ГЛАВА VII. КРИВЫЕ ЛИНИИ

§ 45. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ И ИХ ПРОЕЦИРОВАНИИ

Кривую линию можно представить себе как траекторию[1]) *движущейся точки на плоскости или в пространстве*[2]). Примером служат известные из курса черчения средней школы спираль Архимеда и цилиндрическая винтовая линия. *Кривая линия может быть также получена в результате взаимного пересечения поверхностей* (например, двух цилиндрических) *или при пересечении поверхности плоскостью* (например, эллипс, получающийся при пересечении боковой поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью, составляющей с осью цилиндра некоторый острый угол). *Кривая линия в ряде случаев представляет собой геометрическое место точек, отвечающих определенным для этой кривой условиям* (окружность, эллипс, парабола и т. п.).

Кривая линия определяется положениями составляющих ее точек. Точки кривой определяются их координатами.

Кривые линии могут быть *плоские*, т. е. такие, которые всеми своими точками лежат в одной плоскости, и *пространственные*, т. е. такие, точки которых не принадлежат одной плоскости[3]). Примерами плоских кривых линий являются окружность, эллипс, парабола, спираль Архимеда; примерами пространственных кривых – винтовая линия, линия пересечения боковых поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса.

Для построения проекций кривой (плоской или пространственной) необходимо построить проекции ряда принадлежащих ей точек (рис. 289). Пример построения проекций плоской кривой по точкам был дан на рис. 119 (с. 48).

Пространственная кривая проецируется в виде плоской, плоская кривая – также в виде плоской или в виде прямой линии, если кривая находится в плоскости, перпендикулярной к плоскости проекций.

Линия считается *закономерной*, если в своем образовании она подчинена какому-либо геометрическому закону. Если при этом кривая определяется в декартовых координатах алгебраическим уравнением, то она называется *алгебраической*[4]). Примером может служить эллипс, его уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Степень уравнения определяет «порядок» кривой: эллипс – кривая второго порядка. Кривая, представляющая собой проекцию кривой некоторого порядка, сохраняет тот же порядок или оказывается кривой более низкого порядка.

Касательная к кривой проецируется в общем случае в виде касательной к проекции этой кривой. Если, например, к окружности, расположенной в плоскости, составляющей с плоскостью проекций острый угол, проведена касательная, то

---

[1]) Траектория – от trajectio (*лат.*) – передвижение, перемещение.

[2]) На протяжении кривой линии не должно быть прямолинейных участков.

[3]) Пространственные кривые называют также *линиями двоякой кривизны.*

[4]) Если кривая определяется неалгебраическим уравнением, то она относится к числу трансцендентных.

она спроецируется в касательную к эллипсу, представляющему собой проекцию этой окружности. На рис. 289 изображены пространственная кривая, ее проекции на π_1 и на π_2, касательная к кривой в ее точке K и проекции этой касательной. Проецирующая плоскость, проходящая через касательную к проекции кривой, касается кривой в пространстве.

Чтобы отчетливее представить себе кривую в пространстве, следует при задании плоской или пространственной кривой ее проекциями указать на проекциях некоторые точки, характерные для самой кривой или для ее расположения относительно плоскостей проекций. Например, могут быть отмечены точки кривой,

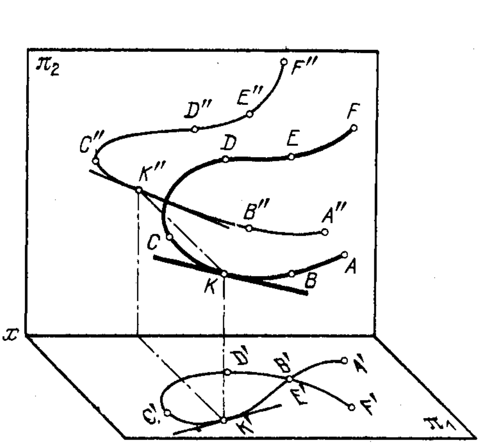

Рис. 289

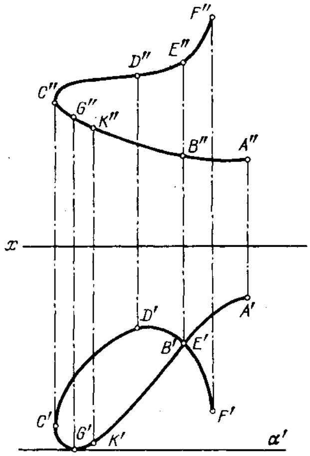

Рис. 290

наиболее удаленные относительно плоскостей проекций и наиболее близкие к ним; для этого надо проводить плоскости, касательные к кривой и параллельные соответствующим плоскостям проекций: на рис. 290 пл. α, параллельная пл. π_2, позволяет установить, что точка G на кривой в пространстве наиболее удалена от плоскости π_2.

Искривленность кривой линии, плоской или пространственной, может быть неизменной (на всем протяжении кривой или на отдельных ее участках) или изменяться в разных точках кривой. Например, искривленность окружности или искривленность цилиндрической винтовой линии неизменна на всем их протяжении, а искривленность эллипса повторяется в его квадрантах, но в пределах одного квадранта непрерывно изменяется. Применяется термин *кривизна линии*. Кривизна выражается числом; она характеризует кривую в данной ее точке, точнее, на бесконечно малой дуге — *окрестности* этой точки.

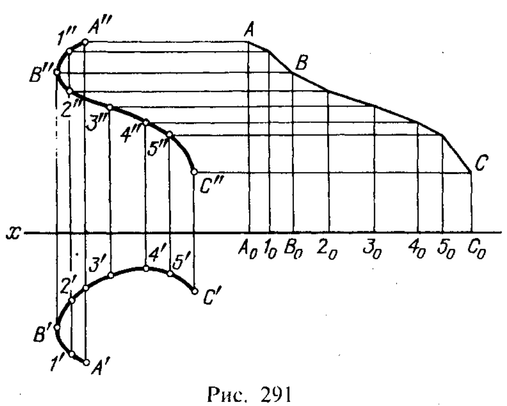

Рис. 291

Длина некоторого участка кривой как плоской, так и пространственной определяется приближенно, путем замены кривой линии ломаной, вписанной в эту кривую, и измерения длины звеньев этой ломаной линии (это, конечно, не относится к тем кривым, длина которых может быть определена путем несложных вычислений [1]). Для уменьшения ошибки

[1]) Например, окружность, виток цилиндрической винтовой линии (см. далее § 48).

следует брать отрезки ломаной, мало отличающиеся по длине от дуг кривой, хордами которых являются эти отрезки. На рис. 291 показано определение длины кривой ABC: горизонтальная проекция – кривая $A'B'C'$ – разбита на малые части и «развернута» в прямую на оси x так, что отрезки $A_0 1_0$, $1_0 B_0$ и т. д. соответственно равны хордам $A'1'$, $1'B'$ и т. д.; в точках A_0, 1_0 и т. д. проведены перпендикуляры к оси x, и на этих перпендикулярах отложены аппликаты точек кривой. Получаем ломаную, длина которой может быть приближенно принята за длину кривой ABC.

§ 46. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Вращая секущую KS_1 (рис. 292) вокруг оси K так, чтобы точка K_1 стремилась к точке K, получим предельное положение KT – положение касательной к кривой в ее точке K.

Касательная передает направление движения точки, образующей кривую; направление касательной в некоторой точке кривой называют *направлением кривой в этой точке*.

Проведя в точке K прямую $KN \perp KT$, получаем нормаль [1]) к кривой в ее точке K. Нормаль к окружности совпадает с направлением ее радиуса. Построение нормали к эллипсу показано в § 21.

Кривая в точке K на рис. 292 *плавная*: у нее в точке K одна касательная. Если кривая составлена только из таких точек, то это *плавная кривая линия* (рис. 293, слева). Но на кривой могут быть точки (см. рис. 293, справа), в которых имеются две

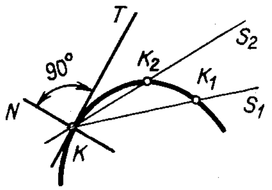

Рис. 292

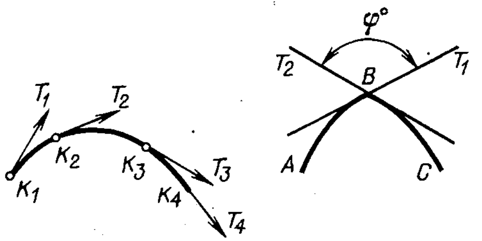

Рис. 293

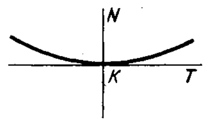

Рис. 294

касательные с углом между ними, не равным 180°. Такую точку называют *точкой излома*, *угловой* или *выходящей*, и кривая в такой точке не является плавной. Здесь как бы две пересекающиеся между собой под углом кривые AB и BC. Если угол φ окажется равным 180°, то кривые AB и BC соприкоснутся и каждая из них в точке B окажется плавной. Соприкасающиеся кривые имеют одну и ту же касательную в общей их точке, а нормали к кривым в этой точке располагаются на одной прямой.

На рис. 294 в точке K кривой проведены касательная KT и нормаль KN. Если во всех точках кривой повторяется такое же расположение относительно касательной и нормали в рассматриваемой окрестности [2]), то кривая является *выпуклой* и ее точки – *обыкновенными* (или *правильными*). Примером служит эллипс.

На рис. 295 показаны точки: A – *точка перегиба*, в которой кривая пересекает касательную, B и C – *точки возврата*, в которых кривая имеет острие («клюв») и касательная является общей для обеих ветвей кривой (из них точку B называют *точкой возврата первого рода*, а точку C – *точкой возврата второго рода*). Здесь мы коснулись так называемых *особых точек кривой линии* [3]), например таких, в которых

---

[1]) От normalis (*лат.*) – прямолинейный, прямой.

[2]) Под окрестностью здесь понимаются точки кривой в непосредственной близости к рассматриваемой точке.

[3]) Особые точки рассматриваются в курсе дифференциальной геометрии.