причем его центр является центром кривизны, а радиус – радиусом кривизны. Это первая кривизна пространственной кривой.

Если вместо угла между касательными, как это имело место для плоских кривых, и отношения между этим углом и длиной дуги между точками касания взять угол между соприкасающимися плоскостями (он равен углу между бинормалями) и разделить этот угол на длину между рассматриваемыми точками пространственной кривой, то в предельном значении этого отношения получается так называемая кривизна кручения или вторая кривизна пространственной кривой. Вспомним, что пространственные кривые иначе называются кривыми двоякой кривизны.

Если касательные к пространственной кривой линии во всех ее точках одинаково наклонены в какой-либо плоскости, то такие линии называются линиями одинакового уклона.

ВОПРОСЫ К §§ 45–47

1. В чем состоит различие между плоской и пространственной кривыми линиями?
2. Во что проецируется пространственная кривая?
3. Во что проецируется плоская кривая?
4. Во что проецируется касательная к кривой линии?
5. Как определяется длина некоторого участка кривой линии?
6. Что называется касательной к кривой линии?
7. Что называется нормалью в какой-либо точке плоской кривой?
8. Чем определяется плавность плоской кривой?
9. Какие плоские кривые называются соприкасающимися?
10. Что такое выпуклая плоская кривая?
11. По скольким проекциям можно судить о характере точек плоской кривой?
12. Что называется кривизной плоской кривой в некоторой ее точке?
13. Чему равна кривизна окружности?
14. Как построить комбинированную кривую линию, сходную с эллипсом, по заданным его осям?
15. Как построить касательную и нормаль к плавной кривой в некоторой ее точке и найти центр кривизны в этой точке?
16. По скольким проекциям можно судить о характере точек пространственной кривой?
17. Какие плоскости называются нормальной, соприкасающейся и спрямляющей в какой-либо точке пространственной кривой линии?
18. Что такое главная нормаль и бинормаль в какой-либо точке пространственной кривой?
19. Что называется первой и второй кривизной пространственной кривой линии?
20. Как расшифровывается название «кривая двоякой кривизны»?
21. В каком случае пространственная кривая линия называется линией одинакового уклона?

§ 48. ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ – ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ

Цилиндрическая винтовая линия[1]) представляет собой пространственную кривую линию одинакового уклона. Острие резца, соприкасаясь с поверхностью равномерно вращающегося цилиндрического стержня, оставляет на нем след в виде окружности. Если же при этом сообщить резцу равномерное поступательное движение вдоль оси цилиндра, то на поверхности цилиндра получится цилиндрическая винтовая линия.

На рис. 301 показано образование винтовой линии на поверхности цилиндра[2]) от движения точки A по образующей EC и вращательного движения этой образующей. Здесь изображено несколько положений этой образующей: E_0C_0, E_1C_1, ...;

---

[1]) Иначе гелиса – от helice (*фр.*) – спираль, винтовая линия.

[2]) Такое изображение прямого кругового цилиндра рассматривалось в курсе черчения средней школы.

при этом дуги E_0E_1, E_1E_2,... равны между собой и каждая равна $\frac{\pi d}{n}$, где d – диаметр цилиндра, а n – число делений (на рис. 301 $n = 12$). Начальное положение точки обозначено через A_0, последующее – соответственно через A_1, A_2 и т. д.

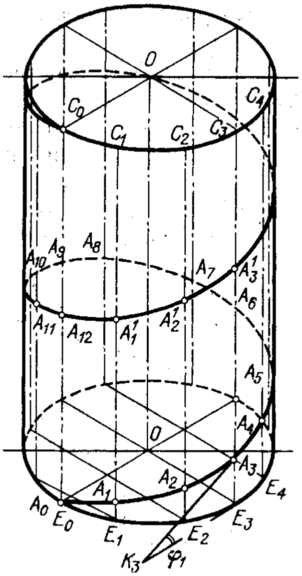

Рис. 301

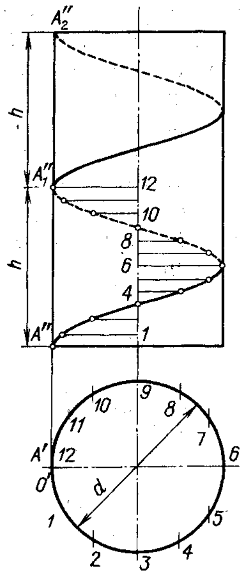

Рис. 302

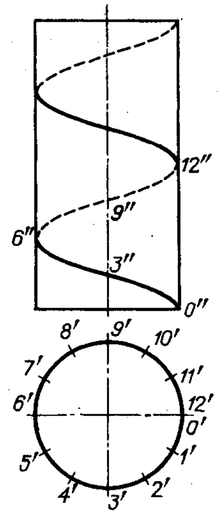

Рис. 303

Если при перемещении образующей из положения E_0C_0 в положение E_1C_1 точка займет положение A_1, то отрезок E_1A_1 определит расстояние, которое точка прошла по образующей от своего первоначального положения. При последующем положении образующей (E_2C_2) точка поднимется на высоту $E_2A_2 = 2E_1A_1$ и т. д. Когда образующая сделает полный оборот, точка переместится по ней на расстояние $E_0A_{12} = 12E_1A_1$.

При дальнейшем вращении образующей точка A начнет образовывать *второй виток*, или *оборот винтовой линии*, занимая положения A_1^1, A_2^1 и т. д.

Расстояние между точками A_0 и A_{12} называется *шагом винтовой линии*. Шаг может быть выбран в зависимости от тех или иных условий.

Расстояние точки A до оси OO называется *радиусом винтовой линии*, а ось OO – *осью винтовой линии*. Радиус винтовой линии равен половине диаметра прямого кругового цилиндра, на боковой поверхности которого располагается винтовая линия. Две величины – диаметр цилиндра и размер шага – являются *параметрами*[1]), определяющими цилиндрическую винтовую линию на боковой поверхности прямого кругового цилиндра.

На рис. 302 выполнено построение проекций цилиндрической винтовой линии. Предварительно построены проекции (как это рассматривалось в курсе черчения средней школы) прямого кругового цилиндра. Окружность основания цилиндра (на горизонтальной проекции) и шаг (отрезок h, отложенный по оси цилиндра на фронтальной проекции) разделены на одинаковое число (n) частей; на рис. 302 взято $n = 12$. Начальное положение точки A указано проекциями A'' и A' – это точка, отмеченная буквой O' на окружности.

[1]) Параметр (от parametrón (*греч.*) – отмеривающий) – величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент из числа элементов того же рода.

Так как ось цилиндра направлена перпендикулярно к пл. π_1, *то горизонтальная проекция винтовой линии сливается с окружностью*, представляющей собой горизонтальную проекцию поверхности цилиндра. Что же касается построения фронтальной проекции винтовой линии, то ход ее построения ясен из рис. 302 и вытекает из самого образования винтовой линии как траектории точки, совершающей два движения – равномерное по прямой линии и вместе с тем равномерное вращательное вокруг оси, параллельной этой прямой.

Проекция на плоскости, параллельной оси цилиндра, в данном случае фронтальная проекция цилиндрической винтовой линии, подобна *синусоиде.*

На рис. 302 фронтальная проекция винтовой линии имеет на передней (видимой) стороне цилиндра *подъем слева направо* или *спуск влево*; если же ось цилиндра расположить горизонтально, то подъем винтовой линии идет влево, а спуск – вправо. Это винтовая линия *с правым ходом*, или *правая винтовая линия.* Винтовая линия *с левым ходом* (*левая винтовая линия*) показана на рис. 303 – подъем на фронтальной проекции винтовой линии на передней (видимой) стороне цилиндра идет

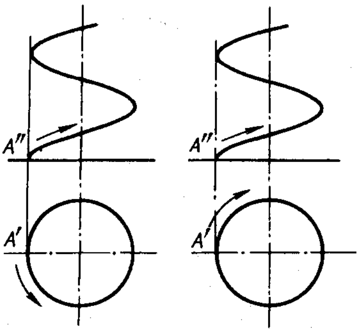

Рис. 304

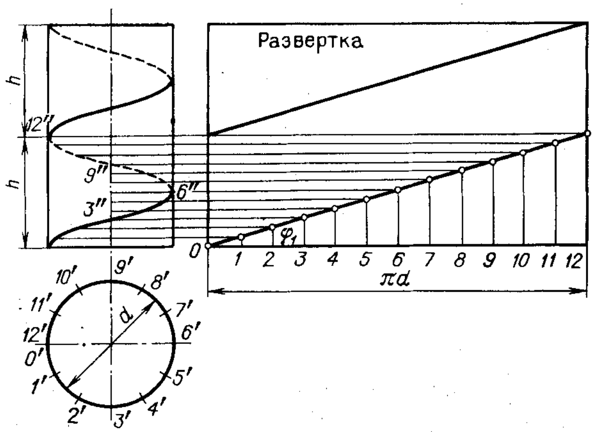

Рис. 305

справа налево, спуск – вправо; если же ось цилиндра расположить горизонтально, то подъем вправо, а спуск влево.

Если винтовая линия изображается без цилиндра и без проекций точек, то указание о том, является ли винтовая линия правой или левой, надо давать или надписью, или стрелками, так, как это показано на рис. 304 слева для правой винтовой линии, справа для левой [1]).

Развертка витка цилиндрической винтовой линии показана на рис. 305. В развернутом виде каждый виток представляет собой отрезок прямой. Это следует из образования винтовой линии: поскольку окружность основания цилиндра делилась на равное число частей и шаг винтовой линии делился на такое же число равных частей, развертку винтовой линии на протяжении ее шага можно рассматривать как геометрическое место точек, для каждой из которых ордината пропорциональна абсциссе, т. е. $y = kx$. А это уравнение прямой линии. Касательные к винтовой линии совпадают на развертке с прямой, в которую развертывается виток винтовой линии.

На рис. 305 при двух шагах винтовой линии получились два ее отрезка под углом φ_1 к прямой, представляющей собой развернутую окружность основания цилиндра. Крутизна подъема винтовой линии выражается формулой

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{h}{\pi d},$$

[1]) Цилиндрическая винтовая линия хорошо иллюстрируется винтовой цилиндрической пружиной, резьбой на болтах, винтах, шпильках, цилиндрическим червяком.

где h – шаг винтовой линии, а d – диаметр цилиндра. Угол φ_1 называется углом подъема винтовой линии.

Длина одного оборота («витка») винтовой линии равна $L=\sqrt{h^2+(\pi d)^2}$.

При одном и том же d величина угла φ_1 зависит только от шага винтовой линии; для получения малого угла подъема следует брать малый шаг, и наоборот. Если же шаг остается неизменным для цилиндров разного диаметра, то угол подъема получится тем меньше, чем больше будет диаметр цилиндра.

Модель винтовой линии можно построить, если взять прямоугольник с начерченной на нем диагональю и свернуть его в виде прямого кругового цилиндра; при этом диагональ прямоугольника образует один виток винтовой линии. Очевидно, что винтовая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности кругового цилиндра – *геодезическая линия этой поверхности.*

Действительно, на поверхности такого цилиндра между двумя точками может быть проведено множество линий. Одна из этих линий дает кратчайшее расстояние между точками. При развертывании поверхности такая линия развертывается в прямую. Это присуще линиям на поверхности, называемым *геодезическими.*

Рассмотрим следующее свойство цилиндрической винтовой линии.

Положим (рис. 301), что к винтовой линии в какой-нибудь ее точке A_3 проведена касательная, пересекающая пл. π_1 в точке K_3.

Угол между винтовой линией и любой образующей цилиндра выражается углом между этой образующей и касательной (к винтовой линии), проведенной в точке, общей для винтовой линии и образующей. Развертка на рис. 305 показывает, что между данной винтовой линией и образующими цилиндра получается постоянный угол, т. е. *все касательные к винтовой линии одинаково наклонены к образующим цилиндра и пересекают пл.* π_1 *под одним и тем же углом* φ_1. Этот же угол был получен между развертками винтовой линии и окружности основания.

При развертывании боковой поверхности цилиндра с нанесенной на ней винтовой линией, например, элемент $A_0A_3E_3$ (рис. 301) принимает форму прямоугольного треугольника $K_3A_3E_3$, в котором K_3A_3 является касательной к винтовой линии в точке A_3, а K_3E_3 – проекцией касательной на плоскости основания цилиндра, т. е. касательной к окружности его основания. Отсюда следует, что точка K_3 принадлежит эвольвенте окружности, так как касательные во всех точках цилиндрической винтовой линии имеют следы на плоскости основания цилиндра, образующие эвольвенту окружности основания этого цилиндра.

Воспользуемся этим для построения касательной к цилиндрической винтовой линии в какой-либо ее точке. На винтовой линии, изображенной на рис. 306, касательная построена в точке K. Прежде всего проведена горизонтальная проекция касательной – отрезок $K'1'$ – перпендикулярно к $O'K'$. По точке $1'$ на эвольвенте найдена проекция $1''$, после чего может быть проведена фронтальная проекция касательной – прямая $1''K''$. Построение повторено для точки L.

Можно построить на поверхности цилиндра кривую линию, образованную так же, как и винтовая линия, но вращение образующей цилиндра оставить равномерным, а перемещение точки по образующей сделать *переменным* по какому-либо закону. Такие кривые иногда называют *винтовыми линиями с переменным шагом.*

Построение дано на рис. 307 при равномерно ускоренном движении точки по образующей. Заданы перемещения точки в каждом из отмеченных двенадцати положений образующей; например, при девятом положении точка переместится на отрезок C_9E_9 (считая от восьмого положения этой точки).

На рис. 307 дана также развертка построенной линии; угол подъема переменный.

Если точка перемещается равномерно по образующей прямого кругового конуса [1]), а образующая совершает вращательное движение вокруг оси конуса с по-

[1]) Изображение конуса на проекционном чертеже рассматривалось в курсе черчения средней школы.

стоянной угловой скоростью, то траекторией точки является *коническая винтовая линия* [1]); ее проекции изображены на рис. 308. Перемещения точки по образующей пропорциональны угловым перемещениям этой образующей. На рис. 308 отмечено

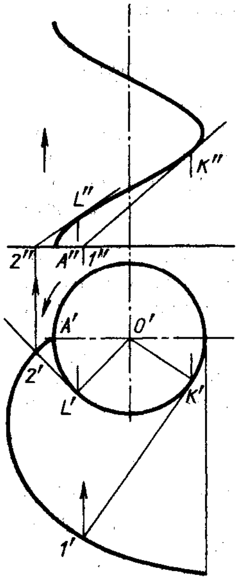

Рис. 306

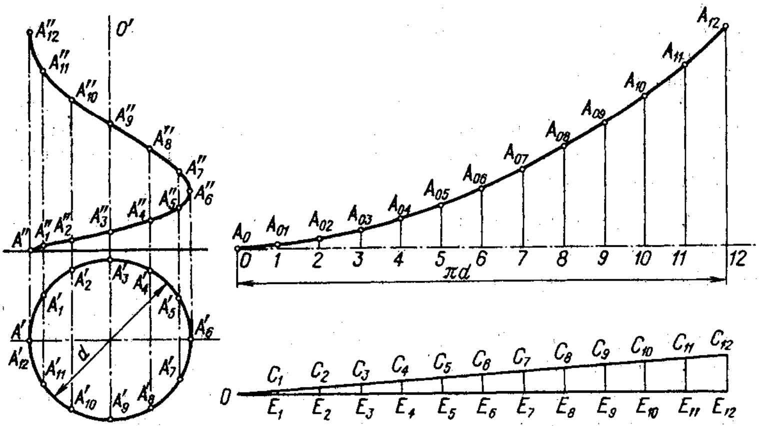

Рис. 307

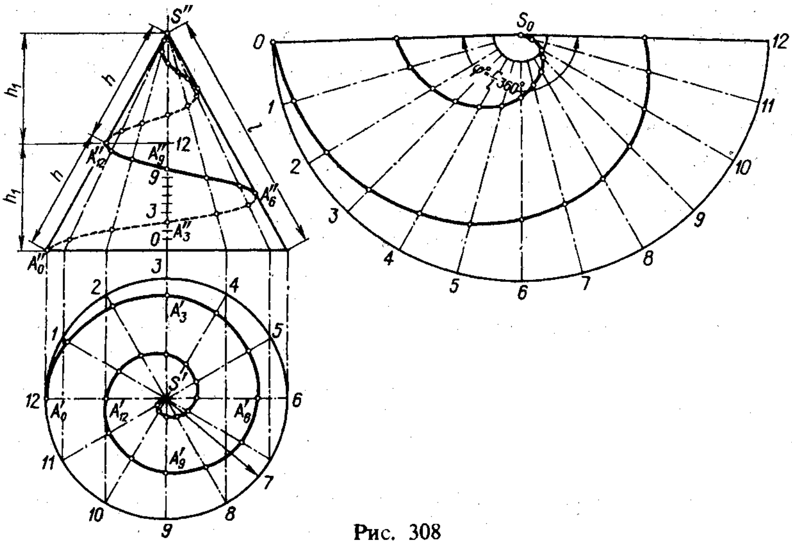

Рис. 308

на поверхности конуса двенадцать положений образующей, и на них указаны соответствующие положения точки. Расстояние между точками смежных витков $A_0A_{12} = h$, измеренное по образующей, называется *шагом* конической винтовой линии [2]).

---

[1]) Коническая винтовая линия хорошо иллюстрируется, например, винтовой конической пружиной или конической резьбой.

[2]) Иногда шаг конической винтовой линии считают по ее оси. Отрезок h_1 (рис. 308) является проекцией шага h, измеренного по образующей, на оси винтовой линии. Делению h на n равных частей соответствует деление h_1 на столько же равных между собой частей, и наоборот.

Проекция конической винтовой линии на плоскости, параллельной оси конуса (в данном случае фронтальная проекция), представляет собой *синусоиду* с уменьшающейся высотой волны; проекция на плоскости, перпендикулярной к оси конуса (в данном случае горизонтальная проекция), представляет собой *спираль Архимеда.*

На развертке боковой поверхности конуса (рис. 308, справа) винтовая линия развернется также в спираль Архимеда, так как равномерному угловому перемещению радиуса на развертке поверхности конуса соответствует равномерное же перемещение точки по этому радиусу. На рисунке показана развертка для двух оборотов конической винтовой линии.

Винтовая линия может быть построена не только на цилиндрической или конической поверхности. Примером может служить винтовая линия (рис. 309) на поверхности, образованной вращением дуги *BB* вокруг оси *OO*, т. е. на поверхности тора[1]). Подобную винтовую линию можно видеть на глобоидальных червяках (см. рис. 309, справа).

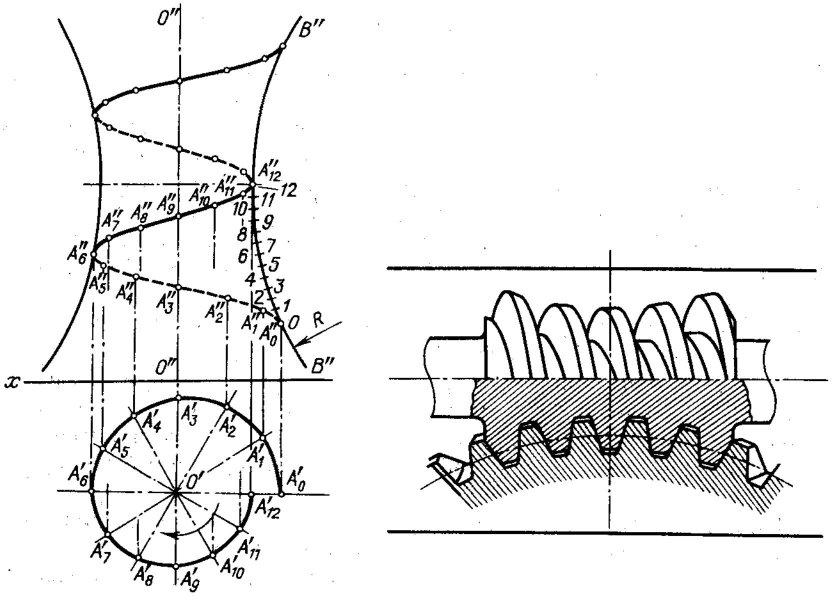

Рис. 309

ВОПРОСЫ К § 48

1. Как образуются цилиндрическая и коническая винтовые линии?
2. Что называется шагом винтовой линии – цилиндрической и конической?
3. Какой вид имеют проекции цилиндрической и конической винтовых линий на плоскостях – параллельной оси винтовой линии и перпендикулярной у этой оси?
4. Как распознать, правая или левая винтовая линия нанесена на поверхности цилиндрического и конического стержней? Как указать ход, если изображается только линия?
5. Во что развертывается каждый виток винтовой линии – цилиндрической и конической?
6. Как выражается крутизна подъема цилиндрической винтовой линии?
7. Какая линия образуется на плоскости, перпендикулярной к оси цилиндрической винтовой линии, если построить следы касательных к этой линии?

[1]) Сведения о торе даются в курсе черчения средней школы.