ВОПРОСЫ К §§ 49–50

1. Что такое поверхность?

2. Как образуется поверхность, называемая кинематической?

3. Что такое образующая (или производящая) линия поверхности?

4. В чем различие между линейчатой и нелинейчатой поверхностями?

5. Может ли образуемая поверхность иметь в качестве производящей не линию, а поверхность?

6. Что такое направляющая линия?

7. Какие поверхности относятся к числу неразвертываемых?

8. Что означает «задать поверхность на чертеже»?

9. Как образуются поверхности цилиндрическая, коническая, с ребром возврата и как они задаются на чертежах?

10. Что такое поверхность второго порядка и по каким линиям такая поверхность пересекается плоскостями?

11. Как различаются цилиндрические поверхности?

12. Какой конус называется эллиптическим и какой наклонным круговым?

13. Чем задается поверхность с ребром возврата на чертеже? Какое название, кроме «поверхность с ребром возврата», встречается для этой поверхности?

14. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма?

15. Какие линии являются направляющими у цилиндроида и у коноида?

16. Как образуется косая плоскость (гиперболический параболоид)?

17. По каким линиям гиперболический параболоид пересекается плоскостями, параллельными координатным?

18. Сколько прямых, принадлежащих гиперболическому параболоиду, можно провести в каждой его точке?

19. Как образуется однополостный гиперболоид?

20. Сколько прямых, принадлежащих однополостному гиперболоиду, можно провести в каждой его точке?

21. Как образуется поверхность, называемая косым цилиндром с тремя направляющими?

22. В каком случае косой цилиндр с тремя направляющими называется коноидом?

23. Перечислите линейчатые и нелинейчатые поверхности второго порядка.

24. Можно ли сферу трактовать как эллипсоид и в каком случае?

25. Какие кривые получаются при пересечении эллипсоида плоскостями?

26. Что называется эллиптическим параболоидом?

27. Какие кривые получаются при пересечении эллиптического параболоида плоскостями?

28. Какие кривые получаются при пересечении двуполостного гиперболоида плоскостями?

29. Какие поверхности называются циклическими?

§ 51. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В числе кривых поверхностей – линейчатых и нелинейчатых – имеются широко распространенные в практике поверхности вращения. *Поверхностью вращения* называют поверхность, получаемую от вращения какой-либо образующей линии вокруг неподвижной прямой – *оси поверхности*[1]).

Поверхность вращения можно задать образующей и положением оси. На рис. 330 показана такая поверхность. Здесь образующей служит кривая ABC, осью – прямая OO_1, расположенная в одной плоскости с ABC. Каждая точка образующей описывает окружность. Таким образом, плоскость, перпендикулярная к оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружности. Такие окружно-

[1]) В процессе образования поверхности вращения ось неподвижна.

сти называются *параллелями*. Наибольшую из параллелей называют *экватором*, наименьшую – *горлом* поверхности [1]).

Плоскость, проходящую через ось поверхности вращения, называют *меридиональной плоскостью*. Линия пересечения поверхности вращения меридиональной плоскостью называется *меридианом поверхности.*

Можно назвать *вершиной поверхности вращения* точку пересечения меридиана этой поверхности с ее осью, если в пересечении не образуется прямой угол.

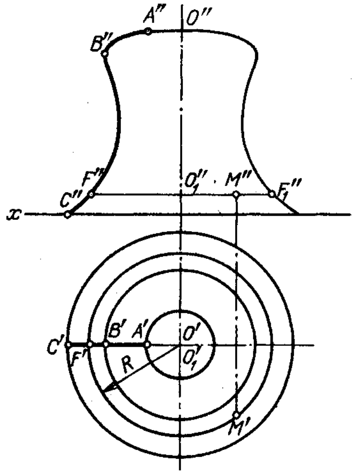

Рис. 330

Если ось поверхности вращения параллельна пл. π_2, то меридиан, лежащий в плоскости, параллельной пл. π_2, называется *главным меридианом*. При таком положении главный меридиан проецируется на пл. π_2 без искажения. Если ось поверхности вращения перпендикулярна к пл. π_1, то горизонтальная проекция поверхности имеет очерк в виде окружности. Наиболее целесообразным с точки зрения изображений является перпендикулярность оси поверхности вращения к пл. π_1, или к π_2, или к π_3.

Некоторые поверхности вращения представляют собой частные случаи поверхностей, рассмотренных в § 50. Таковы: 1) цилиндр вращения, 2) конус вращения, 3) гиперболоид вращения однополостный, 4) эллипсоид вращения, 5) параболоид вращения, 6) гиперболоид вращения двуполостный.

Для *цилиндра* и *конуса вращения* меридианы являются прямыми линиями – в первом случае параллельными оси и равноудаленными от нее, во втором случае пересекающими ось в одной и той же ее точке под одним и тем же углом к оси. Так как цилиндр и конус вращения – поверхности, бесконечно простирающиеся в направлении их образующих, то на изображениях обычно их ограничивают какими-либо линиями, например следами этих поверхностей на плоскостях проекций или какой-либо из параллелей. Известные из стереометрии *прямой круговой цилиндр* и *прямой круговой конус* ограничены поверхностью вращения и плоскостями, перпендикулярными к ее оси. Меридианы такого цилиндра – прямоугольники, а конуса – треугольники.

Для *гиперболоида вращения* меридианом является гипербола, причем, если осью вращения служит действительная ось гиперболы, то образуется двуполостный гиперболоид вращения; если же вращать гиперболу вокруг ее мнимой оси, то *однополостный*.

Однополостный гиперболоид вращения может быть образован также вращением прямой линии в случае, *если образующая и ось вращения – скрещивающиеся прямые*.

На рис. 331 показан однополостный гиперболоид вращения, образованный вращением прямой AB вокруг указанной оси и ограниченный двумя параллелями; окружность, проведенная из центра O_1, есть горло поверхности.

На однополостном гиперболоиде вращения можно нанести прямолинейные образующие в двух направлениях, например так, как показано на рис. 331, и с наклоном в обратную сторону, под тем же углом к оси.

Кроме прямых (пар) на этой поверхности могут быть еще гиперболы, параболы, эллипсы и окружности.

---

[1]) Точнее, экватором называют ту из параллелей, которая больше соседних с нею параллелей по обе стороны от нее, рассматриваемых до первого горла; горло – наименьшая из соседних параллелей до первого экватора. Отсюда поверхность вращения может иметь несколько экваторов и горл.

На рис. 331 справа показано построение фронтальной проекции однополостного гиперболоида вращения по его оси и образующей. Прежде всего найден радиус горла поверхности. Для этого проведен перпендикуляр $O_1'1'$ к горизонтальной проекции образующей. Этим определена горизонтальная проекция общего перпендикуляра к оси и образующей. Натуральная величина отрезка, выраженного проекциями $O_1''1''$ и $O_1'1'$, равна радиусу горла поверхности. Далее, путем поворота точки с проекциями $2''$, $2'$; $3''$, $3'$; A'', A' выведены в плоскость α, параллельную пл. π_2, что

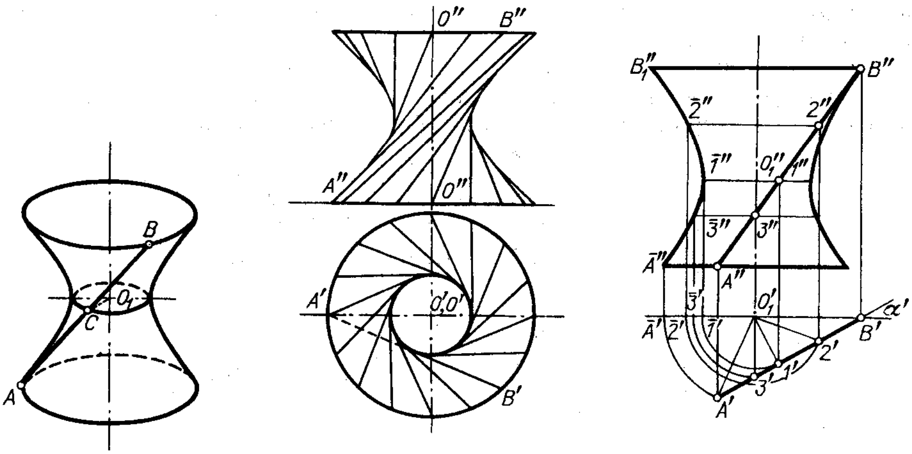

Рис. 331

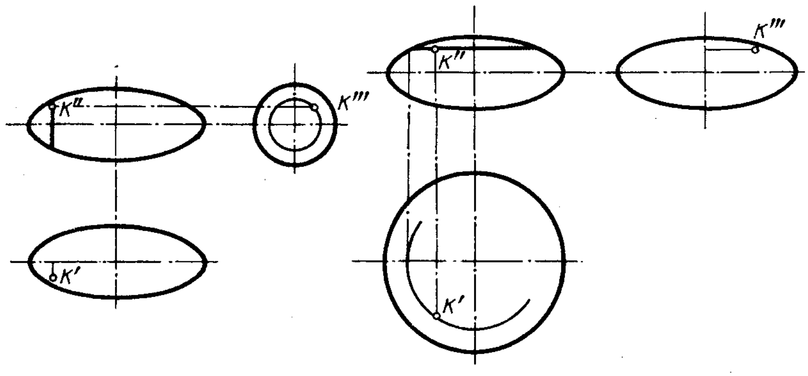

Рис. 332

дает возможность провести очерковую линию фронтальной проекции гиперболоида. Горизонтальная его проекция представит собой три концентрические окружности.

Для *параболоида вращения меридианом является парабола*, ось которой служит осью поверхности.

Для *эллипсоида вращения меридианом является эллипс.* Поверхность может быть образована вращением эллипса вокруг его большой оси (*«вытянутый» эллипсоид вращения* – рис. 332, слева) или вокруг его малой оси (*«сжатый» эллипсоид вращения* – рис. 332, справа). Эллипсоид вращения – поверхность ограниченная; она может быть изображена полностью. Также полностью может быть изображена и сфера. Для сферы экватор и меридианы – равные между собой окружности.

Обратим еще раз внимание на то, что такие поверхности вращения, как цилиндр, конус и однополостный гиперболоид, являются линейчатыми, т. е. их можно образовать вращением прямой линии[1]). Но эллипсоид, параболоид и двуполостный гиперболоид образуются при вращении не прямой, а эллипса, параболы и гиперболы, причем ось вращения выбирается так, чтобы образующая кривая располагалась симметрично по отношению к этой оси. То же можно сказать и относительно однополостного гиперболоида вращения, если он образуется в результате вращения гиперболы вокруг ее мнимой оси.

Так как ось вращения выбирается совпадающей с осью симметрии эллипса, параболы, гиперболы, то эллипс и гипербола образуют по две поверхности, так как у них по две оси симметрии, а парабола – одну поверхность, так как у нее одна ось симметрии. Следовательно, каждая из образуемых поверхностей получается только при вращении одним способом. Между тем сфера, которую можно рассматривать как эллипсоид при равных большой и малой осях образующего эллипса, переходящего при этом в окружность, может быть образована вращением более чем одним

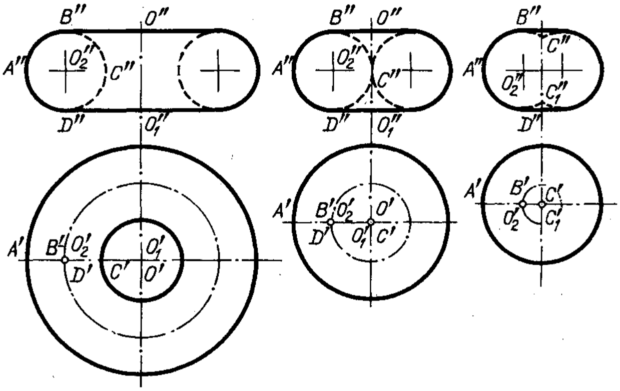

Рис. 333

способом: образующая окружность симметрична относительно каждого из ее диаметров.

При вращении окружности (или ее дуги) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр, получается поверхность с названием *тор*[2]). Так называют и тело, ограниченное тором – поверхностью.

Различают (рис. 333):

1) *открытый тор,* иначе *круговое кольцо,*

2) *замкнутый,*

3) *самопересекающийся.*

На рис. 333 они изображены в простейшем положении: ось тора перпендикулярна к плоскости проекций, в данном случае к пл. π_1.

Образующей для открытого и замкнутого торов служит окружность, для самопересекающегося – дуга окружности. В открытый и замкнутый торы могут быть вписаны сферы. Тор можно рассматривать как поверхность, огибающую одинаковые сферы, центры которых находятся на окружности.

Тор имеет две системы круговых сечений: в плоскостях, перпендикулярных к его оси, и в плоскостях, проходящих через ось тора[3]).

---

[1]) Закономерность в расположении прямолинейных образующих однополостного гиперболоида вращения применена в конструкции, известной под названием «башня Шухова». В. Г. Шухов (1853–1939) – один из выдающихся русских инженеров. «Башня Шухова» применяется в устройстве радиомачт, водонапорных башен и др.

[2]) *Фр.* tore (от torus (*лат.*) – выпуклость, узел) – кольцеобразный выступ на колонне.

[3]) Существует третья система круговых сечений открытого тора, которая в книге не рассматривается.

Поверхность, называемая тором, весьма часто встречается в машиностроении и архитектуре. На рис. 334 слева изображена деталь, поверхность вращения которой содержит самопересекающийся тор и открытый тор, а справа на том же рисунке показана схематически

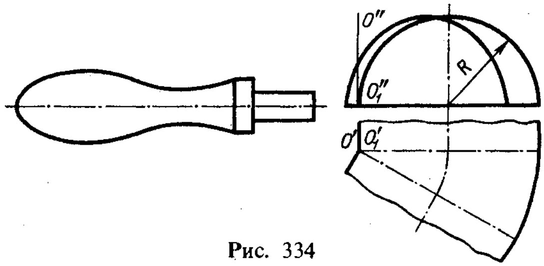

Рис. 334

поверхность перехода от одного цилиндрического свода к другому, имеющая форму замкнутого тора с осью OO_1.

Из поверхностей вращения упомянем еще *катеноид* [1]). Эта поверхность образуется при полном обороте *цепной линии* [2]) вокруг лежащей с ней в одной плоскости горизонтальной оси.

Положение точки на поверхности вращения определяется при помощи окружности, проходящей через эту точку на поверхности вращения.

Но это не исключает возможности применять прямолинейные образующие в случае линейчатых поверхностей вращения, подобно тому, как это показано на рис. 314 для цилиндров и конусов общего вида.

На рис. 330 показано применение параллели для построения проекции точки, принадлежащей данной поверхности вращения. Если дана проекция M'', то проводим фронтальную проекцию $F''F_1''$ параллели, а затем радиусом $R = O_1''F''$ проводим окружность – горизонтальную проекцию параллели – и на ней находим проекцию M'. Если бы была задана проекция M', то следовало бы провести радиусом $R = O_1''F''$ окружность, по точке F' найти F'' и провести $F''F_1''$ – фронтальную проекцию параллели, на которой должна быть проекция M''. На рис. 332 показано построение проекций точки K, принадлежащей эллипсоиду вращения, а на рис. 335 – точки M, принадлежащей поверхности кругового кольца.

На рис. 335 справа показано нахождение проекций точек на сфере. По данной проекции A' точки A построена фронтальная проекция A''; по данной проекции B'' найдена горизонтальная проекция B' точки B, удовлетворяющей дополнительному условию, что точка B невидима, если смотреть на пл. π_2.

Точка C задана на экваторе: ее проекция C' находится на очерке горизонтальной проекции сферы, т. е. на горизонтальной проекции экватора. Точки K и M лежат на главном меридиане; они принадлежат параллелям, на которых находятся точки A и B. Точка D также находится на главном меридиане, причем она невидима, если смотреть на пл. π_1.

Рассмотрим пример построения проекций точек, принадлежащих поверхности вращения. Пусть требуется привести точку A, вращая ее вокруг данной оси MN, на заданную поверхность вращения (рис. 336, *а*). Так как в данном случае ось поверхности вращения и ось вращения точки A перпендикулярны к плоскости проекций π_1, то окружность вращения точки A проецируется на π_1 без искажения, равно как и та параллель поверхности вращения, которая получается при пересечении этой поверхности плоскостью вращения точки A. В этой плоскости расположен и центр вращения точки A – точка O (точка пересечения оси вращения MN с плоскостью вращения α). Остальное ясно из чертежа. В положении A_2 на поверхности точка окажется невидимой на пл. π_2.

---

[1]) Catena (*лат.*) – цепь.

[2]) Цепная линия – кривая, форму которой принимает цепь, подвешенная в ее двух точках, или вообще тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная за ее концы.

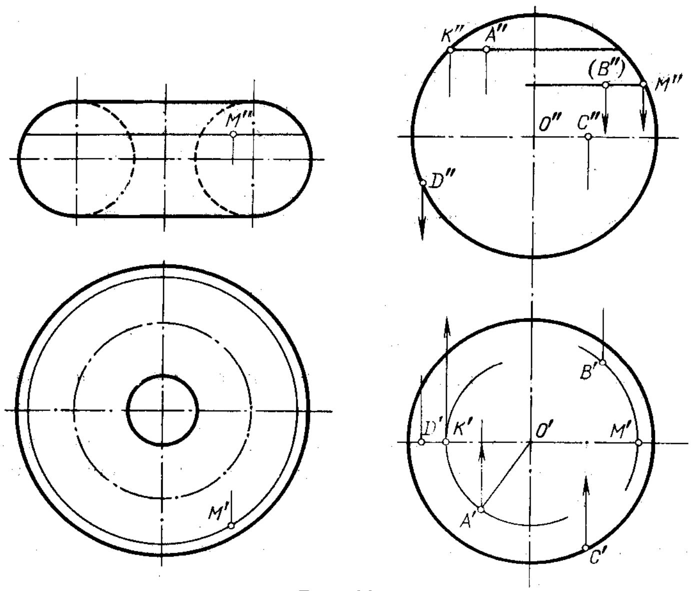

Рис. 335

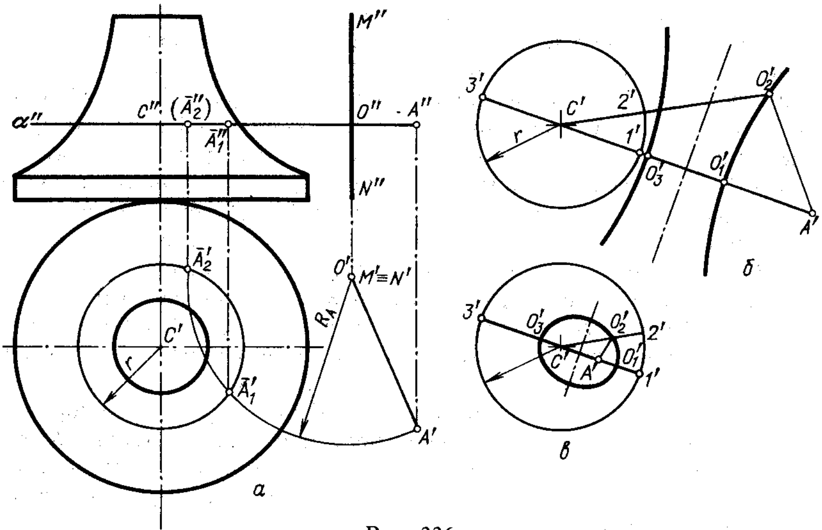

Рис. 336

Положим, что будет поставлен вопрос о выборе оси вращения для того, чтобы данная точка A могла оказаться на заданной поверхности вращения. На с. 100 был рассмотрен аналогичный вопрос, но там требовалось выбрать ось, чтобы поворотом вокруг нее можно было ввести точку в плоскость. Тогда было установлено, что имеется зона, в которой нельзя брать оси, так как при повороте вокруг таких осей точка не соприкоснется с плоскостью. Эта зона определялась параболическим цилиндром, причем парабола возникла при рассмотрении взаимного положения вращаемой точки и прямой, на которой эта точка должна была бы оказаться, соприкоснувшись с плоскостью.

Теперь, очевидно, вопрос будет решаться при рассмотрении взаимного положения точки A и окружности (параллели) на поверхности тела вращения.

Из рис. 336, *а* следует, что проекция O' центра вращения должна быть расположена так, чтобы R_A не был меньше расстояния точки O' до ближайшей точки на проекции окружности радиуса r. Если же взять точку O' на равных расстояниях от A' и от проекции этой окружности (например, в O_1' или O_2'; см. рис. 336, *б*), то в ней уже можно установить ось вращения: окружность вращения точки A коснется окружности радиуса r, т. е. точка A соприкоснется с поверхностью вращения.

Где на чертеже лежат все точки, одинаково удаленные от точки A' и от окружности радиуса r? Они расположены на гиперболе (рис. 336, *б*), для которой точка A' служит одним из фокусов, точка O_1', в которой отрезок $A'1'$ делится пополам, – одной из вершин. Если разделить отрезок $A'3'$ пополам, то мы получим вторую вершину гиперболы (точка O_3'); второй фокус расположится в точке C', т. е. в центре окружности, полученной при пересечении поверхности тела вращения плоскостью α (рис. 336, *а*).

Из рассмотренного вытекает, что точки, расположенные на обеих ветвях гиперболы или между ними, могут быть выбраны каждая в качестве горизонтальной проекции оси вращения.

Может быть случай, когда точка находится внутри поверхности вращения. Следовательно, проводя через точку плоскость вращения, мы получим проекцию A' внутри проекции окружности радиуса r, по которой плоскость вращения точки A пересекает поверхность вращения (рис. 336, *в*). И на этот раз очевидно, что R_A не должен быть меньше расстояния точки O' (т. е. проекции оси) до ближайшей точки проекции окружности радиуса r. Предельные положения проекций осей расположатся теперь как точки эллипса с фокусами в точках A' и C', с большой осью на прямой $1'3'$, с вершинами в точках O_1' и O_3'. Внутри этого эллипса не следует брать проекции осей: такие оси не дадут возможности ввести точку A в поверхность вращения.

Итак, вопрос, как выбрать ось вращения, чтобы, вращая вокруг нее точку, ввести эту точку в плоскость или в поверхность вращения, ось которой параллельна оси вращения, привел нас к эллипсу (рис. 336, *в*), параболе (рис. 244), гиперболе (рис. 336, *б*) как геометрическим местам центров вращения.

При решении различных задач *применяются те или иные поверхности в качестве геометрических мест* точек или линий, отвечающих определенным условиям. Например, заданы пл. α и точка K вне этой плоскости; определить, как расположатся в пл. α точки, отстоящие от точки K на заданное расстояние r (расстояние r больше, чем расстояние точки K до пл. α). В данном случае решение связано с применением сферы как геометрического места точек, отстоящих от точки K на расстояние r. Плоскость α пересечет эту сферу по окружности, которая и даст решение задачи [1].

Если бы требовалось построить в пл. α точки, отстоящие на расстояние r не от точки, а от некоторой прямой AB, не лежащей в пл. α, то геометрическим местом таких точек в пространстве оказалась бы поверхность цилиндра вращения с осью AB и радиусом r, а искомые в пл. α точки получились бы на линии пересечения этого цилиндра пл. α.

В дальнейшем на рис. 368 справа и 401 можно видеть примеры применения конических поверхностей вращения как геометрических мест прямых, проходящих через заданную точку.

Если в задаче поставлен вопрос о точках, равноотстоящих от заданных плоскости α и точки M, то в качестве геометрического места таких точек в пространстве следовало бы использовать параболоид вращения с фокусом параболы в точке M.

Применение тех или иных поверхностей в качестве геометрических мест, конечно, не исчерпывается приведенными примерами.

ВОПРОСЫ К § 51

1. Что называется поверхностью вращения?
2. Чем можно задать поверхность вращения?
3. Что называется параллелями и меридианами на поверх ях вращения, экватором, горлом, главным меридианом?

---

[1]) Предлагаем читателю составить чертеж и выполнить решение этой и последующих задач.

4. Какая из осей гиперболы служит осью вращения для образования: а) однополостного, б) двуполостного гиперболоида вращения?

5. Можно ли образовать однополостный гиперболоид вращения при помощи прямой линии?

6. Какие поверхности вращения (кроме однополостного гиперболоида) являются линейчатыми?

7. Как образуется поверхность, называемая тором?

8. В каком случае для тора применяется название «круговое кольцо»?

9. Сколько систем круговых сечений имеет тор?

10. Как определяется положение точки на поверхности вращения?

§ 52. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ВИНТЫ

На рис. 337 изображен один виток *винтовой поверхности*, образованной движением отрезка AB. Прямая, определяемая данным отрезком, во всех положениях пересекает ось под одним и тем же углом (на рис. 337 угол 60°). Перемещение концов отрезка вдоль оси пропорционально угловому перемещению отрезка.

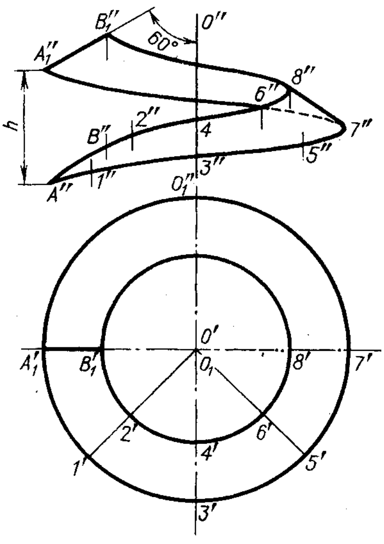

Рис. 337

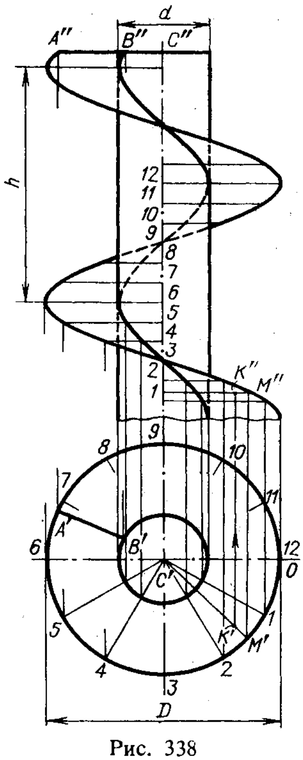

Рис. 338

Точки A и B образуют цилиндрические винтовые линии, как и все точки отрезка AB, и, следовательно, для более точного изображения очерка винтовой поверхности на пл. π_2 надо было бы провести возможно больше проекций винтовых линий, описываемых различными точками отрезка AB, и затем провести кривые, огибающие эти проекции. Практически вместо этого громоздкого построения обычно проводят прямые, одновременно касающиеся проекций винтовых линий (см. рис. 345). Если наклон образующей по отношению к оси цилиндра не равен 90° (например, 60° на рис. 337), то *винтовая поверхность носит название косой*. Если же этот угол равен 90°, то образуется *прямая винтовая поверхность*. Она показана на рис. 338.