

# ГЛАВА VIII. КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

## § 49. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Поверхность можно представить себе как общую часть двух смежных областей пространства. В начертательной геометрии поверхность определяется как след движущейся линии или другой поверхности. Представление о поверхности как о совокупности всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии удобно для графических построений<sup>1)</sup>. Конечно, при изображении поверхности ограничиваются показом этой линии лишь в некоторых ее положениях.

Представление об образовании поверхности непрерывным движением позволяет называть такие поверхности *кинематическими*<sup>2)</sup>.

Линию, производящую поверхность, в каждом ее положении называют *образующей* (или производящей). Образующая обычно указывается в ряде ее положений. Говорят: «образующие», «проведем образующую» и т. п., понимая под этим различные положения образующей. Образующая линия может быть прямой или кривой.

Итак, кинематическая поверхность представляет собой геометрическое место линий, движущихся в пространстве по некоторому закону.

Поверхность, образуемая при наличии такого закона, называется *закономерной* (или *правильной*), в отличие от *незакономерных* (или *случайных*) поверхностей.

2. Поверхность, которая может быть образована прямой линией, называется *линейчатой поверхностью*. Линейчатая поверхность представляет собой геометрическое место прямых линий. Поверхность, для которой только *кривая* линия может быть образующей, будем называть *нелинейчатой поверхностью*<sup>3)</sup>.

Примеры линейчатых поверхностей даны на рис. 310. Изображенная слева поверхность образована прямой линией  $A_1A_2$ , которая, оставаясь постоянно параллельной прямой  $S_1S_2$ , скользит по некоторой неподвижной линии  $T_1T_2T_3$ , называемой *направляющей*.

Очевидно, такая же поверхность образуется, если посчитать неизменяемую линию  $T_1T_2T_3$  образующей, все точки которой перемещаются по прямым, параллельным направляющей линии  $S_1S_2$ . Конечно, во всех своих положениях кривая должна отвечать условиям равенства и параллельности кривых, т. е. совпадению их

<sup>1)</sup> При этом линия, образующая поверхность, может во время движения и деформироваться. Тогда говорят о поверхности с «переменной образующей». Например, боковую поверхность известного из курса стереометрии кругового конуса можно получить движением окружности так, что ее центр равномерно перемещается по прямой линии — оси конуса — от его вершины к основанию и одновременно с этим движением радиус равномерно увеличивается.

<sup>2)</sup> Кинема (*греч.*) — движение. В разделе механики, называемом «кинематика», рассматривается движение только с геометрической стороны независимо от физических причин или сил, вызывающих движение.

<sup>3)</sup> Название «линейчатые поверхности» следует связывать с представлением о прямолинейности («линейка», «проведение по линейке прямых линий»), а не с термином «линия».

друг с другом при наложении, и взаимной параллельности касательных, проведенных к кривой в одной и той же ее точке в последовательных положениях.

Поверхность, изображенная на рис. 310 справа, образована прямой линией, которая, оставаясь параллельной плоскости  $\pi_0$ , скользит по двум неподвижным направляющим линиям — прямой  $S_1S_2$  и кривой  $T_1T_2$ .

Примером нелинейчатой поверхности служит сфера (иначе шаровая поверхность).

3. Одна и та же поверхность может быть образована перемещением различных линий и согласно различным условиям, которым должна подчиняться в своем перемещении образующая линия. Например, боковая поверхность прямого кругового

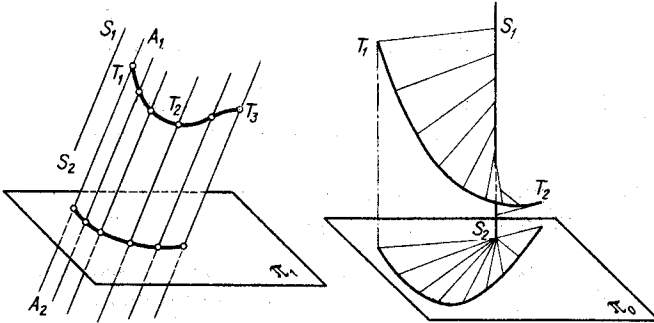


Рис. 310

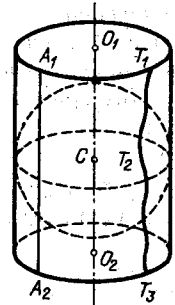


Рис. 311

цилиндра (рис. 311) может рассматриваться как результат некоторого определенного перемещения образующей — прямой линии  $A_1A_2$  — или как результат перемещения окружностью, центр которой перемещается по прямой  $O_1O_2$ , а плоскость, определяемая этой окружностью, перпендикулярна к  $O_1O_2$ . На рис. 311 показана еще кривая  $T_1T_2T_3$ ; все ее точки равноудалены от прямой  $O_1O_2$ . Можно представить себе образование боковой поверхности этого цилиндра и как результат вращения линии  $T_1T_2T_3$  вокруг оси  $O_1O_2$ .

Вообще, законы образования какой-либо поверхности могут быть разнообразны; желательно из этих законов и вида образующих линий выбирать те, которые являются наиболее простыми или удобными для изображения поверхности и решения задач, связанных с нею. Если представить себе совокупность прямолинейных образующих и совокупность образующих окружностей (рис. 311), то каждая линия одной совокупности (одного «семейства» линий) пересечет все линии другой совокупности (другого «семейства» линий), в результате чего получается сетка — каркас<sup>1)</sup> данной поверхности. Такое представление можно распространить и на другие поверхности.

4. На примере боковой поверхности цилиндра (рис. 311) рассмотрим образование этой поверхности в результате перемещения сферы, центр которой  $C$  движется по прямой  $O_1O_2$ . Здесь образующей (производящей) является не линия, а поверхность — сфера. Получаемая же поверхность (боковая поверхность цилиндра) охватывает (огibt) образующую поверхность (сферу) во всех ее положениях. При этом обе поверхности соприкасаются по окружности в каждом положении сферы.

Если бы центр сферы перемещался по некоторой кривой, то, конечно, образовалась бы другая огибающая поверхность, а не показанная на рис. 311 (см. рис. 349).

Итак, можно рассматривать образование поверхности и как результат перемещения некоторой производящей поверхности, причем она может быть неизменяю-

<sup>1)</sup> Carcasse (фр.) — остов, скелет.

щейся или непрерывно изменяться по какому-либо закону во время своего движения.

5. Некоторые кривые поверхности могут быть развернуты так что совместятся всеми своими точками с плоскостью, не претерпевая каких-либо повреждений (например, разрывов, складок). При этом каждая точка на развертке соответствует единственной точке поверхности; принадлежащие поверхности прямые линии остаются прямыми; отрезки линий сохраняют свою длину; угол, образованный линиями на поверхности, остается равным углу между соответствующими линиями на развертке; площадь какой-либо замкнутой области на поверхности сохраняет свою величину внутри соответствующей замкнутой области на развертке<sup>1</sup>).

Такие поверхности будем называть *развертываемыми*. К ним относятся только линейчатые, причем такие, у которых смежные прямолинейные образующие параллельны, или пересекаются между собой, или являются касательными к некоторой пространственной кривой.

Все кривые нелинейчатые поверхности и те линейчатые, которые не могут быть развернуты в плоскость, называются *неразвертываемыми* (или *косыми*).

## § 50. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ИХ ЗАДАНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖАХ

Задать поверхность на чертеже — значит указать условия, позволяющие построить каждую точку этой поверхности. Для задания поверхности достаточно иметь проекции направляющей линии и указать, как строится образующая линия, проходящая через любую точку направляющей<sup>2</sup>). Но если хотят придать изображению большую наглядность и выразительность, то вычерчивают еще очерк поверхности, несколько положений образующей, наиболее важные линии и точки на поверхности и т. д.

### А. Поверхности линейчатые развертываемые

1. **Цилиндрические, конические.** Цилиндрическая поверхность образуется прямой линией, сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой заданной прямой линии и проходящей последовательно через все точки некоторой кривой направляющей линии (см. рис. 310, слева).

Коническая поверхность образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки некоторой кривой направляющей линии (рис. 312). Неподвижная точка  $S$  называется *вершиной* конической поверхности.

Если точку  $S$  удалить в бесконечность, то коническая поверхность превращается в цилиндрическую.

Цилиндрические и конические поверхности могут пересекать плоскость проекций; получается линия, называемая *следом поверхности* на данной плоскости проекций. На рис. 313 изображены цилиндрическая поверхность, заданная направляющей кривой  $A_1B_1C_1$  и направлением  $ST$  для образующей, и (справа) коническая поверхность, заданная направляющей кривой  $K_1M_1N_1$  и вершиной  $S$ . В обоих случаях построены следы поверхностей на пл.  $\pi_1$ , т. е. линии, проходящие через горизонтальные следы образующих данной поверхности, — кривые  $A''B''C''$ ,  $A'B'C'$  и  $K''M''N''$ ,  $K'M'N'$ .

Цилиндрическая поверхность может быть задана ее следом на пл.  $\pi_1$  и направлением образующей, коническая поверхность — следом на пл.  $\pi_1$  и вершиной.

<sup>1</sup>) Напоминаем, что углом между двумя пересекающимися кривыми линиями называют угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.

<sup>2</sup>) В качестве направляющей линии часто задают линию, по которой данная поверхность пересекает пл.  $\pi_1$ .