

4. Какая из осей гиперболы служит осью вращения для образования: а) однополостного, б) двуполостного гиперboloида вращения?
5. Можно ли образовать однополостный гиперboloид вращения при помощи прямой линии?
6. Какие поверхности вращения (кроме однополостного гиперboloида) являются линейчатыми?
7. Как образуется поверхность, называемая тором?
8. В каком случае для тора применяется название «круговое кольцо»?
9. Сколько систем круговых сечений имеет тор?
10. Как определяется положение точки на поверхности вращения?

§ 52. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ВИНТЫ

На рис. 337 изображен один виток *винтовой поверхности*, образованной движением отрезка AB . Прямая, определяемая данным отрезком, во всех положениях пересекает ось под одним и тем же углом (на рис. 337 угол 60°). Перемещение концов отрезка вдоль оси пропорционально угловому перемещению отрезка.

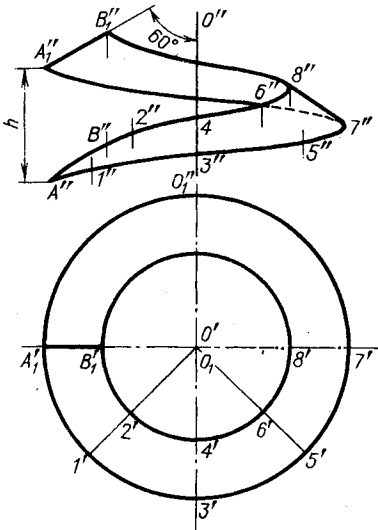


Рис. 337

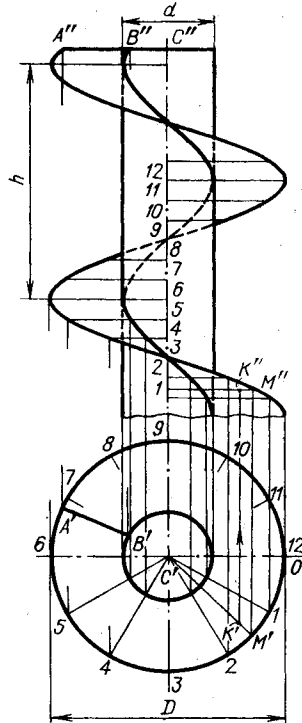


Рис. 338

Точки A и B образуют цилиндрические винтовые линии, как и все точки отрезка AB , и, следовательно, для более точного изображения очерка винтовой поверхности на пл. π_2 надо было бы провести возможно больше проекций винтовых линий, описываемых различными точками отрезка AB , и затем провести кривые, огибающие эти проекции. Практически вместо этого громоздкого построения обычно проводят прямые, одновременно касающиеся проекций винтовых линий (см. рис. 345). Если наклон образующей по отношению к оси цилиндра не равен 90° (например, 60° на рис. 337), то *винтовая поверхность* носит название *косой*. Если же этот угол равен 90° , то образуется *прямая винтовая поверхность*. Она показана на рис. 338.

По своему образованию поверхность, изображенная на рис. 338, является коноидом. Действительно, образующая — прямая линия; она во всех положениях параллельна некоторой плоскости (в данном случае перпендикулярной к оси цилиндра): образующая пересекает две направляющие линии, кривую и прямую (ось цилиндра). Так как кривая направляющая представляет собой винтовую линию, то такой коноид называется винтовым. Другое название — *прямой геликоид*¹⁾.

На рис. 338 винтовой коноид показан совместно с круговым цилиндром, имеющим общую с ним ось; в результате на поверхности цилиндра образуется цилиндрическая винтовая линия, шаг которой одинаков с шагом направляющей винтовой линии. Поверхность, заключенную между обеими винтовыми линиями, называют *кольцевым винтовым коноидом*.

Изображенная на рис. 337 поверхность, называемая косою винтовой, носит также название косо́го геликоида. Характерным для такой поверхности является то, что прямолинейная образующая пересекает во всех своих положениях направляющие — цилиндрическую винтовую линию и прямую линию (ось поверхности), причем образующая пересекает ось под постоянным углом, не равным 90° . Во всех положениях образующая параллельна образующим некоторого конуса вращения, ось которого совпадает с осью винтовой линии (рис. 339, слева). Если, например, надо получить фронтальную проекцию образующей косо́го геликоида, проходящей через точку C , то следует начать с проведения горизонтальной проекции этой образующей, т. е. провести радиус $S'C'$, по точке C'_1 найти точку C'_2 и фронтальную проекцию образующей SC_1 конуса, а затем провести $C''D''$ параллельно $S''C''_1$.

На рис. 339 справа показана винтовая поверхность, образованная движением отрезка, касательного к поверхности цилиндра. Построение сводится опять к нахождению проекций

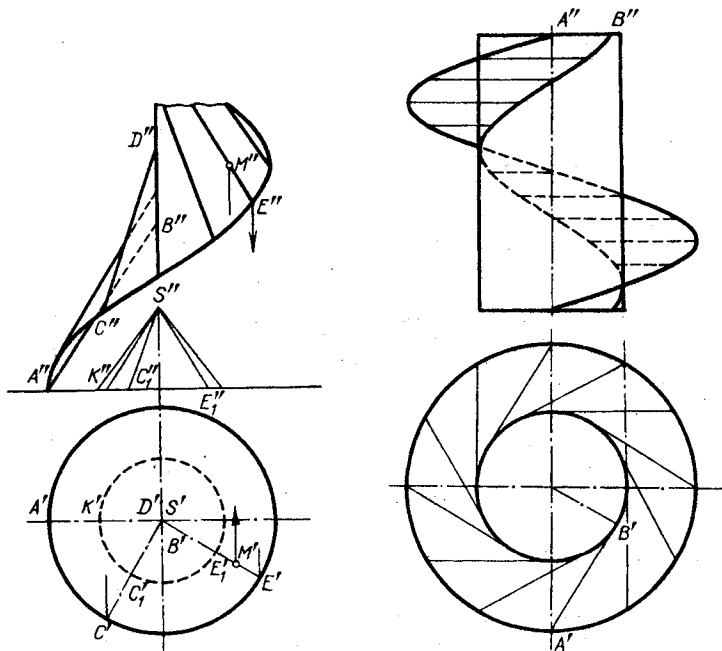


Рис: 339

винтовых линий, образованных двумя точками: концом A отрезка и точкой касания B . Отрезок может быть направлен по отношению к оси либо под прямым углом (как взято на рис. 339), либо под острым.

¹⁾ Hélicoidal (*фр.*) — винтовой; hélice (*фр.*) — спираль, винтовая линия. Говорят также *геликоид*. Под гелисоидом понимают линейчатую винтовую поверхность.

Поверхность, изображенная на рис. 339 справа, является цилиндром (см. с. 143). Действительно, образующая во всех положениях остается параллельной некоторой плоскости и скользит по двум направляющим — пространственным кривым; плоскость параллелизма перпендикулярна к оси цилиндра; образующая касается поверхности цилиндра (точки касания образуют цилиндрическую винтовую линию) и в то же время пересекает направляющую винтовую линию, ось которой совпадает с осью цилиндра. Поверхность, изображенная на рис. 339 справа, называют *винтовым цилиндром*. Если образующая такой поверхности, скрещивающаяся с осью цилиндра, составляет с этой осью угол, не равный 90° , то поверхность уже не относится к разряду цилиндров, она носит название *косого кольцевого геликоида*.

Рассмотренные винтовые поверхности относятся к разряду неразвертываемых. Но имеется винтовая поверхность, которая рассматривается как развертываемая. Это — поверхность с ребром возврата, которым является цилиндрическая винтовая линия (см. рис. 317). Такую винтовую поверхность называют *развертываемым геликоидом*.

На рис. 340 поверхность косого геликоида показана в пересечении с пл. α , перпендикулярной к оси этой поверхности; кривая пересечения изображена на пл. π_1 без искажения, так как $\alpha \parallel \pi_1$. Эта кривая является спиралью Архимеда¹⁾.

Построение этой кривой сводится к следующему. Разбив угол $A_0C_0C_6$ (180°) на несколько (в данном случае на шесть) равных частей, на столько же равных между собой частей разбиваем и отрезок C_0C_6 . На радиусе C_0A_1 от точки C_0 откладываем $C_0C_1 = \frac{C_0C_6}{6}$, на радиусе C_0A_2 откладываем $C_0C_2 = 2C_0C_1$ и т. д.

Теперь обратим внимание на то, как строятся проекции точек, принадлежащих прямой и косой винтовым поверхностям.

Для прямой винтовой поверхности это показано на рис. 338. Положим, что точка K , принадлежащая поверхности, задана горизонтальной проекцией K' . Чтобы найти проекцию K'' , надо провести горизонтальную проекцию той образующей, на которой должна находиться точка K , т. е. провести радиус $C'M'$ через проекцию K' . По точке M' находим точку M'' и проводим фронтальную проекцию этой образующей, параллельную $A''B''$. На этой прямой находим проекцию K'' ²⁾.

Если будет дана проекция K'' и надо найти K' , то сначала через K'' проводим прямую перпендикулярно к оси винтовой линии до пересечения с проекцией винтовой линии в точке M'' , по этой точке находим точку M' и на радиусе $C'M'$ — точку K' .

Точность построения здесь связана с точностью проведения синусоиды (фронтальной проекции винтовой линии), так как точка M'' находится на ней.

¹⁾ Интересующихся доказательством отсылаем к предыдущим изданиям.

²⁾ Обратите внимание на видимость точки K по отношению к пл. π_2 : при «непрозрачности» винтовой поверхности точка K невидима.

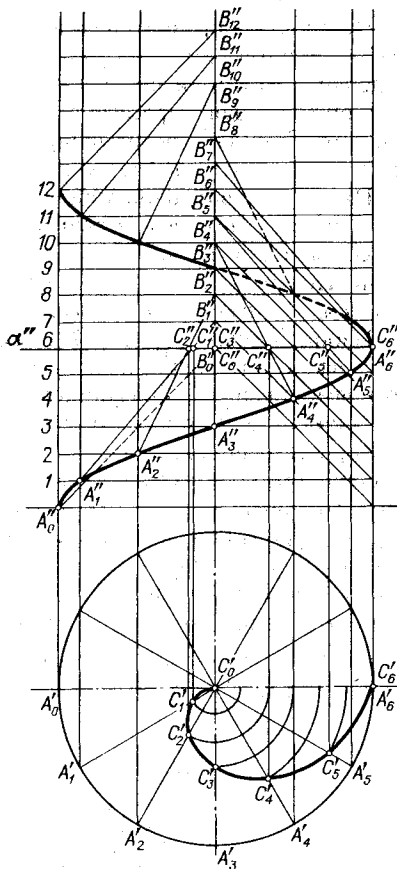


Рис. 340

В случае косо́й винтовой поверхности (рис. 339, слева), если дана проекция M' и надо найти M'' , проводим через точку M' радиус $E'S'$, по точкам E и E_1 находим точки E'' и E_1'' , проводим проекцию $S'E_1''$ образующей конуса и параллельно ей через точку E'' проекцию образующей винтовой поверхности. На этой проекции получаем проекцию M'' .

Если же задается проекция M'' и надо найти M' , то приходится построить кривую (спираль Архимеда) от пересечения косо́й винтовой поверхности плоскостью, проведенной на уровне точки M'' перпендикулярно к оси поверхности, и на спирали найти точку M' .

Винтовые поверхности, указанные на рис. 337–340, не могут быть точно развернуты на плоскости. Для прямой винтовой поверхности, изображенной на рис. 338, можно *приблизительно* развернуть каждый отдельный оборот так, как это показано на рис. 341. Развертка одного оборота может быть представлена (приблизительно) как часть плоского кольца.

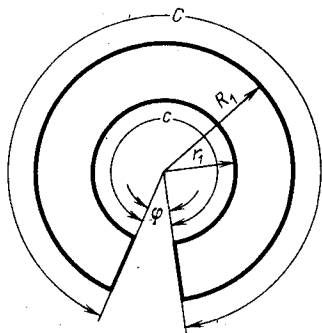


Рис. 341

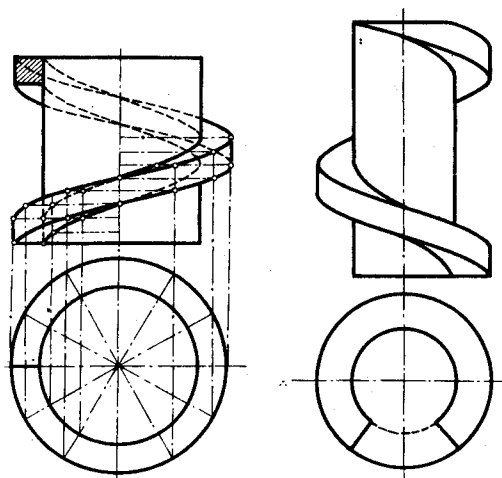


Рис. 342

Для построения такой части кольца нужно найти величину радиусов R_1 и r_1 и угол φ . Если шаг винтовой поверхности (рис. 338) обозначить через h , а диаметры внешний и внутренний (диаметр цилиндра) — через D и d , то по формуле, указанной на с. 133, длины участков винтовых линий выразятся так:

$$C = \sqrt{\pi^2 D^2 + h^2} \quad \text{и} \quad c = \sqrt{\pi^2 d^2 + h^2}.$$

Так как винтовые линии развертываются в данном случае в концентрические дуги при одном и том же центральном угле, то $c : C = r_1 : R_1$ и, следовательно,

$$r_1 = \frac{c}{C} R_1.$$

Обозначим ширину винтовой поверхности, т. е. разность $R_1 - r_1 = \frac{D - d}{2}$, через a , получаем $R_1 = r_1 + a$, откуда $r_1 = \frac{c}{C} r_1 + \frac{ac}{C}$, или $r_1 = \frac{ac}{C - c}$. Отсюда вытекает, что угол φ может быть определен из формулы

$$\varphi = \frac{2\pi R_1 - C_1}{2\pi R_1} \cdot 360^\circ.$$

Положим $D = 100$ мм, $d = 60$ мм, $h = 50$ мм. Находим $a = 20$ мм, $C \approx 318$ мм, $c \approx 195$ мм, $r_1 \approx 32$ мм, $R_1 \approx 52$ мм, $\varphi \approx 10^\circ$.

Проводим радиусами $R_1 = 52$ мм и $r_1 = 32$ мм две концентрические окружности, строим центральный угол $\varphi = 10^\circ$ и таким образом выделяем часть кольца, представляющего собой (приблизительно) развертку одного оборота винтовой поверхности.

Имея несколько таких развернутых оборотов, можно каждый оборот соединить с цилиндрическим стержнем диаметра d (как это показано на рис. 343) и скрепить между собой один за другим накрученные на стержень обороты.

Подобно тому, как при винтовом движении точки образуется винтовая линия и при винтовом движении отрезка прямой получается винтовая поверхность, можно получить винтовое тело, если заставить какую-либо плоскую фигуру (например, квадрат, треугольник, трапецию) двигаться по поверхности цилиндра так, чтобы вершины этой фигуры перемещались по винтовым линиям, а плоскость самой фигуры постоянно проходила через ось цилиндра. Образуется винтовой выступ, ограниченный винтовыми и цилиндрическими поверхностями. Построение проекций такого винтового выступа сводится к построению стольких винтовых линий, сколько вершин у выбранной фигуры.

На рис. 342 слева показано построение винтового выступа, образованного движением квадрата. Квадрат все время примыкает одной своей стороной к образующей цилиндра; вершины квадрата движутся по винтовым линиям.

При нарезании резьбы винтовой выступ (виток) образуется удалением при помощи режущего инструмента части материала.

Полученный винтовой выступ ограничен двумя прямыми винтовыми поверхностями и двумя цилиндрическими поверхностями, наружной и внутренней, соприкасающейся с поверхностью самого цилиндра. Совокупность цилиндра и винтового выступа на нем называют *винтом*. В случае, изображенном на рис. 342 слева, дан *винт с правой резьбой*: подъем винтового выступа на передней (видимой) стороне цилиндра идет слева направо. Если бы подъем винтового выступа на передней (видимой) стороне цилиндра шел справа налево (рис. 342, справа), то винт был бы с левой резьбой (см. с. 133, правая и левая винтовые линии).

На рис. 343 показан винтовой выступ, образованный движением прямоугольника, примыкающего к образующей цилиндра своей меньшей стороной. Винты такого вида применяются в винтовых транспортерах¹⁾.

На этом же чертеже показано построение проекции A'' точки A , находящейся на винтовой поверхности и заданной проекцией A' . Построение подобно указанному на рис. 338, но показано, как избежать неточности в проведении синусоиды. Для этого можно определить отрезок l , определяющий перемещение точки l вдоль оси винта при повороте образующей из начального положения в положение $C1$ (т. е. на угол $O'C1'$). Надо взять пропорцию $x : h = \angle O'C1' : 360^\circ$, откуда определить x , что и даст нам величину l . Дальнейшее ясно из чертежа.

Винты, изображенные на рис. 342, имеют *квадратную резьбу*. Если вместо квадрата взять треугольник и заставить его перемещаться вдоль цилиндра так же, как это было сделано с квадратом, то получим *винт с треугольной резьбой* (рис. 344). Производящий треугольник примыкает одной стороной к основному цилиндру; вершины треугольника образуют винтовые линии, для получения которых взяты две окружности. Эти окружности разделены на 12 частей; точки делений спроецированы на горизонтальные линии, проведенные через 12 делений шага винта. Поверхность винта с треугольной резьбой представляет собой сочетание двух косых винтовых поверхностей. Видимый контур на пл. π_2 получен путем проведения касательных к проекциям большой и малой винтовых линий (рис. 345). Так обычно и поступают, хотя на самом деле контур проекции косоугольной винтовой поверхности на пл. π_2 представляет собой кривую линию.

На рис. 346 показано построение поперечного сечения винта с треугольной резьбой плоскостью α . Проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость β , проходящая через ось винта. В пересечении с винтовым выступом пл. β выделяет производящий треугольник²⁾, горизонтальная проекция которого располагается на горизонтальном следе пл. β ; фронтальная проекция стороны AB этого треугольника пересекается со следом α'' в точке K'' , представляющей собой фронтальную проекцию одной из точек, принадлежащих линии пересечения винтовой поверхности пл. α . На отрезке $A'B'$ получается горизонтальная проекция точки K , принадлежащая горизонтальной проекции искомой линии пересечения винтовой поверхности пл. α .

¹⁾ Винтовой транспортер (шнек), иначе винтовой конвейер, применяется для перемещения зерна, мелкокусковых материалов и т. п.

²⁾ Плоскость β выделяет производящий треугольник в двух его положениях; на передней (видимой) и задней (невидимой) сторонах винта. На рис. 346 показано построение для передней (видимой) стороны винта.

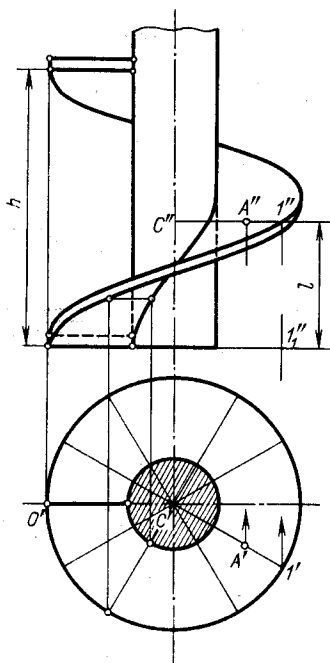


Рис. 343

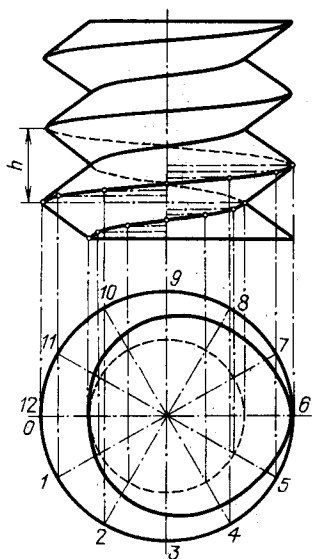


Рис. 344

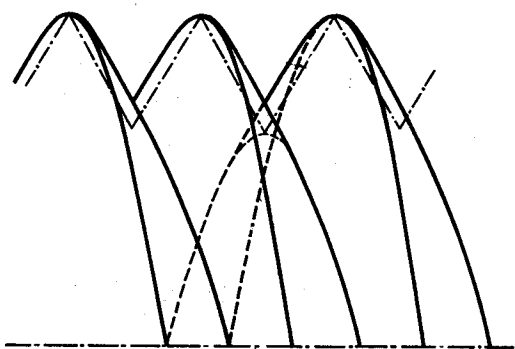


Рис. 345

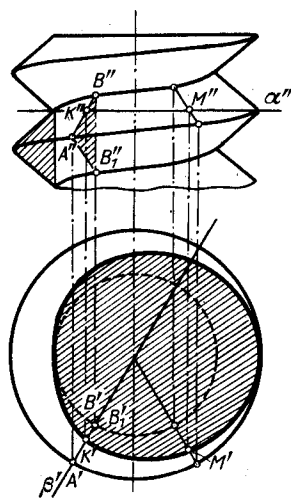


Рис. 346

Далее, построена еще одна точка M (M'' , M') этого сечения; на этот раз горизонтально-проецирующая плоскость не проведена, чтобы показать, что вполне достаточно наметить только положение горизонтальной проекции производящего треугольника, проведя один из радиусов. Также вместо полной фронтальной проекции производящего треугольника достаточно ограничиться проекцией одной его стороны, как это показано на рис. 346.

Проводя ряд радиусов и построив соответствующие им положения производящего треугольника, получим ряд точек для проведения горизонтальной проекции контура сечения. Как видно, фигура сечения ограничена кривой линией, имеющей ось симметрии; следовательно, можно при построении ограничиться нахождением лишь одной половины кривой линии,

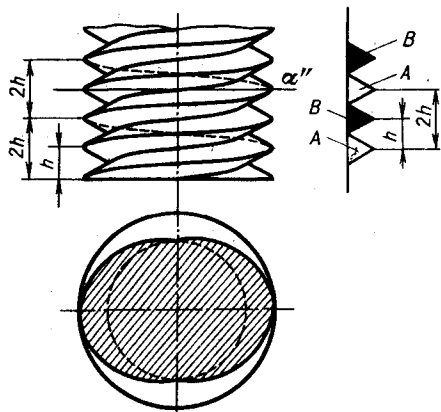


Рис. 347

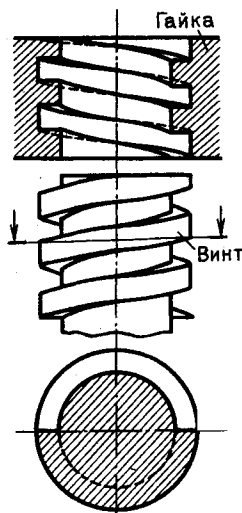


Рис. 348

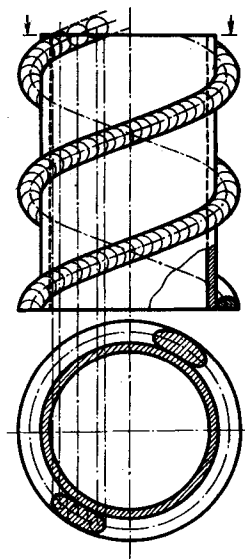


Рис. 349

а другую часть ее строить как симметричную ветвь. Каждая половина этой кривой линии представляет собой спираль Архимеда, о построении которой сказано на с. 159.

В винте, представленном на рис. 344, производящий треугольник после каждого оборота вокруг оси основного цилиндра поднимается в смежное положение на величину шага винтовой линии. Винт получается от движения одного профиля. Такой винт называется *одноходовым*¹⁾.

Если взять два профиля и, считая их соединенными между собой, заставить двигаться по винтовым линиям так, чтобы каждый профиль после одного оборота поднимался на высоту $2h$ (рис. 347), то получится *двухходовой винт*²⁾.

На рис. 348 изображены винт с правой квадратной резьбой и гайка к нему. На горизонтальном разрезе видны отрезки прямых, ограничивающие вместе с полуокружностями фигуру сечения. Эти отрезки соответствуют тому, что винтовой выступ ограничен не косой, а прямой винтовой поверхностью.

На рис. 349 показан двухходовой винт двухвинтового транспортера³⁾, образованный навиванием стальной проволоки круглого сечения на стальную трубу; проволока крепится на трубе обычно сваркой.

Представляя себе ряд сфер, диаметр которых равен диаметру проволоки и центры которых помещаются на винтовой линии (оси витка), контур проекции витка очерчиваем как линию, огибающую окружности — проекции сфер.

На горизонтальной проекции показаны сечения двух витков (контур проекции сечения построен как линия, обертывающая окружности, получаемые при пересечении указанных выше сфер плоскостью).

ВОПРОСЫ К § 52

1. Как образуются прямая и косая винтовые поверхности?
2. Почему прямая винтовая поверхность называется также винтовым коноидом?
3. Что представляет собой кольцевой винтовой коноид?
4. Как образуется винтовой цилиндрикоид?

¹⁾ Одноходовые винты называются иногда *однооборотными*, *однозаходными*, *винтами в одну нитку*.

²⁾ Другие названия: *двухоборотный*, *двухзаходный*, *винт в две нитки*.

³⁾ Двухвинтовой транспортер служит для перемещения штучных грузов, например мешков, тюков и т. п.

5. По каким линиям пересекает прямую и косую винтовые поверхности плоскость, перпендикулярная к оси поверхности?
6. Как можно приближенно развернуть оборот прямой винтовой поверхности?
7. Какая из винтовых поверхностей относится к числу развертываемых?
8. Что называется винтом?
9. Как различить по внешнему виду винты с правой и левой резьбой?
10. Что называется многоходовым винтом?

§ 53. ПРОВЕДЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ К КРИВЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

При изображении кривых поверхностей и при выполнении связанных с ними построений может оказаться необходимым проведение плоскости, касательной к поверхности.

Возьмем небольшую часть поверхности и точку на ней. Если через эту точку проведены на поверхности кривые и касательные к ним прямые, то последние оказываются в одной плоскости¹⁾. Эту плоскость называют касательной к поверхности в данной ее точке.

Точка поверхности, в которой может быть, и притом только одна, касательная плоскость, называется *обыкновенной* (или *правильной*). Обыкновенным точкам противопоставляются *особые*, например: вершина конической поверхности, вершина поверхности вращения, точка на ребре возврата.

Плоскость вполне определяется двумя пересекающимися прямыми; поэтому для построения плоскости, касательной к кривой поверхности в некоторой ее точке, достаточно через эту точку провести на поверхности две кривые и к каждой из них касательную в той же точке. Эти две прямые (касательные) определяют касательную плоскость.

Перпендикуляр к касательной плоскости в обыкновенной точке поверхности служит *нормалью* к поверхности. Отсюда *нормальное сечение поверхности* — сечение плоскостью, проходящей через нормаль.

На рис. 350 построена плоскость, касательная к вытянутому эллипсоиду вращения в его точке K . Через эту точку проведена параллель поверхности и к ней касательная KF : проекция $K''F''$ совпадает с фронтальной проекцией параллели, а горизонтальная проекция $K'F'$ является касательной к окружности — горизонтальной

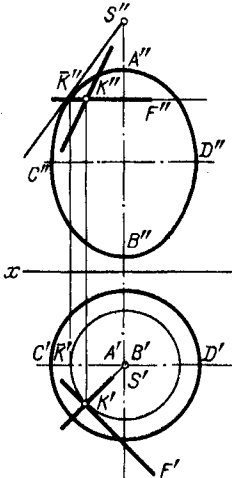


Рис. 350

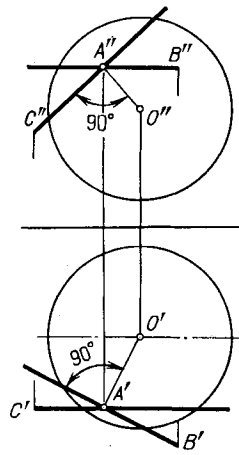


Рис. 351

¹⁾ Рассматривается в дифференциальной геометрии. В ней геометрические образы изучаются на основе метода координат средствами дифференциального исчисления.