Если построить центры кривизны данной кривой в ряде ее точек, то через эти центры в свою очередь пройдет кривая – *геометрическое место центров кривизны данной кривой, называемое ее эволютой.* Сама же данная кривая по отношению к ее эволюте называется *эвольвентой* [1]). Например, у кривой, называемой эвольвентой окружности, центры кривизны в различных точках этой кривой расположены на окружности, которая и является эволютой по отношению к данной эвольвенте.

§ 47. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Многое из рассмотренного по отношению к плоским кривым может быть отнесено и к пространственным. Например, касательная прямая к пространственной кривой линии также получается из секущей KS_1 (рис. 292) при слиянии точек K и K_1. Также на пространственной кривой могут быть точки различного рода: обыкновенные (правильные), точки перегиба, «клювы» и др. Но если для плоской кривой можно было провести в точке K (рис. 292) только один перпендикуляр KN (нормаль) к касательной KT, то для пространственной кривой таких перпендикуляров в точке касания бесчисленное множество, что приводит к понятию о *нормальной плоскости.* Далее, для плоской кривой достаточно одной проекции, чтобы судить о характере ее точек, а для пространственной кривой судить о характере ее точек можно лишь при наличии двух проекций кривой. Например, на рис. 289 и 290 сопоставление горизонтальной и фронтальной проекций показывает, что хотя на горизонтальной проекции имеется двойная точка, но на самой кривой двойной точки нет. *Так же, как и для плоской кривой, касательная к кривой в пространстве* (рис. 289) *проецируется в касательную к проекции этой кривой.* Проецирующая плоскость, проведенная через касательную к проекции кривой, касается кривой в пространстве.

Плоская кривая всеми своими точками лежит в одной плоскости. Для пространственной же кривой можно говорить лишь о плоскости, наиболее близко подходящей к кривой в рассматриваемой ее точке. Такая плоскость носит название *соприкасающейся.* Положим, что на рис. 292 изображен участок не плоской кривой, а пространственной. Три точки K, K_1 и K_2 этой кривой определяют некоторую плоскость. Предельное положение этой плоскости, когда секущая KS_2 станет касательной в точке K и третья точка предельно приблизится к точке касания, определяет соприкасающуюся плоскость в точке K пространственной кривой. Вблизи точки K кривую можно рассматривать как бы лежащей в соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся и нормальная плоскости взаимно перпендикулярны; это вытекает из того, что соприкасающаяся плоскость содержит касательную к кривой.

При взаимном пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей получается одна из нормалей – *главная нормаль.* Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью.*

К соприкасающейся и нормальной плоскостям добавляется еще третья плоскость, к ним перпендикулярная. Она проходит через касательную и бинормаль. Ее называют *спрямляющей плоскостью.*

Этими тремя плоскостями, образующими трехгранник, пользуются как координатными при рассмотрении кривой в данной ее точке. Положение трехгранника зависит от положения точки на кривой.

По аналогии с центром кривизны для плоской кривой как предельным положением точки пересечения двух нормалей (рис. 297) получаем *ось кривизны пространственной кривой* как предельное положение прямой пересечения соседних нормальных плоскостей. В этом предельном положении *ось кривизны параллельна бинормали*; *пересекаясь с главной нормалью, ось кривизны дает центр кривизны,* откуда получаем радиус кривизны как расстояние от этого центра до рассматриваемой точки кривой. Так же, как для плоской кривой, кривизна пространственной равна обратной величине радиуса кривизны. Если представить себе предельное сближение трех соседних точек пространственной кривой и предельное положение проведенной через них окружности, то получаем круг кривизны в соприкасающейся плоскости,

---

[1]) Эволюта – от evoluta (*лат.*) – развернутая; эвольвента – от evolvere (*лат.*) – развертывать.

причем его центр является центром кривизны, а радиус – радиусом кривизны. Это первая кривизна пространственной кривой.

Если вместо угла между касательными, как это имело место для плоских кривых, и отношения между этим углом и длиной дуги между точками касания взять угол между соприкасающимися плоскостями (он равен углу между бинормалями) и разделить этот угол на длину между рассматриваемыми точками пространственной кривой, то в предельном значении этого отношения получается так называемая кривизна кручения или вторая кривизна пространственной кривой. Вспомним, что пространственные кривые иначе называются кривыми двоякой кривизны.

Если касательные к пространственной кривой линии во всех ее точках одинаково наклонены в какой-либо плоскости, то такие линии называются линиями одинакового уклона.

ВОПРОСЫ К §§ 45–47

1. В чем состоит различие между плоской и пространственной кривыми линиями?
2. Во что проецируется пространственная кривая?
3. Во что проецируется плоская кривая?
4. Во что проецируется касательная к кривой линии?
5. Как определяется длина некоторого участка кривой линии?
6. Что называется касательной к кривой линии?
7. Что называется нормалью в какой-либо точке плоской кривой?
8. Чем определяется плавность плоской кривой?
9. Какие плоские кривые называются соприкасающимися?
10. Что такое выпуклая плоская кривая?
11. По скольким проекциям можно судить о характере точек плоской кривой?
12. Что называется кривизной плоской кривой в некоторой ее точке?
13. Чему равна кривизна окружности?
14. Как построить комбинированную кривую линию, сходную с эллипсом, по заданным его осям?
15. Как построить касательную и нормаль к плавной кривой в некоторой ее точке и найти центр кривизны в этой точке?
16. По скольким проекциям можно судить о характере точек пространственной кривой?
17. Какие плоскости называются нормальной, соприкасающейся и спрямляющей в какой-либо точке пространственной кривой линии?
18. Что такое главная нормаль и бинормаль в какой-либо точке пространственной кривой?
19. Что называется первой и второй кривизной пространственной кривой линии?
20. Как расшифровывается название «кривая двоякой кривизны»?
21. В каком случае пространственная кривая линия называется линией одинакового уклона?

§ 48. ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ – ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ

Цилиндрическая винтовая линия[1]) представляет собой пространственную кривую линию одинакового уклона. Острие резца, соприкасаясь с поверхностью равномерно вращающегося цилиндрического стержня, оставляет на нем след в виде окружности. Если же при этом сообщить резцу равномерное поступательное движение вдоль оси цилиндра, то на поверхности цилиндра получится цилиндрическая винтовая линия.

На рис. 301 показано образование винтовой линии на поверхности цилиндра[2]) от движения точки A по образующей EC и вращательного движения этой образующей. Здесь изображено несколько положений этой образующей: E_0C_0, E_1C_1, ...;

[1]) Иначе гелиса – от helice (*фр.*) – спираль, винтовая линия.

[2]) Такое изображение прямого кругового цилиндра рассматривалось в курсе черчения средней школы.