следует брать отрезки ломаной, мало отличающиеся по длине от дуг кривой, хордами которых являются эти отрезки. На рис. 291 показано определение длины кривой $ABC$: горизонтальная проекция – кривая $A'B'C'$ – разбита на малые части и «развернута» в прямую на оси $x$ так, что отрезки $A_0 1_0$, $1_0 B_0$ и т. д. соответственно равны хордам $A'1'$, $1'B'$ и т. д.; в точках $A_0$, $1_0$ и т. д. проведены перпендикуляры к оси $x$, и на этих перпендикулярах отложены аппликаты точек кривой. Получаем ломаную, длина которой может быть приближенно принята за длину кривой $ABC$.

## § 46. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Вращая секущую $KS_1$ (рис. 292) вокруг оси $K$ так, чтобы точка $K_1$ стремилась к точке $K$, получим предельное положение $KT$ – положение касательной к кривой в ее точке $K$.

Касательная передает направление движения точки, образующей кривую; направление касательной в некоторой точке кривой называют *направлением кривой в этой точке.*

Проведя в точке $K$ прямую $KN \perp KT$, получаем нормаль [1]) к кривой в ее точке $K$. Нормаль к окружности совпадает с направлением ее радиуса. Построение нормали к эллипсу показано в § 21.

Кривая в точке $K$ на рис. 292 *плавная*: у нее в точке $K$ одна касательная. Если кривая составлена только из таких точек, то это *плавная кривая линия* (рис. 293, слева). Но на кривой могут быть точки (см. рис. 293, справа), в которых имеются две

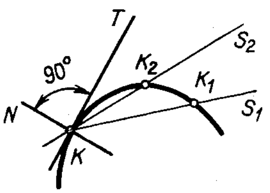


Рис. 292

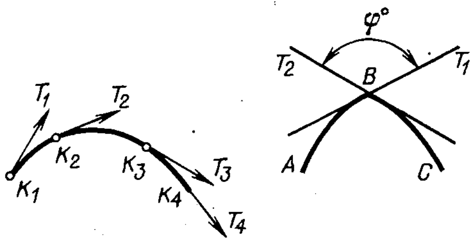


Рис. 293

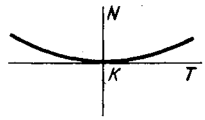


Рис. 294

касательные с углом между ними, не равным 180°. Такую точку называют *точкой излома, угловой* или *выходящей*, и кривая в такой точке не является плавной. Здесь как бы две пересекающиеся между собой под углом кривые $AB$ и $BC$. Если угол $\varphi$ окажется равным 180°, то кривые $AB$ и $BC$ соприкоснутся и каждая из них в точке $B$ окажется плавной. Соприкасающиеся кривые имеют одну и ту же касательную в общей их точке, а нормали к кривым в этой точке располагаются на одной прямой.

На рис. 294 в точке $K$ кривой проведены касательная $KT$ и нормаль $KN$. Если во всех точках кривой повторяется такое же расположение относительно касательной и нормали в рассматриваемой окрестности [2]), то кривая является *выпуклой* и ее точки – *обыкновенными* (или *правильными*). Примером служит эллипс.

На рис. 295 показаны точки: $A$ – *точка перегиба*, в которой кривая пересекает касательную, $B$ и $C$ – *точки возврата*, в которых кривая имеет острие («клюв») и касательная является общей для обеих ветвей кривой (из них точку $B$ называют *точкой возврата первого рода*, а точку $C$ – *точкой возврата второго рода*). Здесь мы коснулись так называемых *особых точек кривой линии* [3]), например таких, в которых

---

[1]) От normalis (*лат.*) – прямолинейный, прямой.

[2]) Под окрестностью здесь понимаются точки кривой в непосредственной близости к рассматриваемой точке.

[3]) Особые точки рассматриваются в курсе дифференциальной геометрии.

направление движения точки, описывающей кривую, изменяется на обратное (точки возврата) или скачком (см. на рис. 293 точку $B$).

Можно указать еще *двойную точку* (иначе *узловую* или *самопересечения*), в которой кривая пересекает самое себя и имеет две касательные (рис. 296, точка $D$),

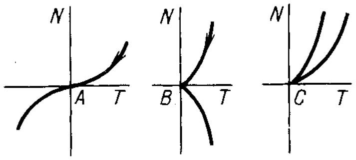

Рис. 295

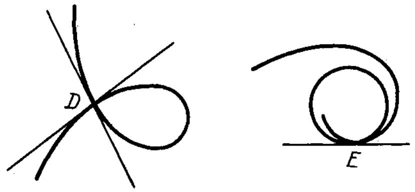

Рис. 296

и *точку самоприкосновения*, в которой кривая также встречает самое себя, но обе касательные совпадают (там же, точка $E$).

Все такие случаи могут встречаться на проекциях плоских кривых, причем для плоской кривой достаточно иметь одну проекцию (если, конечно, эта проекция не является прямой линией), чтобы судить о характере ее точек, так как любая особенность этой проекции выражает такую же особенность самой плоской кривой.

*Кривизной плоской кривой в какой-либо ее точке* $A_1$ (рис. 297) *считается предел, к которому стремится отношение угла между касательными, проведенными в соседних точках* $A_1$ *и* $A_2$ *кривой, к дуге* $A_1A_2$, *если точка* $A_2$ *стремится к* $A_1$:

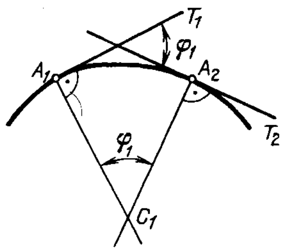

Рис. 297

$$\lim \frac{\varphi_1}{\overset{\frown}{A_1A_2}} = k.$$

Итак, *кривизной кривой в некоторой ее точке* $A$ *называется предельное значение отношения угла* $\varphi_1$ *к дуге* $A_1A_2$. Кривизна обозначается буквой $k$.

Очевидно, угол $\varphi$ может быть представлен и как угол между нормалями к кривой в точках $A_1$ и $A_2$.

Если представить себе окружность, проходящую через точку $A_1$ (рис. 297) и две соседние с ней точки на кривой, стремящиеся к точке $A_1$, то окружность придет к своему предельному положению, когда точка пересечения нормалей $C_1$ займет свое предельное положение и определится некоторый радиус $C_1A_1$. При этом окружность соприкоснется с кривой в точке $A_1$, у них получится общая касательная и общая нормаль, на которой лежит центр соприкасающейся окружности. Применяются термины: *круг кривизны кривой в данной точке, центр кривизны* (или центр круга кривизны), *радиус кривизны* (или радиус круга кривизны). *Кривизна кривой в какой-либо точке равна обратной величине радиуса кривизны* $k = \frac{1}{r}$. Очевидно, для окружности в любой ее точке соприкасающаяся окружность имеет радиус, равный радиусу данной окружности. Отсюда *кривизна окружности во всех ее точках равна обратной величине радиуса этой окружности*: $k_{\text{окр}} = \frac{1}{R}$. Чем больше $R$, тем меньше $k$.

У эллипса (рис. 298, слева) центры кривизны в вершинах $A_1$ и $A_2$ находятся на его большой оси, а в вершинах $B_1$ и $B_2$ – на малой оси. Для определения положения центров кривизны мы воспользовались известными формулами для радиусов кривизны в вершинах эллипса: в вершинах $A_1$ и $A_2$ – формула $r_1 = \frac{b^2}{a}$ и вершинах $B_1$ и $B_2$ – формула $r_2 = \frac{a^2}{b}$, где $a$ – большая полуось, $b$ – малая полуось эллипса.

На рис. 298 справа показано построение центров кривизны $C_1$ и $C_3$ и определение величины радиусов кривизны в вершинах $A_1$ и $B_1$: по заданным полуосям $OA_1$ и $OB_1$ строится прямоугольник $OB_1DA_1$; в нем проводится диагональ $A_1B_1$ и к ней из точки $D$ перпендикуляр, засекающий большую ось в точке $C_1$ и продолжение малой оси в точке $C_3$. Если провести дуги окружностей – из точки $C_1$ радиусом $C_1A_1$ и из точки $C_3$ радиусом $C_3B_1$, то между этими дугами получится зазор; в нем по лекалу проводится дуга, соприкасающаяся с обеими дугами окружностей. Для более точного проведения этой дуги целесообразно найти точку эллипса так, как это показано на том же чертеже для точки $M$ на прямой, проводимой через фокус $F_2$ перпендикулярно к оси эллипса $A_1A_2$. Последовательность построения: фокус $F_2$ (см. § 21), дуги радиусов $OA_2$ и $OB_1$, перпендикуляр к $A_1A_2$ в точке $F_2$ до пересечения с дугой в точке *1*, радиус $O-1$ и через точку *2* прямая, параллельная $OA_2$. По найденным точкам $C_1$ и $C_3$ можно найти еще два центра, а по точке $M$ – еще три точки для проведения остальной части кривой. Эта комбинированная линия весьма близка к эллипсу.

Какая плоская кривая имеет постоянную кривизну? Это окружность (см. выше: $k_{окр} = \frac{1}{R}$, где $R$ – радиус окружности). Если прямую линию посчитать окружностью при $R = \infty$, то здесь также кривизна постоянная: $k = 0$.

На рис. 299 показано приближенное построение касательной и нормали к плавной кривой в некоторой ее точке $K$.

Проводим вспомогательную прямую $EF$ примерно перпендикулярно к предполагаемому направлению касательной к кривой $ABCD$. Затем через точку $K$ проводим несколько

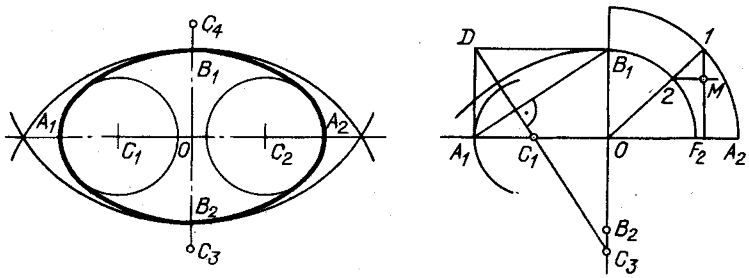


Рис. 298

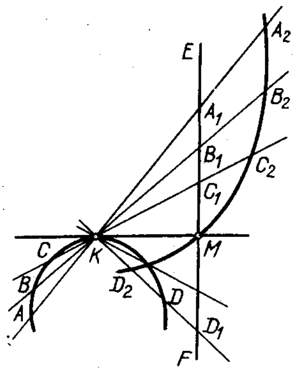


Рис. 299

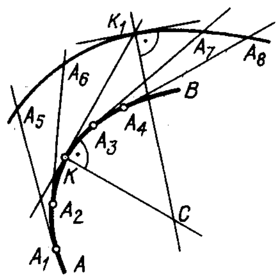


Рис. 300

прямых, пересекающих кривую $ABCD$ и прямую $EF$. Если отложить $A_1A_2 = AK$, $B_1B_2 = BK$, $C_1C_2 = CK$, $D_1D_2 = KD$ и т. д. и через точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, … провести плавную кривую линию, то в пересечении ее с прямой $EF$ получится точка $M$ – вторая точка прямой, касательной к кривой $ABCD$ в точке $K$[1]).

На рис. 300 показано приближенное построение центра кривизны в некоторой точке $K$ кривой линии.

Взяв на кривой вблизи точки $K$ несколько точек $A_1$, $A_2$, …, проводим в них и в точке $K$ касательные. Откладываем на касательных произвольные, но равные между собой отрезки $A_1A_5$, $A_2A_6$, $KK_1$ и через точки $A_5$, $A_6$, $K_1$ проводим кривую линию. В пересечении нормалей в точках $K$ и $K_1$ получается точка $C$ – искомый центр кривизны, и радиус кривизны $r = CK$. Отсюда определяется кривизна в точке $K$, равная $\frac{1}{r}$.

[1]) Кривая $A_2B_2C_2D_2$ является примером так называемой кривой ошибок.

Если построить центры кривизны данной кривой в ряде ее точек, то через эти центры в свою очередь пройдет кривая – *геометрическое место центров кривизны данной кривой, называемое ее эволютой.* Сама же данная кривая по отношению к ее эволюте называется *эвольвентой*[1]). Например, у кривой, называемой эвольвентой окружности, центры кривизны в различных точках этой кривой расположены на окружности, которая и является эволютой по отношению к данной эвольвенте.

## § 47. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Многое из рассмотренного по отношению к плоским кривым может быть отнесено и к пространственным. Например, касательная прямая к пространственной кривой линии также получается из секущей $KS_1$ (рис. 292) при слиянии точек $K$ и $K_1$. Также на пространственной кривой могут быть точки различного рода: обыкновенные (правильные), точки перегиба, «клювы» и др. Но если для плоской кривой можно было провести в точке $K$ (рис. 292) только один перпендикуляр $KN$ (нормаль) к касательной $KT$, то для пространственной кривой таких перпендикуляров в точке касания бесчисленное множество, что приводит к понятию о *нормальной плоскости.* Далее, для плоской кривой достаточно одной проекции, чтобы судить о характере ее точек, а для пространственной кривой судить о характере ее точек можно лишь при наличии двух проекций кривой. Например, на рис. 289 и 290 сопоставление горизонтальной и фронтальной проекций показывает, что хотя на горизонтальной проекции имеется двойная точка, но на самой кривой двойной точки нет. *Так же, как и для плоской кривой, касательная к кривой в пространстве* (рис. 289) *проецируется в касательную к проекции этой кривой.* Проецирующая плоскость, проведенная через касательную к проекции кривой, касается кривой в пространстве.

Плоская кривая всеми своими точками лежит в одной плоскости. Для пространственной же кривой можно говорить лишь о плоскости, наиболее близко подходящей к кривой в рассматриваемой ее точке. Такая плоскость носит название *соприкасающейся.* Положим, что на рис. 292 изображен участок не плоской кривой, а пространственной. Три точки $K$, $K_1$ и $K_2$ этой кривой определяют некоторую плоскость. Предельное положение этой плоскости, когда секущая $KS_2$ станет касательной в точке $K$ и третья точка предельно приблизится к точке касания, определяет соприкасающуюся плоскость в точке $K$ пространственной кривой. Вблизи точки $K$ кривую можно рассматривать как бы лежащей в соприкасающейся плоскости.

*Соприкасающаяся и нормальная плоскости взаимно перпендикулярны*; это вытекает из того, что соприкасающаяся плоскость содержит касательную к кривой.

При взаимном пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей получается одна из нормалей – *главная нормаль.* Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью.*

К соприкасающейся и нормальной плоскостям добавляется еще третья плоскость, к ним перпендикулярная. Она проходит через касательную и бинормаль. Ее называют *спрямляющей плоскостью.*

*Этими тремя плоскостями, образующими трехгранник, пользуются как координатными при рассмотрении кривой в данной ее точке. Положение трехгранника зависит от положения точки на кривой.*

По аналогии с центром кривизны для плоской кривой как предельным положением точки пересечения двух нормалей (рис. 297) получаем *ось кривизны пространственной кривой* как предельное положение прямой пересечения соседних нормальных плоскостей. В этом предельном положении *ось кривизны параллельна бинормали*; *пересекаясь с главной нормалью, ось кривизны дает центр кривизны*, откуда получаем радиус кривизны как расстояние от этого центра до рассматриваемой точки кривой. Так же, как для плоской кривой, кривизна пространственной равна обратной величине радиуса кривизны. Если представить себе предельное сближение трех соседних точек пространственной кривой и предельное положение проведенной через них окружности, то получаем круг кривизны в соприкасающейся плоскости,

---

[1]) Эволюта – от evoluta (*лат.*) – развернутая; эвольвента – от evolvere (*лат.*) – развертывать.