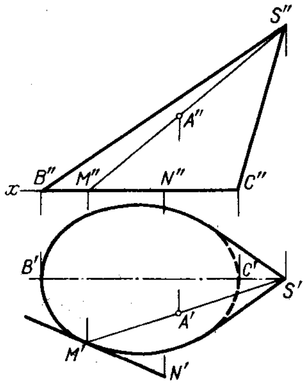

Рис. 353

KM, параллельная образующей, принадлежит касательной плоскости. В качестве второй прямой, определяющей в пересечении с KM плоскость, касательную к цилиндрической поверхности, на рис. 352 справа показана MQ – горизонтальный след искомой плоскости. Эта плоскость касается поверхности по образующей DE.

Второе решение: через точку M проведена прямая MN – горизонтальный след второй касательной плоскости (касание по образующей AB).

На рис. 353 показано построение плоскости, касательной к конической поверхности в ее точке A. Поверхность задана вершиной S и направляющей – эллипсом, лежащим на пл. π_1.

Образующая SM, на которой расположена точка A, является линией касания плоскости к конической поверхности. Помимо этой образующей, касательную плоскость определяет еще прямая MN на пл. π_1, касательная к эллипсу.

Если точка, через которую надо провести плоскость, касательную к данной конической поверхности, находится вне этой поверхности, то для построения касательной плоскости надо провести прямую через вершину S и заданную точку, найти горизонтальный след этой прямой и провести через него касательные к эллипсу (подобно тому, как было показано на рис. 352 справа, где касательные проводились к окружности – следу цилиндрической поверхности на пл. π_1). Получаются две плоскости, касательные к конической поверхности.

В примерах на рис. 350–353 касательные плоскости не пересекают поверхностей. Но если это характерно для выпуклых поверхностей, то вообще плоскость, касательная к поверхности в некоторой ее точке, может пересекать эту поверхность. Так, плоскость, касательная к поверхности гиперболического параболоида (см. рис. 321) в точке O, содержит касательные Ox и Oy к параболам BOB_1 и AOA_1 и рассекает поверхность на две части, имея с ней бесконечное множество общих точек.

При пересечении поверхности плоскостью, касательной к этой поверхности в какой-либо ее точке, могут получиться две прямые с пересечением в этой точке, прямая и кривая, две кривые. Например, однополостный гиперболоид вращения, т. е. линейчатая поверхность с двумя прямыми образующими, может быть пересечен по двум пересекающимся прямым линиям. То же мы видим в отношении гиперболического параболоида (рис. 321).

Примером пересечения по прямой и кривой могут служить случаи пересечения линейчатой неразвертываемой поверхности, например пересечение поверхностей с плоскостью параллелизма, винтовых поверхностей с прямолинейной образующей (кроме развертываемого геликоида).

Точки поверхности, в которых касательная плоскость рассекает поверхность, называются *гиперболическими*. Такие точки присущи в числе других (см. выше) вогнутым поверхностям вращения (пример такой поверхности см. на рис. 330).

Если точки поверхности в какой-либо ее части гиперболические, то форма поверхности в этой части *седлообразная* (например, у гиперболического параболоида – рис. 321, 322).

Если сравнить между собой поверхности линейчатые, развертываемые и неразвертываемые, то для развертываемых касательные плоскости в различных точках образующей линии имеют одно и то же направление (например, у конической поверхности вращения), а для неразвертываемых касательные плоскости в разных точках образующей направлены не одинаково (например, у однополостного гиперболоида вращения).

§ 54. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОЧЕРКОВ ПРОЕКЦИЙ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С НАКЛОННОЙ ОСЬЮ

На рис. 354 изображен прямой круговой конус, ось которого параллельна пл. π_2 и наклонена к пл. π_1. Очерк его фронтальной проекции задан: это равнобедренный треугольник $S''D''E''$. Требуется построить очерк горизонтальной проекции.

Искомый очерк составляется из части эллипса и двух касательных к нему прямых. В самом деле, конус в заданном его положении проецируется на пл. π_1 при помощи поверхности эллиптического цилиндра, образующие которого проходят через точки окружности основания конуса, и при помощи двух плоскостей, касательных к поверхности конуса.

Эллипс на горизонтальной проекции можно построить по двум его осям: малой $D'E'$ и большой, равной по своей величине $D''E''$ (диаметру окружности основания конуса). Прямые $S'B'$ и $S'F'$ получатся, если провести из точки S' касательные к эллипсу. Построение этих прямых заключается в отыскании проекций тех образующих конуса, по которым происходит соприкосновение конуса и упомянутых выше плоскостей. Для этого использована сфера, вписанная в конус. Так как проецирующая на π_1 плоскость одновременно касается конуса и сферы, то можно провести касательную из точки S' к окружности – проекции экватора сферы – и принять эту касательную за проекцию искомой образующей. Построение можно начать с отыскания точки A'' – фронтальной проекции одной из точек искомой образующей. Точка A'' получается при пересечении фронтальных проекций: 1) окружности касания конуса и сферы (прямая $M''N''$) и 2) экватора сферы (прямая $K''L''$). Теперь можно найти проекцию A' на горизонтальной проекции экватора и через точки S' и A' провести прямую – горизонтальную проекцию искомой образующей. На этой прямой определяется и точка B, горизонтальная проекция которой (точка B') есть точка касания прямой с эллипсом.

С построением очерков проекций конуса вращения мы встречаемся, например, в таком случае: даны проекции вершины конуса (S'', S'), направление его оси (SK), размеры высоты и диаметра основания; построить проекции конуса. На рис. 355 это сделано при помощи дополнительных плоскостей проекций.

Так, для построения фронтальной проекции введена пл. π_3, перпендикулярная к π_2 и параллельная прямой SK, определяющей направление оси конуса. На проекции $S'''K'''$ отложен отрезок $S'''C'''$, равный заданной высоте конуса. В точке C''' проведен перпендикуляр к $S'''C'''$, и на нем отложен отрезок $C'''B'''$, равный радиусу основания конуса. По точкам C''' и B''' получены точки C'' и B'' и тем самым получена малая полуось $C''B''$ эллипса – фронтальной проекции основания конуса. Отрезок $C''A''$, равный $C'''B'''$, представляет собой большую полуось этого эллипса. Имея оси эллипса, можно его построить так, как было показано на рис. 147.

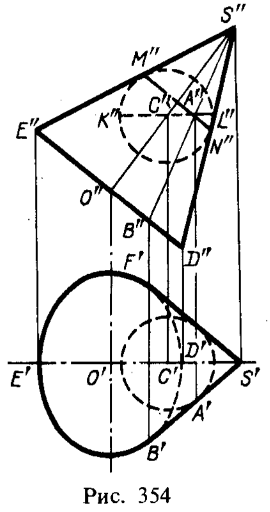

Рис. 354

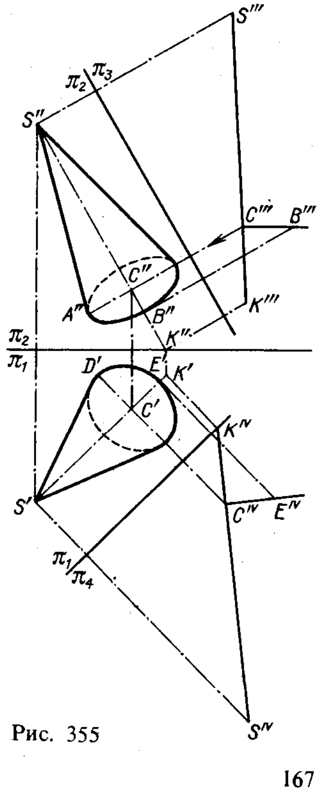

Рис. 355

Для построения горизонтальной проекции введена плоскость проекций π_4, перпендикулярная к π_1 и параллельная SK. Ход построения аналогичен описанному для фронтальной проекции.

Как же построить очерки проекции? На рис. 356 показан иной, чем на рис. 354, способ проведения касательной к эллипсу – без вписанной в конус сферы.

Сначала радиусом, равным малой полуоси эллипса, из его центра проведена дуга (на рис. 356 это четверть окружности). Определяется точка 2 пересечения этой дуги с окружностью диаметра $S''C''$. Из точки 2 проведена прямая параллельно большой оси эллипса; эта

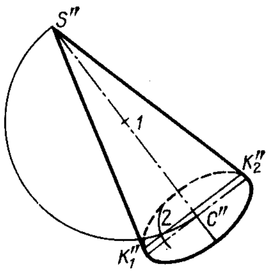

Рис. 356

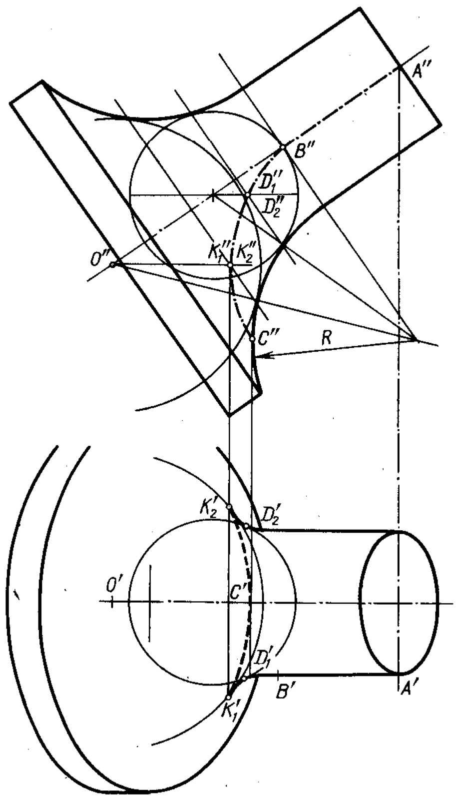

Рис. 357

прямая пересекает эллипс в точках K_1'' и K_2''. Теперь остается провести прямые $S''K_1''$ и $S''K_2''$; они являются касательными к эллипсу и входят в очерк фронтальной проекции конуса.

На рис. 357 изображено тело вращения с наклонной осью, параллельной пл. π_2. Это тело ограничено комбинированной поверхностью, состоящей из двух цилиндров, поверхности кругового кольца и двух плоскостей. Очерк фронтальной проекции этого тела – его главный меридиан.

Очерк горизонтальной проекции верхней цилиндрической части данного тела составляется из эллипса и двух касательных к нему прямых. Прямая $A'B'$ является горизонтальной проекцией образующей цилиндра, по которой проецирующая на π_1 плоскость касается поверхности цилиндра. Это же относится и к очерку проекции нижнего цилиндра (на рис. 357 этот очерк изображен не полностью).

Переходим к более сложной части очерка – промежуточной. Мы должны построить горизонтальную проекцию той пространственной кривой линии, в точках которой проходят проецирующие прямые, касательные к поверхности кругового кольца и перпендикулярные к пл. π_1. Фронтальная проекция каждой точки такой кривой построена таким способом, как это было сделано для точки A'' на рис. 354, – при помощи вписанных сфер. Горизонтальные проекции точек определяются на проекции экватора соответствующей сферы. Так построена, например, точка D_1 (D_1', D_1'').

Точки K_1' и K_2' получаются по точке K_1'' (она же K_2'') на экваторе сферы с центром O, а эта точка K_1'' (K_2'') получается при проведении линии связи, касательной к построенной кривой $B''D_1''C''$.

Итак, кривая $B''D_1''K_1''C''$ содержит фронтальные проекции точек, горизонтальные проекции которых B', D_1', K_1' входят в очерк горизонтальной проекции рассматриваемого тела.

ВОПРОСЫ К §§ 53–54

1. Что называется плоскостью, касательной к кривой поверхности в данной точке этой поверхности?
2. Что называется обыкновенной (или правильной) точкой поверхности?
3. Как построить плоскость, касательную к кривой поверхности в некоторой ее точке?
4. Что называется нормалью к поверхности?
5. Как построить плоскость, касательную к сфере в какой-либо точке на сфере?
6. В каком случае кривая поверхность относится к числу выпуклых?
7. Может ли плоскость, касательная к кривой поверхности в какой-либо точке этой поверхности, пересекать последнюю? Укажите пример пересечения по двум прямым.
8. Как используются сферы, вписанные в поверхность вращения, ось которой параллельна пл. π_2, для построения очерка проекции этой поверхности на пл. π_1, по отношению к которой ось поверхности вращения наклонена под острым углом?
9. Как провести касательную к эллипсу из точки, лежащей на продолжении его малой оси?
10. В каком случае очерки проекций цилиндра вращения и конуса вращения будут совершенно одинаковыми на пл. π_1 и пл. π_2?