями проекций. На основании этих зависимостей для построения плоскости под углами σ_1 к π_1 и σ_2 к π_2 надо предварительно построить прямую под углами $\varphi_1 = 90° - \sigma_1$ к π_1 и $\varphi_2 = 90° - \sigma_2$ к π_2 (см. задачу 10), а затем через заданную точку A провести плоскость, перпендикулярную к построенной прямой[1]).

12. Плоскость общего положения, заданную треугольником ABC (рис. 243), повернуть вокруг заданной вертикальной оси так, чтобы эта плоскость прошла через заданную точку K. Если плоскость пройдет через точку K, то эта точка окажется в плоскости на одной из ее горизонталей. Можно сразу указать ту горизонталь, которая после поворота плоскости должна пройти через точку K: для этого достаточно провести фронтальную проекцию горизонтали через точку K''. Построив горизонтальную проекцию горизонтали ($M'N'$) и определив радиус вращения ($O'D'$), проводим окружность, по отношению к которой горизонтальная проекция горизонтали будет касательной в любом положении при вращении плоскости вокруг данной оси. Если теперь провести из точки K' касательную к этой окружности ($K'\bar{D}'$), то мы можем принять ее за горизонтальную проекцию горизонтали, на которой должна находиться точка K, когда плоскость пройдет через нее.

Построив горизонтальную проекцию горизонтали после поворота ($\bar{M}'\bar{N}'$), строим горизонтальную проекцию треугольника: она лишь меняет положение, но остается неизменной по виду и величине ($\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}' = A'B'C'$). По проекции $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ находим проекцию $\bar{A}''\bar{B}''\bar{C}''$.

Ограничиваемся одним решением. Второе решение получится, если провести из точки K' вторую касательную.

Только что рассмотренная задача может быть видоизменена следующим образом: повернуть плоскость общего положения вокруг некоторой вертикальной оси так, чтобы данная точка оказалась в этой плоскости.

Эта задача отличается от предыдущей только тем, что ось вращения нам надо выбрать самим. Можно ли выбрать ее произвольно?

Оказывается, что *не каждая* из прямых, перпендикулярных к плоскости π_1, может быть принята в качестве оси, пригодной для решения данной задачи.

Из рис. 243 следует, что горизонтальная проекция оси вращения должна быть расположена так, чтобы относительно горизонтальных проекций точки K и горизонтали MN окружность с центром O', касающаяся прямой $M'N'$, не заключала внутри себя точки K', так как из точки K' приходится проводить касательную к этой окружности.

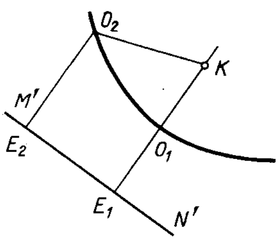

Рис. 244

Значит, расстояние искомой точки O' от точки K' должно быть во всяком случае не меньше, чем расстояние этой же точки O' от прямой $M'N'$. Если мы возьмем точку O' так, чтобы оба эти расстояния были равны (например, в точке O_1 или O_2 на рис. 244), то в ней еще можно установить ось вращения.

Где на чертеже будут лежать все такие точки, которые одинаково удалены и от точки K, и от прямой $M'N'$? Известно, что они располагаются на кривой линии — *параболе*, фокус которой находится в точке K, а директрисой служит прямая $M'N'$. Точки, находящиеся внутри этой параболы, лежат ближе к фокусу, чем к директрисе, и непригодны в ка-

[1]) Очевидно, построив прямую и так, как было показано в § 13, мы можем провести к ней перпендикулярную плоскость, которая и будет искомой.

честве горизонтальной проекции оси вращения; точки же на самой параболе или вне ее могут быть выбраны в качестве такой проекции.

13. Через точку, лежащую в некоторой плоскости, провести в этой плоскости прямую под заданным углом φ_1 к пл. π_1.

Положим, что плоскость (назовем ее α) задана двумя пересекающимися прямыми (рис. 245, слева) и что надо провести искомую прямую через точку A, в которой эти прямые пересекаются.

Найдем горизонтальный след пл. α. Для этого проведена ось проекций x и найдены горизонтальные следы обеих прямых, определяющих пл. α. Через эти следы проходит след $h'_{0\alpha}$. Если бы искомая прямая AB была параллельна пл. π_2, то угол между проекцией $A''B''$ и осью проекций равнялся бы углу между прямой и пл. π_1. Поэтому через точку A'' (рис. 245, справа) надо провести прямую под заданным углом φ_1 к оси проекций.

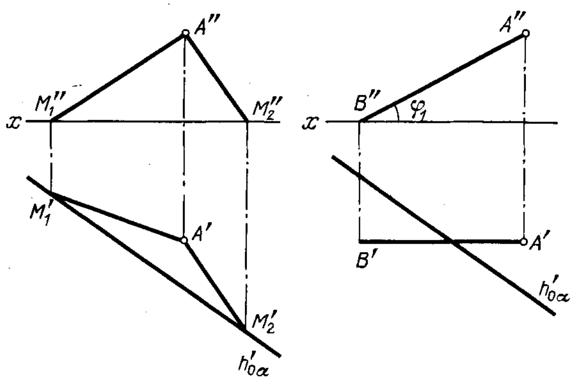

Рис. 245

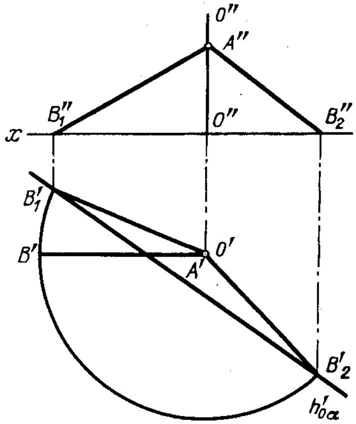

Рис. 246

Точку B'' на этой прямой можно взять произвольно; она взята для простоты на оси x. Затем построена горизонтальная проекция $A'B'$, соответствующая полученному отрезку $A''B''$. Проекция $A'B'$ должна быть параллельна оси проекций, так как прямая поставлена параллельно пл. π_2.

Построенная прямая ($A''B''$, $A'B'$) удовлетворяет одному условию: она проведена под заданным углом φ_1 к пл. π_1, но не удовлетворяет другому: она не лежит в заданной плоскости. Чтобы ввести прямую AB в пл. α и в то же время сохранить угол φ_1 неизменным, надо повернуть ее вокруг оси вращения, перпендикулярной к пл. π_1. Так как точка A лежит в пл. α, то надо взять ось вращения, проходящую через точку A (рис. 246); точка B при этом вращении будет двигаться в пл. π_1 и в тот момент, когда AB войдет в пл. α, точка B будет на $h'_{0\alpha}$ этой плоскости. Поэтому, вращая прямую $A'B'$ вокруг точки O' (A'), «выводим» точку B' на след $h'_{0\alpha}$ и по найденному новому положению горизонтальной проекции находим новое положение проекции на пл. π_2.

Задача, как видно из рис. 246, имеет два ответа, и решение ее возможно, если заданный угол φ_1 не больше угла наклона самой пл. α к пл. π_1. Если эти углы равны между собой, то получается только один ответ.

14. Найти натуральную величину плоского угла.

Решение этой задачи можно видеть на рис. 203 и 210, где построение выполнено с помощью способа перемены плоскостей проекций (треугольник спроецирован на параллельную ему дополнительную плоскость проекций, и тем самым определены углы треугольника). Затем можно увидеть определение натуральной величины плоского угла с помощью способа вращения на рис. 223 и 227, а также на рис. 230 и 234, где при совмещении плоскости с соответствующей плоскостью проекций найдена натуральная величина угла между следами плоскости в первой четверти.

15. Разделить плоский угол пополам. Вопрос о построении на чертеже биссектрисы угла был затронут в § 15: рассматривались те случаи задания угла, когда проведение биссектрисы угла проекции соответствовало делению пополам угла в пространстве. Теперь рассматривается общий случай. Решение показано на рис. 247.

Плоскость, определяемую сторонами заданного угла, следует расположить параллельно одной из плоскостей проекций; тогда угол изобразится в своей проекции на этой плоскости без искажения и может быть разделен пополам. На рис. 247 плоскость угла повернута до положения, параллельного пл. π_1. Для выполнения этого проведена горизонталь AC. Поворот треугольника ABC вокруг горизонтали AC сводится к повороту одной вершины – точки B. Центр вращения получается в точке O (проекция $O''O'$); натуральная величина радиуса вращения R_B получается при построении прямоугольного треугольника $O'B'B^*$, в котором катет $O'B'$ представляет собой горизонтальную проекцию радиуса вращения, а катет $B'B^*$ равен отрезку $B''1$.

Точку $\bar{B}$ соединяют с точками A' и C' – горизонтальными проекциями точек, расположенных на оси вращения и принадлежащих сторонам угла. Новую горизонтальную проекцию – угол $A'\bar{B}C'$, равный заданному углу ABC, делят пополам и получают при этом точку D' на горизонтальной проекции горизонтали, а затем и соответствующую ей проекцию D'' на прямой $A''C''$. Эти точки D' и D'' представляют собой проекции точки, расположенной на оси вращения AC и, следовательно, «неподвижной». Прямые $B''D''$ и $B'D'$ являются проекциями искомой биссектрисы угла.

16. Найти натуральную величину угла между прямой линией и плоскостью.

На рис. 202 и 219 показано определение величины угла прямой общего положения с плоскостями проекций.

Теперь рассмотрим решение в случае некоторой плоскости общего положения.

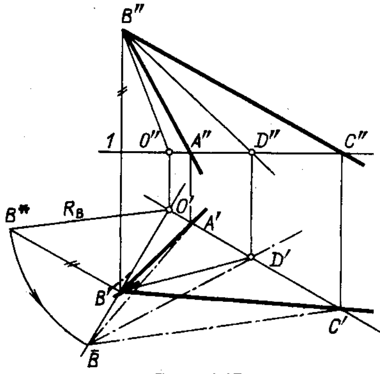

Рис. 247

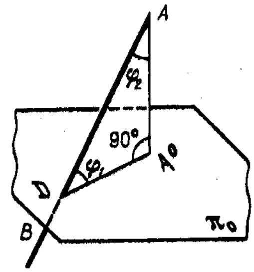

Рис. 248

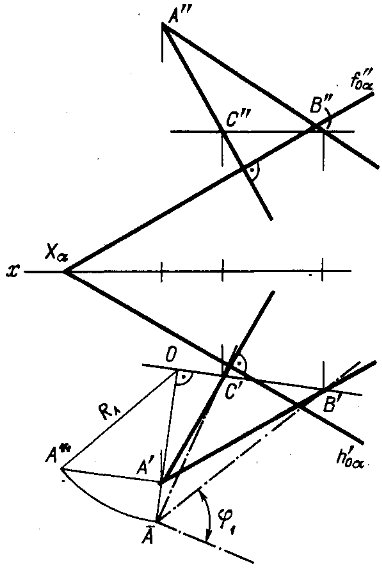

Рис. 249

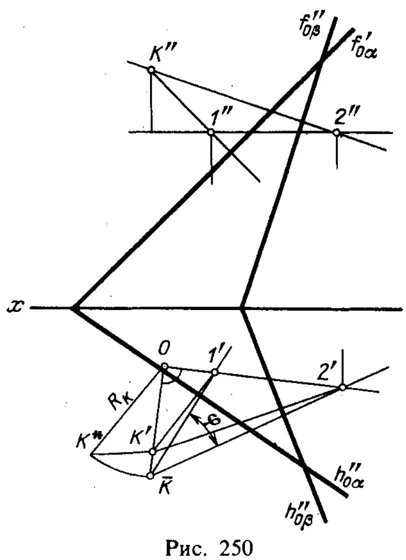

Рис. 250

Если требуется определить лишь величину угла между прямой и плоскостью, то построение проекций этого угла не является необходимым [1]. Действительно, величину угла между прямой AB и пл. π_0 (рис. 248) можно определить, если построить угол φ_2 и определить его величину: искомый угол $\varphi_1 = 90° - \varphi_2$. Но при этом значительно упрощается решение задачи, так как отпадают все построения, связанные с нахождением точек D и A^0.

Построение дано на рис. 249. Проводя из точки A прямой AB перпендикуляр на пл. α, мы строим проекции угла, дополняющего искомый угол между прямой AB и пл. α до 90°. Проводим горизонталь CB и вращением вокруг нее располагаем плоскость, определяемую углом CAB, параллельно пл. π_1. Новая горизонтальная проекция $\angle C'\overline{A}B' = \angle CAB$. Теперь остается построить угол, дополняющий угол $C'\overline{A}B'$ до 90°; на рис. 249 это угол φ_1. Он равен искомому углу между прямой AB и плоскостью.

Если плоскость задана не следами, а, например, треугольником, то надо для проведения к ней перпендикуляра построить в треугольнике горизонталь и фронталь (см. § 29).

17. Определить натуральную величину угла между двумя плоскостями.

На рис. 250 показано решение без построения проекций линейного угла, измеряющего двугранный, образуемый плоскостями α и β [2]. Такое решение особенно удобно, когда плоскости заданы следами.

Если из некоторой точки провести перпендикуляры к граням двугранного угла, то искомый линейный угол будет равен разности между углом 180° и углом, образованным этими перпендикулярами. На рис. 250 для определения угла между плоскостями α и β выполнены следующие построения:

а) из некоторой точки K проведены перпендикуляры: один к пл. α, другой к пл. β;

б) поворотом вокруг горизонтали угол, образованный перпендикулярами, расположен параллельно пл. π_1.

Искомый угол между плоскостями α и β равен найденному углу φ или (если φ – тупой угол) разности между углом 180° и найденным углом.

На рис. 251 дано решение с помощью способа перемены плоскостей проекций. Определена величина двугранного угла, образованного треугольными гранями ABC и ABD. Ребром служит отрезок AB. Если AB окажется перпендикулярным к дополнительной плоскости проекций, то обе грани спроецируются на нее в виде отрезков, угол между которыми равен линейному углу данного двугранного (рис. 252).

Построение на рис. 251 выполнено по следую-

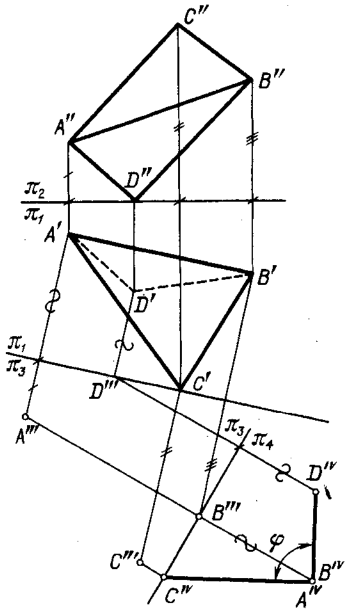

Рис. 251

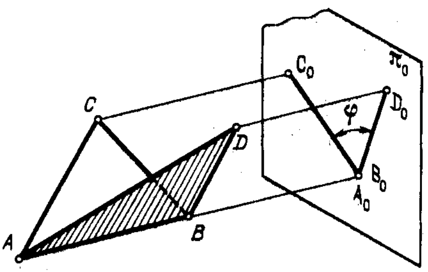

Рис. 252

[1]) О построении проекций угла между прямой и плоскостью см. § 31, с. 78.
[2]) О построении проекций линейного угла в двугранном см. § 31, с. 78.

щей схеме: от системы π_1, π_2 к системе π_3, π_1, где $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \parallel AB$, и затем к системе π_3, π_4, где $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\pi_4 \perp AB$. На пл. π_3 показаны только проекции точек A, B, C и D; грани ABC и ABD не очерчены.

Определение натуральной величины углов между плоскостью общего положения и плоскостями проекций π_1 и π_2 с помощью способа перемены плоскостей проекций было показано на рис. 205, 206 и 207, а на рис. 221 – с помощью способа вращения (угол с пл. π_2).

18. Определить натуральный вид треугольника.

Решение с помощью способа перемены плоскостей проекций можно найти на рис. 203 и 210, а на рис. 223 и 227 – с помощью способа вращения.

19. Точку A повернуть вокруг оси MN на угол φ по часовой стрелке, если смотреть от M к N (рис. 253).

Построение выполнено с помощью способа перемены плоскостей проекций. Последовательным образованием новых систем плоскостей проекций по схеме: от системы π_1, π_2 к системе π_3, π_1, где $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_3 \parallel MN$, и, наконец, к системе π_3, π_4, где $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\pi_4 \perp MN$, получаем взаимно параллельное расположение плоскости вращения точки A и плоскости

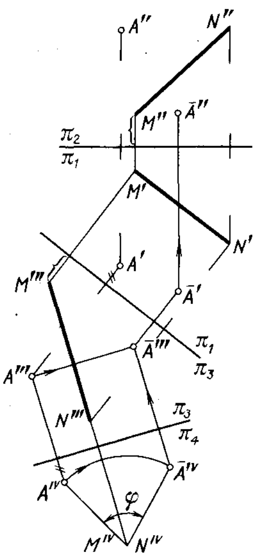

Рис. 253

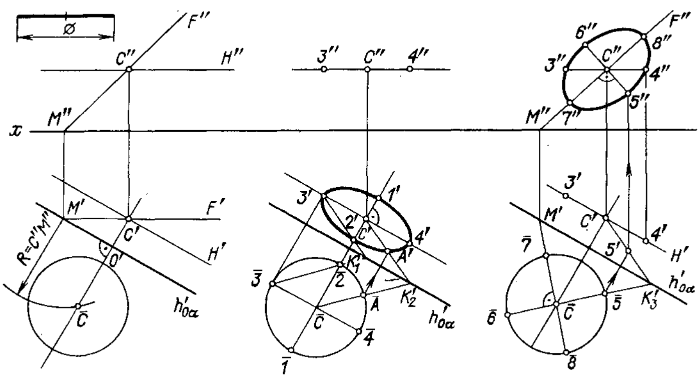

Рис. 254

проекций π_4. В связи с этим поворот точки A изображается как поворот проекции A^{IV} на заданный угол вокруг центра M^{IV} (N^{IV}) по часовой стрелке (так как, по условию для определения направления вращения, следует смотреть от точки M к точке N). Далее получаем проекцию $\bar{A}'''$ на прямой, проведенной через A''' перпендикулярно к $M'''N'''$, а затем проекции $\bar{A}'$ и $\bar{A}''$, что соответствует перемещению точки A в положение $\bar{A}$.

20. Построить проекции окружности заданного диаметра, расположенной в плоскости общего положения.

Решение дано на рис. 254. Для большей ясности построение выполнено поэтапно. Применен способ вращения.

Пусть плоскость (назовем ее α), в которой расположена окружность, задана горизонталью с проекциями $C''H''$ и $C'H'$ и фронталью с проекциями $C''F''$ и $C'F'$. Центр окружности – в точке C.

В первой позиции (рис. 254, слева) задаемся осью x и, найдя горизонтальный след фронтали CF – точку M, проводим след $h'_{0\alpha}$ параллельно проекции $C'H'$ горизонтали. Находим на пл. π_1 совмещенное положение центра C (точка $\bar{C}$) и строим в пл. π_1 окружность заданного радиуса с центром в этой точке.

Искомые проекции окружности – эллипсы. На рис. 254 показано построение осей этих эллипсов для каждой проекции окружности.

Для эллипса, являющегося горизонтальной проекцией окружности, большая ось располагается на горизонтальной проекции горизонтали, причем (см. рис. 254, в середине)

$C'3' = C'4'$ = радиусу окружности, а малая ось получена при помощи диаметра $\bar{3}\bar{4}$, параллельного следу $h'_{0\alpha}$, и диаметра $\bar{1}\bar{2}$, перпендикулярного к этому следу; точка $2'$ получена при помощи прямой $\bar{3}K'_1$, а точка $1'$ на той же проекции может быть построена на основании того, что $C'2' = C'1'$.

Справа на рис. 254 показано, что для фронтальной проекции большая ось $7''8''$ находится на фронтальной проекции фронтали; от точки C'' отложены отрезки $C''7''$ и $C''8''$, равные радиусу окружности. Оси $7''8''$ соответствует диаметр $\bar{7}\bar{8}$ окружности, расположенной на совмещенной с пл. π_1 фронтали MF.

Малая ось $5''6''$ на фронтальной проекции проведена перпендикулярно к $7''8''$. Точка $5''$ построена при помощи точки $\bar{5}$ диаметра $\bar{5}\bar{6}$ окружности, проведенного перпендикулярно к диаметру $\bar{7}\bar{8}$, продолженного до пересечения со следом $h'_{0\alpha}$ в точке K'_3; на вспомогательной прямой $C'K'_3$ на горизонтальной проекции находим проекцию $5'$ и по ней строим точку $5''$. Откладывая отрезок $C''6''$, равный отрезку $C''5''$, получим проекцию малой оси $5''6''$.

Построив оси обоих эллипсов, можно перейти к построению самих эллипсов по точкам. Можно получить эти точки и так, как показано на рис. 254 (в середине) для точки A; построение проекций A' и A'' аналогично указанному выше построению точек $5'$ и $5''$.

21. Построить фронтальную проекцию угла, натуральная величина которого равна его горизонтальной проекции.

В § 15 было установлено, что проекции острого (или тупого) угла, расположенного в плоскости общего положения, могут равняться проецируемому углу.

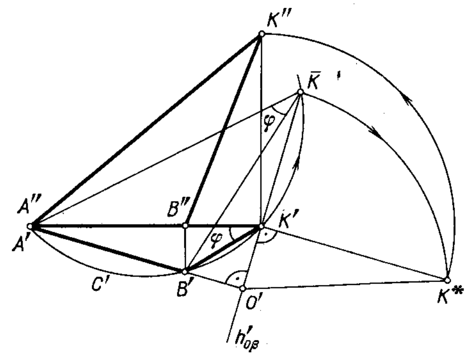

Рис. 255

Положим, что (рис. 255) угол $A'K'B'$ – горизонтальная проекция некоторого угла φ. Проведя прямую $A'B'$ – горизонтальный след плоскости, в которой лежит рассматриваемый угол, поворачиваем вокруг нее точку K до совмещения ее с пл. π_1. Если провести окружность через точки A', B' и K', то любой вписанный в нее угол, опирающийся на дугу $A'C'B'$, равен φ, в том числе и угол $A'\bar{K}B'$. Очевидно, точка $\bar{K}$ является совмещенной с пл. π_1 точкой K – вершиной угла AKB. Точка $\bar{K}$ получается в пересечении дуги, проведенной через точки A', B' и K', со следом $h'_{0\beta}$ плоскости вращения точки K. Радиусом вращения точки K является отрезок $O'\bar{K}$. Проведя перпендикуляр в точке K' к $O'K'$ и засекая этот перпендикуляр дугой радиуса $O'\bar{K}$, получаем точку K^* и отрезок $K'K^*$, представляющий собой расстояние точки K от пл. π_1, т. е. расстояние проекции K'' от оси x. Угол $A''K''B''$ представляет собой искомую фронтальную проекцию угла AKB, равного своей горизонтальной проекции $A'K'B'$.

В данном и некоторых предыдущих параграфах были рассмотрены задачи, в которых надо было определить общие элементы различных геометрических фигур (например, построение точки пересечения прямой линии с плоскостью или первая из задач в данном параграфе).

Для таких задач встречается название «позиционные». Им противопоставляются задачи, называемые метрическими, в которых определяются длины отрезков, углы, площади и др.

ВОПРОСЫ К § 38

1. В какой последовательности взять оси вращения, чтобы поворотом вокруг них расположить прямую общего положения перпендикулярно к пл. π_1, к пл. π_2?
2. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения и ее углы с пл. π_1 и с пл. π_2?
3. Как определить расстояние от точки до прямой общего положения?
4. Как определить расстояние от точки до плоскости общего положения, до профильной плоскости?
5. Как определить расстояние между двумя параллельными плоскостями, между двумя параллельными прямыми, между скрещивающимися прямыми?
6. Можно ли с помощью способа вращения построить проекции отрезка прямой общего положения по углам ее наклона к пл. π_1 и к пл. π_2? Если можно, то как это сделать?
7. Что обозначает парабола, построенная на рис. 244?
8. Как найти натуральную величину плоского угла?
9. Как построить на чертеже биссектрису угла?
10. Как найти натуральную величину угла между прямой линией и плоскостью?
11. Как найти натуральную величину угла, образованного двумя плоскостями?
12. Как построить проекции окружности, расположенной в плоскости общего положения?