щейся или непрерывно изменяться по какому-либо закону во время своего движения.

5. Некоторые кривые поверхности могут быть развернуты так что совместятся всеми своими точками с плоскостью, не претерпевая каких-либо повреждений (например, разрывов, складок). При этом каждая точка на развертке соответствует единственной точке поверхности; принадлежащие поверхности прямые линии остаются прямыми; отрезки линий сохраняют свою длину; угол, образованный линиями на поверхности, остается равным углу между соответствующими линиями на развертке; площадь какой-либо замкнутой области на поверхности сохраняет свою величину внутри соответствующей замкнутой области на развертке [1]).

Такие поверхности будем называть *развертываемыми. К ним относятся только линейчатые, причем такие, у которых смежные прямолинейные образующие параллельны, или пересекаются между собой, или являются касательными к некоторой пространственной кривой.*

Все кривые нелинейчатые поверхности и те линейчатые, которые не могут быть развернуты в плоскость, называются *неразвертываемыми* (или *косыми*).

§ 50. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ИХ ЗАДАНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖАХ

Задать поверхность на чертеже – значит указать условия, позволяющие построить каждую точку этой поверхности. Для задания поверхности достаточно иметь проекции направляющей линии и указать, как строится образующая линия, проходящая через любую точку направляющей [2]). Но если хотят придать изображению бóльшую наглядность и выразительность, то вычерчивают еще очерк поверхности, несколько положений образующей, наиболее важные линии и точки на поверхности и т. д.

А. Поверхности линейчатые развертываемые

1. Цилиндрические, конические. *Цилиндрическая поверхность* образуется прямой линией, сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой заданной прямой линии и проходящей последовательно через все точки некоторой кривой *направляющей* линии (см. рис. 310, слева).

Коническая поверхность образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки некоторой кривой *направляющей* линии (рис. 312). Неподвижная точка S называется *вершиной* конической поверхности.

Если точку S удалить в бесконечность, то коническая поверхность превращается в цилиндрическую.

Цилиндрические и конические поверхности могут пересекать плоскость проекций; получается линия, называемая *следом поверхности* на данной плоскости проекций. На рис. 313 изображены цилиндрическая поверхность, заданная направляющей кривой $A_1B_1C_1$ и направлением ST для образующей, и (справа) коническая поверхность, заданная направляющей кривой $K_1M_1N_1$ и вершиной S. В обоих случаях построены следы поверхностей на пл. π_1, т. е. линии, проходящие через горизонтальные следы образующих данной поверхности, – кривые $A''B''C''$, $A'B'C'$ и $K''M''N''$, $K'M'N'$.

Цилиндрическая поверхность может быть задана ее следом на пл. π_1 и направлением образующей, коническая поверхность – следом на пл. π_1 и вершиной.

---

[1]) Напоминаем, что углом между двумя пересекающимися кривыми линиями называют угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.

[2]) В качестве направляющей линии часто задают линию, по которой данная поверхность пересекает пл. π_1.

Задаваясь точкой на следе, мы можем построить соответствующую образующую поверхности.

Чтобы построить очерк цилиндрической или конической поверхности, следует на каждой плоскости проекций отметить «граничные образующие», заключающие между собой область, внутри которой находится проекция поверхности. Так, например, на рис. 314 слева отмечены на следе цилиндрической поверхности те точки, через которые проходят проекции граничных образующих: A'', A' и B'', B' для фронтальной, C'', C' и D'', D' для горизонтальной проекции. Этими границами, а также

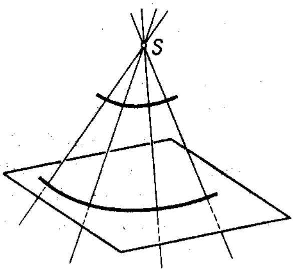

Рис. 312

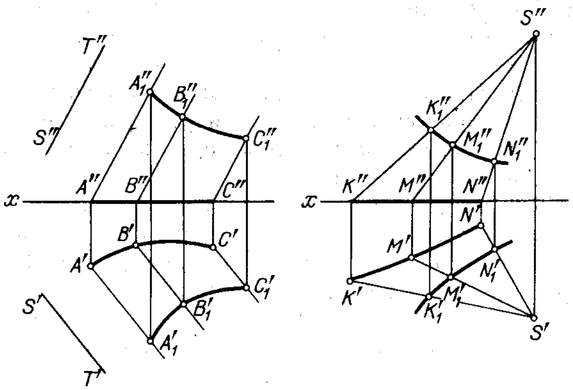

Рис. 313

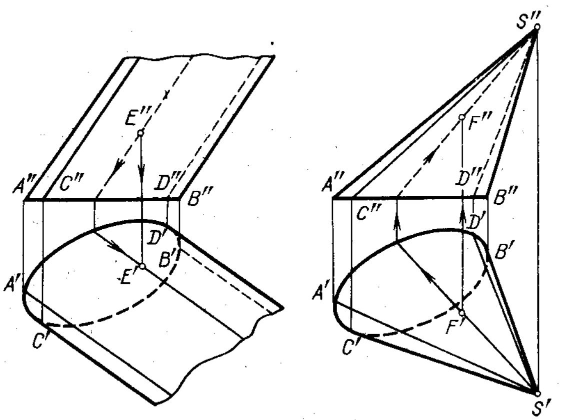

Рис. 314

линиями обрыва определяются контуры проекций и производится разграничение видимой и невидимой частей поверхности на проекциях (см. сплошные и штриховые линии на рис. 314).

Аналогичное построение на рис. 314 справа выполнено для конической поверхности. Здесь обе проекции образующей SB оказались граничными – одна для фронтальной, другая для горизонтальной проекции конуса.

Согласно общим указаниям (см. начало этого параграфа) точки на цилиндрической и конической поверхностях могут быть построены при помощи проходящих через них образующих. В некоторых случаях при формулировке задания необходимо указывать, считается ли искомый элемент видимым или невидимым[1]).

[1]) Такое указание иногда делают путем заключения в скобки соответствующей проекции. Например, (E'') означает, что точка E находится на той части поверхности, которая считается невидимой на пл. π_2.

На рис. 314 показано построение горизонтальной проекции точки E, принадлежащей цилиндрической поверхности и заданной проекцией E''; по условию точка E невидима на пл. π_2. Дан также пример построения фронтальной проекции точки F, принадлежащей конической поверхности и заданной проекцией F', при условии, что эта точка видима на пл. π_1. В обоих случаях построение выполнено при помощи соответствующей образующей; ход построения указан стрелками.

Если направляющая кривая линия (расположенная в пространстве или представляющая собой след поверхности на плоскости проекций) заменяется вписанной в нее *ломаной* линией, то цилиндрическая поверхность заменяется *призматической*, а коническая – *пирамидальной* (гранями многогранного угла). Такая связь между этими поверхностями будет использоваться в дальнейших построениях (например, при развертывании цилиндрических и конических поверхностей – см. § 68).

Цилиндрические поверхности различают по виду нормального сечения, т. е. кривой линии, получаемой при пересечении этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее образующим.

Выделим случаи, когда нормальное сечение цилиндрической поверхности представляет собой кривую второго порядка [1]). Такая цилиндрическая поверхность относится к числу *поверхностей второго порядка*. Точки любой поверхности второго порядка удовлетворяют в декартовых пространственных координатах уравнению второго порядка. *Любая плоскость пересекает такую поверхность по кривой второго порядка* [2]). Прямая линия пересекает поверхность второго порядка всегда в двух точках.

По виду нормального сечения цилиндр второго порядка может быть *эллиптическим* (в частном случае *круговым*), *параболическим*, *гиперболическим*. У известного из стереометрии *прямого кругового цилиндра* боковая поверхность является поверхностью второго порядка. Из перечисленных только в круговой цилиндр можно вписать сферу.

Если же нормальным сечением является неопределенная геометрическая линия, то это *цилиндр общего вида*.

Коническая поверхность может быть поверхностью второго порядка (**конус второго порядка**), тогда она пересекается плоскостью по кривой второго порядка.

В стереометрии рассматривается прямой круговой конус. Через его вершину проходит множество плоскостей симметрии этого конуса. Они пересекаются по прямой, являющейся осью конуса. В такой конус можно вписать сферу. Боковая поверхность прямого кругового конуса есть поверхность второго порядка.

Конечно, ось кругового конуса может занимать по отношению к плоскостям проекций любое положение, которое можно привести к простейшему (например, перпендикулярному к пл. π_1).

На рис. 315 слева изображен конус, имеющий систему подобных и подобно расположенных эллипсов [3]) (на рис. 315 они лежат в плоскостях, параллельных пл. π_1). Такой конус называют *эллиптическим*. Конечно, у него, как у всякого конуса второго порядка, сечения плоскостями, не проходящими через вершину, являются окружностями, эллипсами, параболами, гиперболами, и каждая из этих линий может быть принята за направляющую. Поэтому название «эллиптический» не следует понимать как указание на преимущественный выбор эллипса в качестве направляющей линии.

Эллиптический конус можно представить как прямой круговой конус, преобразованный путем его равномерного сжатия в плоскости осевого сечения. О круговых сечениях такого конуса см. § 63.

[1]) О кривых второго порядка см. § 21.

[2]) О случаях пересечения по прямым линиям см. дальше.

[3]) Подобные и подобно расположенные эллипсы – эллипсы с пропорциональными и соответственно параллельными осями.

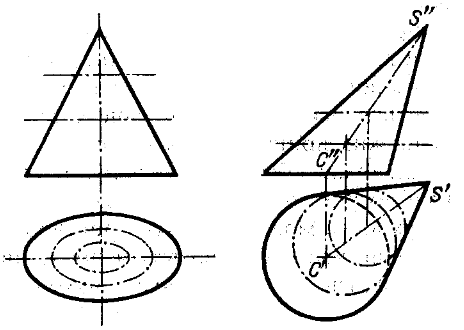

Рис. 315

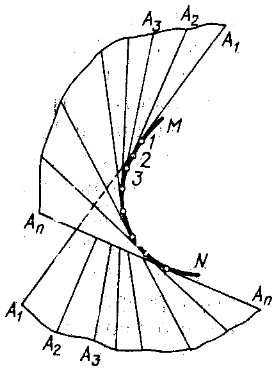

Рис. 316

У конуса, изображенного на рис. 315 справа, основанием является круг, как и у прямого кругового конуса, но проекция вершины на плоскости основания не совпадает с центром круга. Такой конус называют *наклонным круговым*. Пересекая его боковую поверхность плоскостями, параллельными плоскости основания, получаем окружности, центры которых расположены на прямой, проходящей через вершину и центр основания конуса (на рис. 315 прямая SC).

2. Поверхность, называемая *поверхностью с ребром возврата* [1]), образуется непрерывным движением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой. Эта пространственная кривая является для поверхности *направляющей*; она называется *ребром возврата*.

Такая поверхность изображена на рис. 316; ее образующие A_1A_1 и A_2A_2 и т. д. — касательные к пространственной кривой MN. Ребро возврата делит поверхность на две полости (соответственно делению каждой касательной в точке касания на две части).

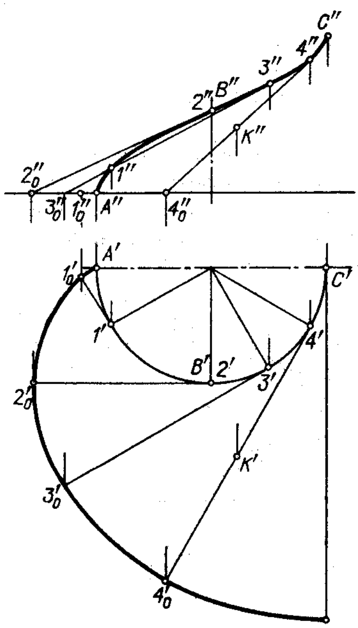

Рис. 317

Очевидно, задаваясь проекциями ребра возврата, можно задать поверхность на чертеже. Например, взяв цилиндрическую винтовую линию (см. § 48) в качестве ребра возврата и проводя к ней ряд касательных, мы задаем поверхность, а если ось винтовой линии расположить перпендикулярно к пл. π_1, то образованная поверхность представит собой поверхность одинакового ската (по отношению к пл. π_1), так как все касательные к винтовой линии пересекают пл. π_1 под одним и тем же углом (см. с. 134). Чертеж такой поверхности (одной ее полости) показан на рис. 317, где к дуге ABC винтовой цилиндрической линии проведено несколько касательных, что сделано при помощи эвольвенты $A'1'_0 2'_0 3'_0 4'_0$ как геометрического места горизонтальных следов касательных (см. рис. 306). Построенный элемент поверхности обращен к зрителю своей выпуклостью.

Там же показано построение проекции K'' точки K, принадлежащей данной поверхности, по заданной проекции K'. Проведя через точку K' касательную к полуокружности $A'B'C'$, мы по точкам $4'_0$ и $4'$ находим их фронтальные проекции $4''_0$ и $4''$

[1]) Поверхность с ребром возврата называют также *торсом*. Tors (*фр.*) — витой, крученый. Название «торс» встречается также в смысле развертываемой поверхности.

и тем самым проекцию касательной, на которой расположена точка K. Линия связи, проведенная из K', определяет искомую проекцию K''.

Если была бы задана фронтальная проекция некоторой точки, принадлежащей данной поверхности, и требовалось найти горизонтальную проекцию, то надо было бы на уровне заданной фронтальной проекции точки провести плоскость и пересечь ею поверхность (о пересечении поверхности плоскостью см. дальше, § 55 и др.). Искомая горизонтальная проекция точки должна принадлежать горизонтальной проекции линии сечения. В данном случае следовало бы взять секущую горизонтальную плоскость; она рассечет рассматриваемую поверхность по эвольвенте.

Цилиндрическую и коническую поверхности можно считать производимыми из поверхности с ребром возврата при условии, что ребро возврата представляет собой точку – в первом случае бесконечно удаленную, во втором – находящуюся на конечном расстоянии.

В случае плоской кривой как направляющей поверхность, определяемая касательными к такой кривой, представляет собой плоскость.

При пересечении поверхности с ребром возврата плоскостью, не проходящей через образующую, получается кривая с точкой возврата (см. с. 142), лежащей на ребре возврата. Отсюда и название «ребро возврата».

Б. Поверхности линейчатые неразвертываемые[1])

1. Поверхности с плоскостью параллелизма. 1.1. *Цилиндроиды и коноиды.* Поверхность, называемая *цилиндроидом*, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости («плоскости параллелизма») и пересекающей две кривые линии (две *направляющие*). Если направляющие – плоские кривые, то они, конечно, не должны лежать в одной плоскости.

На рис. 318 показан цилиндроид, образованный при перемещении прямой AD по направляющим ABC и DEF параллельно плоскости параллелизма α (в данном случае горизонтально-проецирующей). Как видно, для построения чертежа надо было иметь заданными проекции направляющих и положение плоскости параллелизма.

Поверхность, называемая *коноидом*, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости («плоскости параллелизма») и пересекающей две *направляющие*, одна из которых – кривая, а другая – прямая линия (если кривая плоская, то она не должна быть в одной плоскости со второй направляющей – прямой).

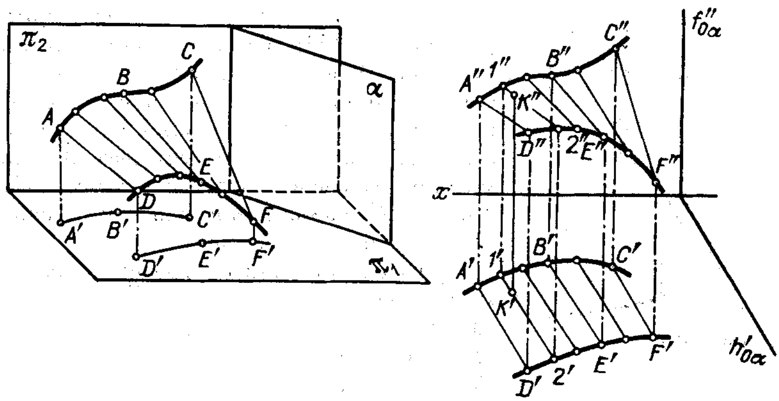

Рис. 318

[1]) Их называют также *косыми* (с. 139).

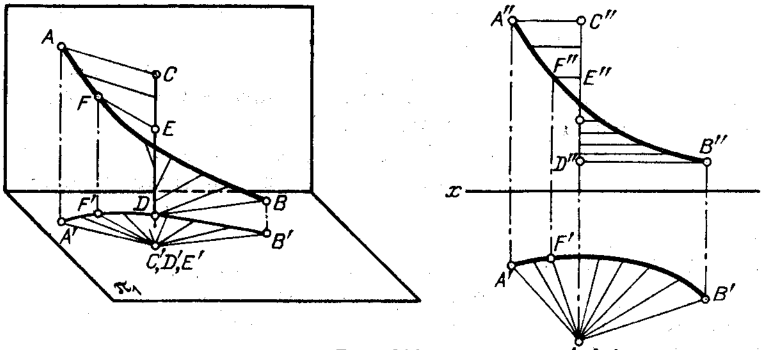

Рис. 319

Коноид показан на рис. 319. В качестве плоскости параллелизма взята пл. π_1. Образующая – прямая линия – пересекает кривую AFB и прямую CD, расположенную в данном случае перпендикулярно к пл. π_1 [1]).

Всякая плоскость, параллельная «плоскости параллелизма», пересекает цилиндроид и коноид по прямой линии. Отсюда, если требуется построить какую-либо образующую цилиндроида или коноида, надо провести соответствующую заданию плоскость, параллельную плоскости параллелизма, найти точки пересечения направляющих линий поверхности с этой плоскостью и через эти точки провести прямую (искомую образующую). В таком частном случае, который изображен на рис. 319, для построения образующей коноида, проходящей через точку E направляющей прямой, можно обойтись без вспомогательной секущей плоскости, так как фронтальная проекция образующей должна быть параллельна оси x. Достаточно провести $E''F'' \parallel x$, по точке F'' найти точку F' и горизонтальную проекцию $E'F'$.

На рис. 318 справа показано нахождение проекции K'' точки K, принадлежащей цилиндроиду, если дана проекция K'. Через K' проведена плоскость (она не показана на чертеже), параллельная плоскости параллелизма α. Результатом пересечения является прямая с проекциями $1'2'$, $1''2''$ и проекция K'' на $1''2''$.

Если задается фронтальная проекция какой-либо точки, принадлежащей цилиндроиду, а надо найти горизонтальную проекцию, то поступают так, как рассказано на с. 144, а именно проводят некоторую плоскость, пересекающую цилиндроид, с расчетом, что точка должна быть в этой плоскости. Например, цилиндроид на рис. 318 следовало бы рассечь горизонтальной плоскостью на уровне заданной фронтальной проекции точки, построить горизонтальную проекцию линии пересечения и на ней искомую горизонтальную проекцию точки. Аналогично следует поступать и в случае построения проекций точки на коноиде.

1.2. *Гиперболический параболоид* (*косая плоскость*). На рис. 320 даны рисунок и чертеж поверхности, называемой *косой плоскостью* или *гиперболическим парабо-*

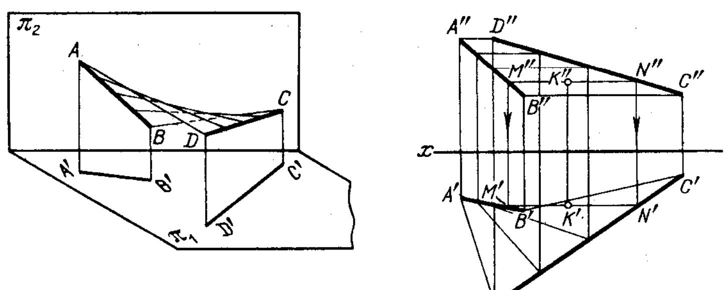

Рис. 320

[1]) Коноидами, например, являются поверхности $SACDS$ и $SBCDS$ на рис. 265, ограничивающие наряду с треугольниками ASB и ABC изображенное на этом рисунке тело.

лоидом, а также *линейчатым параболоидом*. Образование этой поверхности можно рассматривать как результат перемещения прямолинейной образующей по двум направляющим – скрещивающимся прямым линиям – параллельно некоторой плоскости параллелизма. На рис. 320 плоскостью параллелизма является плоскость проекций π_1, а направляющими – прямые AB и CD.

На том же рисунке показано построение проекции K' по заданной фронтальной проекции K'' точки, принадлежащей косой плоскости. Дело сводится к проведению фронтальной проекции $M''N''$ образующей на уровне точки K'' соответственно данной плоскости параллелизма.

Если бы была задана проекция K', то для нахождения проекции K'' пришлось бы провести некоторую секущую плоскость с расчетом, что она в пространстве проходит через точку K, т. е. поступать так, как было изложено выше для поверхности с кривой возврата (с. 142).

В аналитической геометрии доказывается, что гиперболический параболоид может быть также получен в результате такого движения параболы BOB_1 (рис. 321), когда ее ось симметрии остается параллельной оси z, вершина перемещается по параболе AOA_1 и плоскость параболы BOB_1 остается параллельной плоскости xOz. В пересечении гиперболического параболоида плоскостью, параллельной xOy, получается гипербола (если такая плоскость проходит через вершину O, то гиперболический параболоид пересекается по двум прямым, проходящим через точку O). Плоскости, параллельные xOz и yOz, пересекают гиперболический параболоид по параболам. С этим связано название поверхности «гиперболический параболоид».

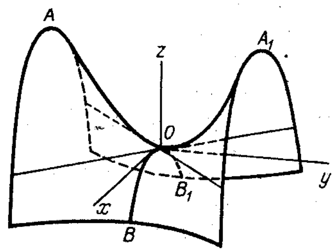

Рис. 321

На рис. 322 изображена косая плоскость, образованная перемещением прямолинейной образующей AB по скрещивающимся прямым AD и BC, расположенным во взаимно параллельных плоскостях, при плоскости параллелизма α. Очевидно, та же поверхность получится, если в качестве образующей взять прямую AD и заставить ее перемещаться по направляющим AB и CD параллельно пл. α_1. Отсюда следует, что через любую точку косой плоскости можно провести две прямые линии, принадлежащие косой плоскости.

На рис. 322 видна парабола, соответствующая параболе AOA_1, показанной на рис. 321. Так же построена парабола, получаемая при пересечении косой плоскости профильной плоскостью, проходящей через точки B и D (на рис. 321 это парабола BOB_1). Для построения гиперболы, по которой косая плоскость на рис. 322 рассекается плоскостью π_1, надо найти горизонтальные следы образующих, как это показано на рис. 322 для нескольких из них.

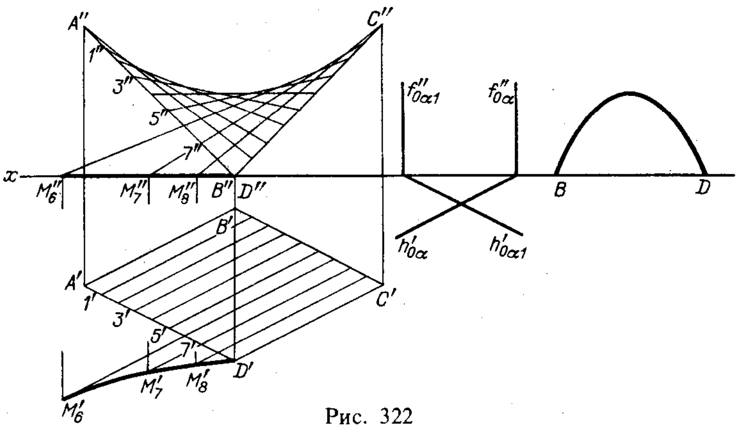

Рис. 322

Итак, *для рассмотренных поверхностей — цилиндроида, коноида и косой плоскости — образующей является прямая линия, которая должна одновременно пересекать две направляющие линии и оставаться постоянно параллельной некоторой плоскости, причем эти направляющие и плоскость параллелизма должны быть в неизменном положении между собой.*

2. Поверхности с тремя направляющими. 2.1. *Однополостный гиперболоид.* Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая образуется при перемещении прямой линии, пересекающей одновременно три скрещивающиеся прямые линии (*направляющие*)[1].

Если (рис. 323) на одной из заданных трех скрещивающихся прямых — на прямой a — взять точку A_1 и провести через эту точку и каждую из остальных двух прямых (b и c) плоскости β и α, то эти плоскости пересекутся по прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую b в точке K_2 и прямую c в точке K_3.

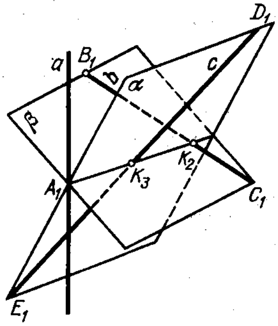

Рис. 323

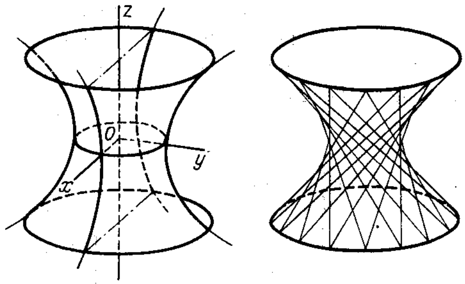

Рис. 324

Если взять в качестве исходных точек все точки прямой a и для каждой указанным путем построить такие прямые, как $A_1K_2, \ldots$, то они образуют поверхность, называемую *однополостным гиперболоидом.*

Практически берется ряд точек прямой a и строятся соответствующие образующие. На рис. 323 можно было бы ограничиться построением лишь одной плоскости, например пл. β прямой b, и найти точку пересечения K_3 прямой c с пл. β.

В аналитической геометрии доказывается, что однополостный гиперболоид может быть также получен в результате движения деформирующегося эллипса (рис. 324, слева), плоскость которого остается параллельной плоскости xOy и концы осей которого скользят по гиперболам, находящимся в плоскостях xOz и yOz. Справа на рис. 324 показан однополостный гиперболоид с нанесенными на нем прямолинейными образующими. Если эллипс заменить *деформирующейся окружностью,* то обе направляющие гиперболы будут одинаковыми. В этом случае поверхность называется *однополостным гиперболоидом вращения* (см. дальше § 51).

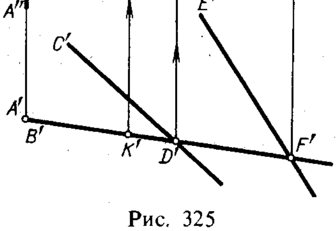

Рис. 325

Через любую точку однополостного гиперболоида можно провести две прямые, принадлежащие этой поверхности. Раньше это было отмечено для гиперболического параболоида.

На рис. 325 изображен однополостный гиперболоид, заданный тремя скрещивающимися прямыми произвольного положения. Одна из этих прямых расположена перпендикулярно к пл. π_1. К такому положению всегда можно прийти хотя бы способом перемены плоскостей проекций. На ри-

[1]) Если направляющие все параллельны одной плоскости, то образующая, перемещаясь по этим направляющим, производит *косую плоскость.*

сунке показано построение фронтальной проекции K'' точки K, принадлежащей однополостному гиперболоиду и заданной ее горизонтальной проекцией K'. Проведя через точки A' и K' прямую – горизонтальную проекцию образующей, строим по точкам D' и F' проекции D'' и F'', что определяет фронтальную проекцию этой образующей, а на ней искомую точку K''.

Если будет задана не горизонтальная, а фронтальная проекция точки K, принадлежащей однополостному гиперболоиду, причем ни одна из направляющих не будет перпендикулярна к пл. π_2, то следует пересечь однополостный гиперболоид плоскостью так, чтобы она проходила через точку K, как об этом уже говорилось выше.

2.2. *Косой цилиндр с тремя направляющими.* Косым цилиндром с тремя направляющими называется поверхность, образованная перемещением производящей прямой по трем направляющим, из которых хотя бы одна есть кривая линия [1]).

Если же направляющими являются скрещивающиеся прямые, то получается однополостный гиперболоид, рассмотренный выше (с. 146). Возможен случай, когда одна из направляющих – плоская кривая. Она не должна лежать в одной плоскости ни с одной из скрещивающихся прямых, являющихся двумя другими направляющими. Если направляющими будут две кривые и прямая, то такой косой цилиндр называется *конусоидом.* Пример дан на рис. 326. Конусоид задан двумя

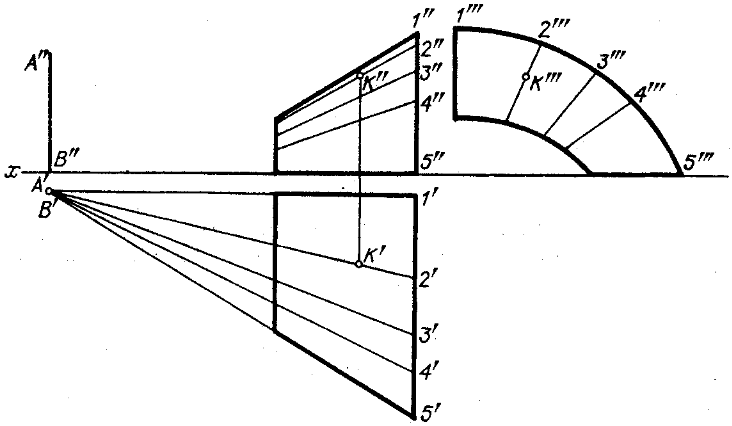

Рис. 326

кривыми, расположенными в профильных плоскостях, и прямой AB, перпендикулярной к пл. π_1. Горизонтальные проекции образующих проходят через точку $A'(B')$. Фронтальные проекции образующих пересекают проекции $A''B''$ в различных точках. На рис. 326 показано построение фронтальной и профильной проекций точки K, принадлежащей конусоиду и заданной проекцией K': через точки A' и K' проведена проекция образующей, построены остальные проекции этой образующей и на них проекции K'' и K'''. Если задается, например, проекция K'' и надо найти проекцию K', то применяется соответствующее сечение поверхности, как было сказано об этом приеме на с. 143.

Косые цилиндры с тремя направляющими имеют широкое применение в практике (при проектировании гребных винтов, пропеллеров, поверхностей кузовов автомобиля и др.).

Итак, *для рассмотренных поверхностей – однополостного гиперболоида и косого цилиндра с тремя направляющими – образующей является прямая линия, которая должна одновременно пересекать три неподвижные направляющие линии.*

---

[1]) О построении образующих косого цилиндра с тремя направляющими см. § 63.

В. Поверхности нелинейчатые

1. Второго порядка. Выше были рассмотрены *линейчатые* поверхности второго порядка: цилиндр, конус, гиперболический параболоид и однополостный гиперболоид. Теперь рассмотрим остальные поверхности второго порядка, *нелинейчатые*: эллипсоид, эллиптический параболоид и двуполостный гиперболоид.

1.1. *Эллипсоид.* Эллипсоид может быть получен в результате движения деформирующегося эллипса $ACBD$ (рис. 327), плоскость которого остается параллельной плоскости xOy и концы осей которого скользят по эллипсам $AEBF$ и $CEDF$. Если в этом эллипсоиде диаметры AB, CD и EF все три не равны между собой, то эллипсоид называется *трехосным*; если два из них равны между собой, но не равны

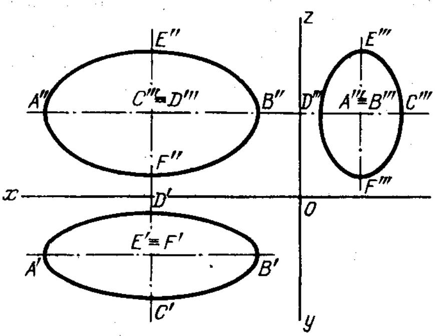

Рис. 327

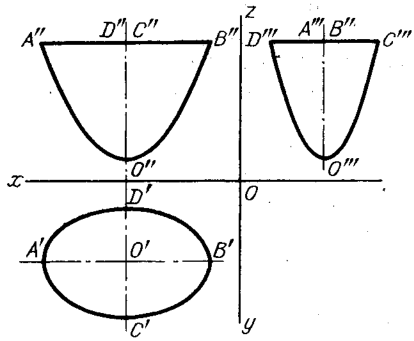

Рис. 328

третьему, то получается *сжатый* или *вытянутый* эллипсоид вращения (см. § 51); если же $AB = CD = EF$, то получается *сфера.* При пересечении эллипсоида любой плоскостью получается эллипс, в частных случаях – окружность.

1.2. *Эллиптический параболоид.* Эллиптический параболоид может быть получен в результате перемещения деформирующегося эллипса $ABCD$ (рис. 328), плоскость которого остается параллельной плоскости xOy и концы осей которого скользят по параболам AOB и COD. При пересечении эллиптического параболоида различными плоскостями могут получаться лишь эллипсы (в некоторых случаях – окружности) и параболы, причем последние получаются при секущих плоскостях, параллельных оси эллиптического параболоида. Если эллипс $ABCD$ заменить деформирующейся окружностью, то обе параболы AOB и DOC будут одинаковыми. В этом случае поверхность называется *круговым параболоидом* или *параболоидом вращения* (см. § 51).

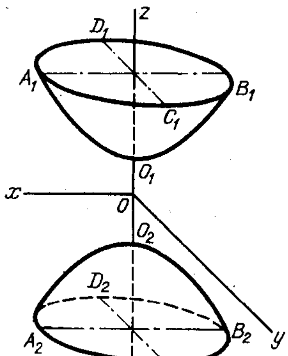

Рис. 329

1.3. *Двуполостный гиперболоид.* Двуполостный гиперболоид (рис. 329) состоит из двух частей («полостей»), простирающихся в бесконечность. Каждая из полостей может быть получена в результате движения деформирующегося эллипса ($A_1C_1B_1D_1$ и $A_2C_2B_2D_2$), плоскость которого остается перпендикулярной к оси поверхности O_1O_2 и концы осей которого скользят по двум гиперболам. Если эллипс заменить деформирующейся окружностью, то обе гиперболы $A_1O_1B_1$ и $C_1O_1D_1$ будут одинаковыми. В этом случае поверхность называется *двуполостным гиперболоидом вращения* (см. § 51).

При пересечении двуполостного гиперболоида различными плоскостями могут получаться эллипсы (в частных случаях – окружности), гиперболы и параболы.

2. Циклические. *Циклическая* [1]) поверхность образуется окружностью переменного радиуса, центр которой перемещается по какой-либо кривой. Отметим тот случай образования циклической поверхности, когда плоскость образующей окружности остается перпендикулярной к заданной направляющей кривой, по которой движется центр окружности. Для такой поверхности встречается название *каналовая*. Каналовую поверхность можно представить также как огибающую семейство сфер переменного диаметра, центры которых находятся на некоторой направляющей кривой. Радиус образующей окружности или образующей сферы может быть постоянным. Поверхность, возникающая при движении такой окружности по некоторой направляющей кривой или при огибании всех последовательных положений образующей сферы при таком же движении ее центра, называется *трубчатой*. Примером применения в технике могут служить компенсаторы в трубопроводах [2]).

Направляющей кривой линией для трубчатой поверхности может быть цилиндрическая винтовая линия; в этом случае мы имеем *трубчатую винтовую поверхность*. Пример см. на рис. 349: поверхность проволоки кругового сечения, навитой на трубу. Трубчатой винтовой поверхностью является также поверхность цилиндрической пружины с круглым сечением витков.

Циклические поверхности разного вида имеют, например, применение в газопроводах, в гидротурбинах, в центробежных насосах. Каналовая поверхность в случае, если направляющей линией взять прямую, а не кривую, превращается в поверхность вращения (см. § 51), в частности в коническую, а трубчатая поверхность при прямой направляющей превращается в поверхность цилиндра вращения.

Г. Поверхности, задаваемые каркасом

Поверхностью, задаваемой каркасом, называют поверхность, которая задается *некоторым числом линий*, принадлежащих такой поверхности. В частном случае можно представить одну группу некоторых плоских кривых линий, расположенных каждая в плоскостях, параллельных между собой, и другую группу линий, пересекающих линии первой группы; в пересечении образуется каркас поверхности.

Поверхность, задаваемую каркасом, нельзя считать вполне определенной: могут быть поверхности с одним и тем же каркасом, но несколько отличающиеся одна от другой.

Примером каркасных поверхностей могут служить поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей, баллонов кинескопов (см. рис. 505, 506).

Д. Поверхности графические

Каждая поверхность может быть задана графически [3]). Но для одних поверхностей образующие и направляющие линии геометрически определены и образование поверхности подчинено определенному закону, для других же поверхностей этих условий нет. В последнем случае поверхности задаются только графически, при помощи некоторого числа линий, которые должны (по замыслу при проектировании) принадлежать такой поверхности или выявляются на существующей поверхности. Для таких поверхностей встречается название *графические поверхности*.

К их разряду относится и поверхность, называемая *топографической* [4]), т. е. земная поверхность с точки зрения ее изображений. Рельеф земной поверхности передается линиями – горизонталями, получаемыми при пересечении этой поверхности горизонтальными плоскостями.

---

[1]) Kýklos (*греч.*) – круг.

[2]) Устройства для поглощения изменений в длине трубопровода при значительных температурных колебаниях.

[3]) То есть черчением или рисованием; от grapho (*греч.*) – пишу.

[4]) Topos (*греч.*) – местность, место.

ВОПРОСЫ К §§ 49–50

1. Что такое поверхность?

2. Как образуется поверхность, называемая кинематической?

3. Что такое образующая (или производящая) линия поверхности?

4. В чем различие между линейчатой и нелинейчатой поверхностями?

5. Может ли образуемая поверхность иметь в качестве производящей не линию, а поверхность?

6. Что такое направляющая линия?

7. Какие поверхности относятся к числу неразвертываемых?

8. Что означает «задать поверхность на чертеже»?

9. Как образуются поверхности цилиндрическая, коническая, с ребром возврата и как они задаются на чертежах?

10. Что такое поверхность второго порядка и по каким линиям такая поверхность пересекается плоскостями?

11. Как различаются цилиндрические поверхности?

12. Какой конус называется эллиптическим и какой наклонным круговым?

13. Чем задается поверхность с ребром возврата на чертеже? Какое название, кроме «поверхность с ребром возврата», встречается для этой поверхности?

14. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма?

15. Какие линии являются направляющими у цилиндроида и у коноида?

16. Как образуется косая плоскость (гиперболический параболоид)?

17. По каким линиям гиперболический параболоид пересекается плоскостями, параллельными координатным?

18. Сколько прямых, принадлежащих гиперболическому параболоиду, можно провести в каждой его точке?

19. Как образуется однополостный гиперболоид?

20. Сколько прямых, принадлежащих однополостному гиперболоиду, можно провести в каждой его точке?

21. Как образуется поверхность, называемая косым цилиндром с тремя направляющими?

22. В каком случае косой цилиндр с тремя направляющими называется конусоидом?

23. Перечислите линейчатые и нелинейчатые поверхности второго порядка.

24. Можно ли сферу трактовать как эллипсоид и в каком случае?

25. Какие кривые получаются при пересечении эллипсоида плоскостями?

26. Что называется эллиптическим параболоидом?

27. Какие кривые получаются при пересечении эллиптического параболоида плоскостями?

28. Какие кривые получаются при пересечении двуполостного гиперболоида плоскостями?

29. Какие поверхности называются циклическими?

§ 51. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В числе кривых поверхностей – линейчатых и нелинейчатых – имеются широко распространенные в практике поверхности вращения. *Поверхностью вращения* называют поверхность, получаемую от вращения какой-либо образующей линии вокруг неподвижной прямой – *оси поверхности* [1]).

Поверхность вращения можно задать образующей и положением оси. На рис. 330 показана такая поверхность. Здесь образующей служит кривая ABC, осью – прямая OO_1, расположенная в одной плоскости с ABC. Каждая точка образующей описывает окружность. Таким образом, плоскость, перпендикулярная к оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружности. Такие окружно-

[1]) В процессе образования поверхности вращения ось неподвижна.