5. По каким линиям пересекает прямую и косую винтовые поверхности плоскость, перпендикулярная к оси поверхности?

6. Как можно приближенно развернуть оборот прямой винтовой поверхности?

7. Какая из винтовых поверхностей относится к числу развертываемых?

8. Что называется винтом?

9. Как различить по внешнему виду винты с правой и левой резьбой?

10. Что называется многоходовым винтом?

§ 53. ПРОВЕДЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ К КРИВЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

При изображении кривых поверхностей и при выполнении связанных с ними построений может оказаться необходимым проведение плоскости, касательной к поверхности.

Возьмем небольшую часть поверхности и точку на ней. Если через эту точку проведены на поверхности кривые и касательные к ним прямые, то последние оказываются в одной плоскости [1]). Эту плоскость называют касательной к поверхности в данной ее точке.

Точка поверхности, в которой может быть, и притом только одна, касательная плоскость, называется *обыкновенной* (или *правильной*). Обыкновенным точкам противопоставляются *особые*, например: вершина конической поверхности, вершина поверхности вращения, точка на ребре возврата.

Плоскость вполне определяется двумя пересекающимися прямыми; поэтому для построения плоскости, касательной к кривой поверхности в некоторой ее точке, достаточно через эту точку провести на поверхности две кривые и к каждой из них касательную в той же точке. Эти две прямые (касательные) определяют касательную плоскость.

Перпендикуляр к касательной плоскости в обыкновенной точке поверхности служит *нормалью к поверхности*. Отсюда *нормальное сечение поверхности* — сечение плоскостью, проходящей через нормаль.

На рис. 350 построена плоскость, касательная к вытянутому эллипсоиду вращения в его точке K. Через эту точку проведена параллель поверхности и к ней касательная KF: проекция $K''F''$ совпадает с фронтальной проекцией параллели, а горизонтальная проекция $K'F'$ является касательной к окружности — горизонтальной

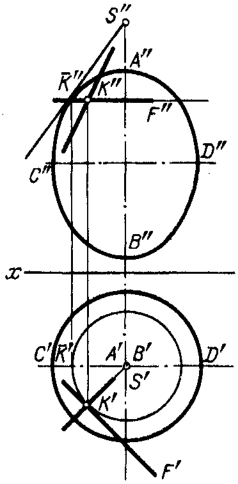

Рис. 350

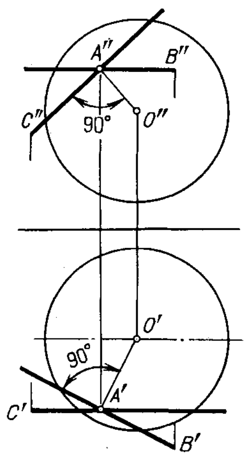

Рис. 351

[1]) Рассматривается в дифференциальной геометрии. В ней геометрические образы изучаются на основе метода координат средствами дифференциального исчисления.

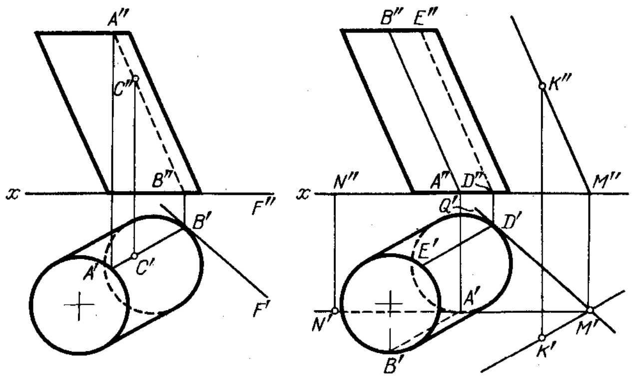

Рис. 352

проекции параллели. В качестве второй кривой, проходящей через точку K, взят меридиан, на рис. 350 не изображенный: можно воспользоваться уже начерченным главным меридианом – очерком фронтальной проекции эллипсоида. Надо представить себе, что эллипсоид повернут вокруг своей оси AB так, чтобы меридиан, проходящий через заданную точку K, занял положение главного меридиана $A\bar{K}B$. При этом точка K займет положение $\bar{K}$. Проводя в точке $\bar{K}''$ касательную к эллипсу, получаем фронтальную проекцию второй касательной к эллипсоиду в точке $\bar{K}$. Теперь нужно эту касательную повернуть так, чтобы точка $\bar{K}'$ заняла исходное положение K'. Точка S, лежащая на касательной и на оси эллипсоида, остается неподвижной, и касательная к меридиану в точке K выразится проекциями $S'K'$ и $S''K''$. Прямые KF и SK определяют искомую плоскость.

Очевидно, такое построение применимо и к сфере. Но здесь можно поступить проще, исходя из того, что *плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания*. Поэтому, проведя (рис. 351) радиус OA, строим плоскость, задавая ее горизонталью AB и фронталью AC, перпендикулярной к OA. Эти прямые определяют плоскость, касательную к сфере в ее точке A.

В рассмотренных примерах (рис. 350 и 351) касательная плоскость имеет с поверхностью одну общую точку. Если представить себе проходящие через эту точку кривые на поверхности, то эти кривые в окрестности точки касания располагаются по одну сторону от касательной плоскости. То же мы могли бы видеть на параболоиде вращения, на торе, образованном дугой (меньше полуокружности), вращающейся вокруг ее хорды, и др. Такие точки на поверхности называются *эллиптическими*. Если у поверхности все точки эллиптические, то эта поверхность выпуклая, например эллипсоид, показанный на рис. 350.

На рис. 352 показано проведение плоскости, касательной к цилиндру. Слева на рис. 352 плоскость проведена через заданную точку C на цилиндрической поверхности, справа – через точку K вне цилиндра.

Здесь плоскость касается поверхности не в одной точке, а во всех точках на образующей. Такие точки поверхности называются *параболическими*. К поверхностям с параболическими точками относятся цилиндрические, конические, поверхности с ребром возврата.

Построение на рис. 352 слева заключается в следующем. Данная поверхность линейчатая. Поэтому через точку C можно провести образующую AB, которая является одной из двух пересекающихся прямых, определяющих касательную плоскость. В качестве второй прямой можно взять касательную BF к окружности – горизонтальному следу цилиндрической поверхности. Прямые AB и BF определяют искомую касательную плоскость. Прямая BF является горизонтальным следом этой плоскости.

На рис. 352 справа точка K задана вне цилиндрической поверхности. Касательная плоскость должна содержать в себе образующую поверхности; значит, эта плоскость вообще параллельна направлению образующей. Поэтому прямая

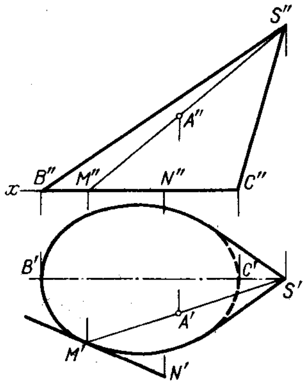

Рис. 353

KM, параллельная образующей, принадлежит касательной плоскости. В качестве второй прямой, определяющей в пересечении с KM плоскость, касательную к цилиндрической поверхности, на рис. 352 справа показана MQ – горизонтальный след искомой плоскости. Эта плоскость касается поверхности по образующей DE.

Второе решение: через точку M проведена прямая MN – горизонтальный след второй касательной плоскости (касание по образующей AB).

На рис. 353 показано построение плоскости, касательной к конической поверхности в ее точке A. Поверхность задана вершиной S и направляющей – эллипсом, лежащим на пл. π_1.

Образующая SM, на которой расположена точка A, является линией касания плоскости к конической поверхности. Помимо этой образующей, касательную плоскость определяет еще прямая MN на пл. π_1, касательная к эллипсу.

Если точка, через которую надо провести плоскость, касательную к данной конической поверхности, находится вне этой поверхности, то для построения касательной плоскости надо провести прямую через вершину S и заданную точку, найти горизонтальный след этой прямой и провести через него касательные к эллипсу (подобно тому, как было показано на рис. 352 справа, где касательные проводились к окружности – следу цилиндрической поверхности на пл. π_1). Получаются две плоскости, касательные к конической поверхности.

В примерах на рис. 350–353 касательные плоскости не пересекают поверхностей. Но если это характерно для выпуклых поверхностей, то вообще плоскость, касательная к поверхности в некоторой ее точке, может пересекать эту поверхность. Так, плоскость, касательная к поверхности гиперболического параболоида (см. рис. 321) в точке O, содержит касательные Ox и Oy к параболам BOB_1 и AOA_1 и рассекает поверхность на две части, имея с ней бесконечное множество общих точек.

При пересечении поверхности плоскостью, касательной к этой поверхности в какой-либо ее точке, могут получиться две прямые с пересечением в этой точке, прямая и кривая, две кривые. Например, однополостный гиперболоид вращения, т. е. линейчатая поверхность с двумя прямыми образующими, может быть пересечен по двум пересекающимся прямым линиям. То же мы видим в отношении гиперболического параболоида (рис. 321).

Примером пересечения по прямой и кривой могут служить случаи пересечения линейчатой неразвертываемой поверхности, например пересечение поверхностей с плоскостью параллелизма, винтовых поверхностей с прямолинейной образующей (кроме развертываемого геликоида).

Точки поверхности, в которых касательная плоскость рассекает поверхность, называются *гиперболическими*. Такие точки присущи в числе других (см. выше) вогнутым поверхностям вращения (пример такой поверхности см. на рис. 330).

Если точки поверхности в какой-либо ее части гиперболические, то форма поверхности в этой части *седлообразная* (например, у гиперболического параболоида – рис. 321, 322).

Если сравнить между собой поверхности линейчатые, развертываемые и неразвертываемые, то для развертываемых касательные плоскости в различных точках образующей линии имеют одно и то же направление (например, у конической поверхности вращения), а для неразвертываемых касательные плоскости в разных точках образующей направлены не одинаково (например, у однополостного гиперболоида вращения).

§ 54. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОЧЕРКОВ ПРОЕКЦИЙ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С НАКЛОННОЙ ОСЬЮ

На рис. 354 изображен прямой круговой конус, ось которого параллельна пл. π_2 и наклонена к пл. π_1. Очерк его фронтальной проекции задан: это равнобедренный треугольник $S''D''E''$. Требуется построить очерк горизонтальной проекции.