

На рис. 379 показано нахождение наиболее и наименее удаленных от пл.  $\pi_1$  точек кривой пересечения некоторого конуса плоскостью общего положения  $\beta$ . Для построения этих точек проведены касательные к конусу плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$  так, что их следы  $h'_{\alpha\beta}$  и  $h'_{\gamma\beta}$  параллельны  $h'_{\alpha\beta}$ ; этим определяются те образующие конической поверхности, на которых должны находиться искомые точки  $K$  и  $M$ .

Сначала строятся горизонтальные проекции  $K'$  и  $M'$  в точках пересечения горизонтальных проекций горизонталей, по которым плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  пересекают пл.  $\beta$  с горизонтальными проекциями образующих  $SA$  и  $SB$ , а затем на фронтальных проекциях этих образующих отмечаются проекции  $K''$  и  $M''$ .

На рис. 380, *a* показано построение кривых, получающихся на поверхности конуса вращения при пересечении его гранями правильной шестиугольной призмы<sup>1)</sup>. Две из боковых граней расположены в горизонтально-проецирующих плоскостях  $\alpha$  и  $\delta$ , а третья грань – во фронтальной пл.  $\beta$ . Положение этих плоскостей относительно оси конуса позволяет сразу определить, какие кривые получатся в пересечении. Получаются гиперболы, причем одна из них проецируется на пл.  $\pi_2$  без искажения.

Для нахождения точек кривых взяты параллели на конусе. Прежде всего найдены крайние точки  $1', 4', 2', 5'$  на горизонтальной проекции, а по ним определены точки  $1'', 4'', 2'', 5''$  на фронтальной проекции. Затем при помощи вспомогательной горизонтальной пл.  $\gamma$  определена сначала точка  $6''$  на очерке фронтальной проекции конуса, затем получена точка  $6'$  и при помощи окружности радиуса  $O'b'$  построены точки  $7', 8'$  и  $9'$ , по которым найдены точки  $7'', 8''$  и  $9''$ .

На рис. 380, *b* изображена шестигранная гайка (дан только вид спереди); кривые, отделяющие боковые грани гайки от ее конической части, представляют собой гиперболы, построение проекций которых аналогично показанному на рис. 380, *a*.

## ВОПРОСЫ К § 57

1. В чем заключается общий прием построения кривой линии, получающейся при пересечении конической поверхности плоскостью?
2. Как надо провести плоскость, чтобы пересечь коническую поверхность по прямым линиям?
3. Какие кривые получаются при пересечении конуса вращения плоскостями?
4. В любую ли коническую поверхность можно вписать сферы?
5. Как строится малая ось эллипса, получаемого при пересечении конуса вращения плоскостью?
6. В какую кривую проецируется эллипс, получаемый при пересечении конуса вращения, на плоскость, перпендикулярную к оси конуса?
7. Как строится развертка боковой поверхности конуса вращения?
8. Что представляют собой кривые на гайке с конической фаской на ней?

## § 58. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ СФЕРЫ И ТОРА ПЛОСКОСТЬЮ.

### ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ «ЛИНИЙ СРЕЗА» НА ПОВЕРХНОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

*Как бы ни была направлена секущая плоскость, она всегда рассекает сферу по окружности, которая проецируется в виде отрезка прямой, в виде эллипса или в виде окружности в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к плоскости проекции (рис. 381). Большая ось ( $3'4'$ ) эллипса – горизонтальной проекции окружности сечения – равняется диаметру этой окружности ( $3'4' = 1''2''$ ); малая ось  $1'2'$  получается проецированием. Точки  $5''$  и  $6''$  на фронтальной проекции экватора дают возможность найти точки  $5'$  и  $6'$ , в которых эллипс – горизонтальная проекция окружности – делится соответственно видимости на пл.  $\pi_1$ .*

При построении проекций окружности, получающейся от пересечения сферы плоскостью, применяют вспомогательные плоскости (см. с. 170), дающие, например, на сфере ее параллели, а на плоскости горизонтали. Применяют также преобразо-

<sup>1)</sup> Для экономии места горизонтальная проекция изображена не целиком, а лишь напополам.

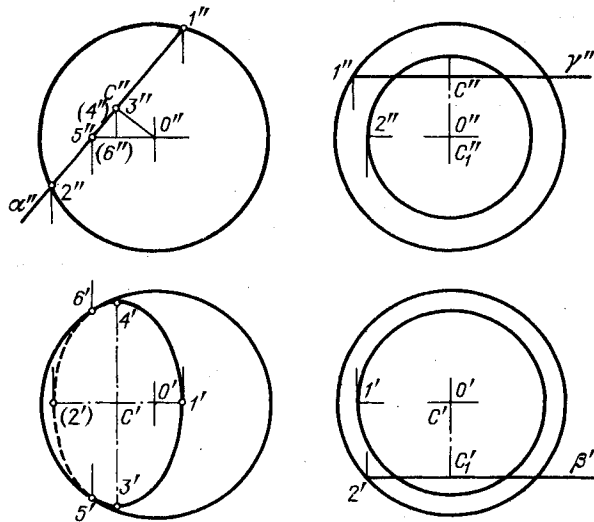


Рис. 381

вание чертежа с целью получить перпендикулярность секущей плоскости по отношению к дополнительной плоскости проекций.

Построение кривой пересечения тора плоскостью в общем случае осуществляется также при помощи плоскостей, пересекающих тор и секущую плоскость. При этом для тора подбираются плоскости, пересекающие его по окружностям (вспомним, что тор имеет две системы круговых сечений — в плоскостях, перпендикулярных к его оси, и в плоскостях, проходящих через эту ось). Схема построения в общем аналогична показанной на рис. 359. Действительно, на рис. 382 показано, что вспомогательные плоскости  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , перпендикулярные к оси тора (в данном случае кругового кольца), пересекают его поверхность по окружностям радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , а пл.  $\alpha$  — по прямым, проецирующимся на пл.  $\pi_2$  в точки  $3''$ ,  $5''$ ,  $7''$ , т. е. перпендикулярным к пл.  $\pi_2$ . Отсюда получают точки фигуры сечения.

Поясним построение на рис. 382. Для кругового кольца даны два изображения: половина фронтальной проекции и профильная проекция. Кольцо пересекается

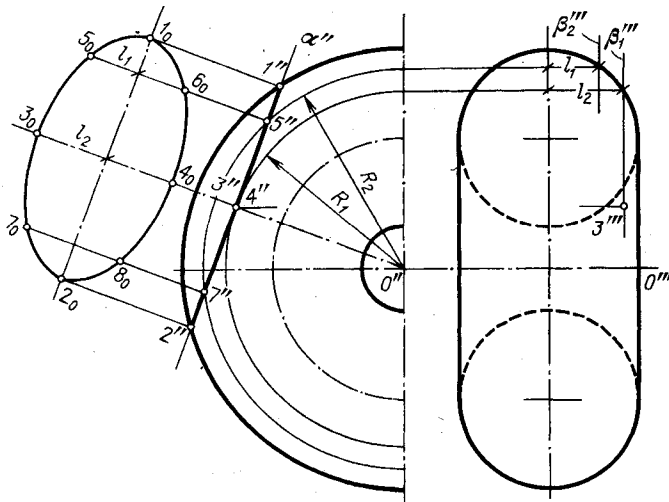


Рис. 382

фронтально-проецирующей пл.  $\alpha$ . Полуокружность радиуса  $R_1$  является линией пересечения кольца фронтальной вспомогательной пл.  $\beta_1$ . Эта полуокружность касается следа  $\alpha''$ ; поэтому определяется только одна точка ( $3''$ ,  $3'''$ ) линии пересечения поверхности кольца пл.  $\alpha$  в пл.  $\beta_1$ . Но если провести пл.  $\beta_2$ , то в ней окажутся две точки, принадлежащие искомой линии пересечения. Пл.  $\beta_2$  определяет на поверхности кольца полуокружность радиуса  $R_2$ , которая пересекает след  $\alpha''$  в двух точках  $5''$  и  $7''$  — фронтальных проекциях точек пересечения поверхности кольца пл.  $\alpha$ . Так можно поступить еще несколько раз и получить ряд точек для искомой линии пересечения.

Фигура сечения имеет оси и центр симметрии. Определившись в процессе построения расстояния  $l_1$  и  $l_2$  плоскостей  $\beta_1$  и  $\beta_2$  от вертикальной в данном случае плоскости симметрии кругового кольца используются для нанесения точек  $3_0$  и  $5_0$  при построении натурального вида сечения (для нанесения точек  $4_0$ ,  $6_0$ ,  $7_0$ ,  $8_0$  использована симметрия).

Полученная кривая сечения напоминает эллипс. Но, конечно, это только внешнее сходство, к тому же не очень большое. Эллипс — кривая 2-го порядка (см. § 21), построенная же кривая пересечения поверхности тора плоскостью выражается алгебраическим уравнением 4-го порядка<sup>1)</sup>.

На рис. 383 показаны сечения поверхности открытого тора (кругового кольца) — в первом случае плоскостью, проходящей через ось тора ( $l = 0$ , где  $l$  — расстояние секущей плоскости от этой оси), по двум окружностям, в остальных (2–5) — по кривым в зависимости от  $l$ ,  $R$  и  $r$ .

Общее название получаемых кривых — *кривые Персея* (в честь одного из геометров Древней Греции). Это алгебраические кривые четвертого порядка.

Показанные на рис. 383 кривые (2–5) имеют различную форму — овала с одной осью симметрии (2), двухлепестковой кривой с узловой точкой в начале координат (3), волнообразной кривой (4), овала с двумя осями симметрии (5) (см. рис. 382). Эти кривые становятся *овалами Кассини*<sup>2)</sup> — частным случаем кривых Персея: для открытого тора при  $R > 2r$ , при  $R = 2r$  и при  $R < 2r$ , для замкнутого ( $R = r$ ) и для самопересекающегося ( $R < r$ ), если  $l = r$ , причем для откры-

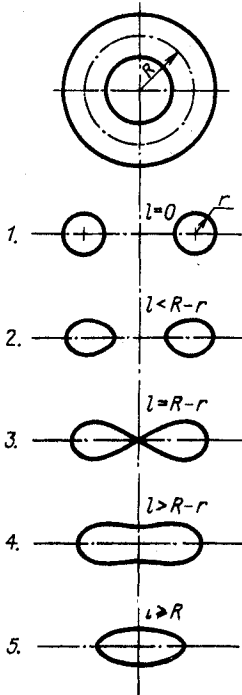


Рис. 383

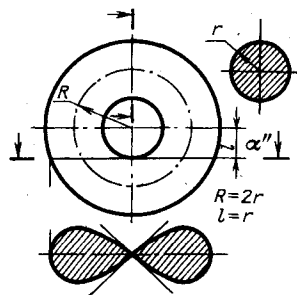


Рис. 384

<sup>1)</sup> Построенная на рис. 382 замкнутая кривая относится к числу *овалов*, т. е. *выпуклых замкнутых плоских кривых, не имеющих угловых точек*. Среди овалов могут быть составленные из дуг окружностей и, следовательно, вычерчиваемые при помощи циркуля; но это не дает оснований считать овалами только такие линии.

<sup>2)</sup> Джованни Доменико Кассини (1625–1712) — астроном. Овал Кассини — алгебраическая кривая 4-го порядка, симметричная относительно осей координат, геометрическое место точек  $M$ , для которых  $F_1M \cdot F_2M = a^2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — фиксированные точки (фокусы),  $a$  — постоянная.

того тора (кругового кольца) при  $R = 2r$  получается *лемниската Бернулли*<sup>1</sup>); для нее ее начало (рис. 384) является двойной точкой: касательные ( $y = \pm x$ ) взаимно перпендикулярны<sup>2</sup>).

На рис. 385 изображено некоторое тело вращения, ограниченное на рассматриваемой его части тремя цилиндрическими поверхностями, конической, сферической и тремя поверхностями кругового кольца, а также двумя плоскостями, которые

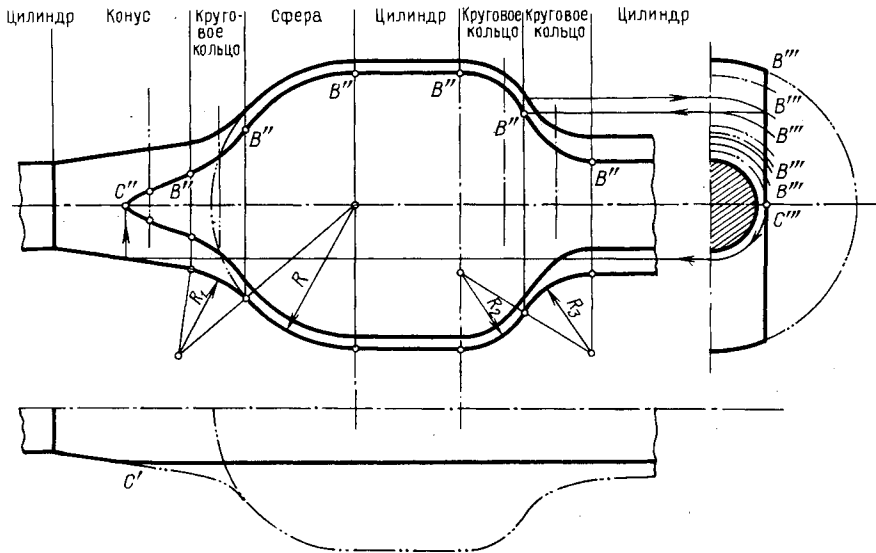


Рис. 385

в изображенном на рис. 385 положении являются фронтальными (на чертеже даны лишь половины вида сверху и профильного разреза).

Эти плоскости в пересечении с поверхностью тела вращения и дают «линии среза», часто встречающиеся на деталях, представляющих собой тела вращения.

Прежде всего установлены «зоны», или участки поверхностей вращения, ограничивающих рассматриваемое тело. Это сделано при помощи точек сопряжения, найденных или на линиях центров, или на перпендикулярах к образующим конуса и цилиндров<sup>3</sup>). Через точки сопряжения проведены профильные плоскости, пересекающие каждую из поверхностей по окружности. Дуги этих окружностей, изображенные на  $\pi_3$ , определяют профильные проекции характерных точек на линии среза. По положению точек  $B'''$  определяется положение проекций  $B''$ .

Линия среза на конусе в данном случае является гиперболой. Ее вершина (точка  $C''$ ) найдена на основании очевидного положения проекции  $C'''$ . Зная положение точки  $C'''$ , определяем проекции дуги окружности, на которой должна находиться точка  $C$ .

Показано также построение по одной «промежуточной» точке на каждом участке линии среза. Построение ясно из чертежа.

На участках сферы и цилиндров «промежуточные» точки не следует находить, так как сфера «срезана» по окружности, изображаемой на главном виде без искажения, причем радиус этой окружности получается как наибольший из отрезков  $C'''B'''$ , а цилиндрические поверхности «срезаны» по образующим.

<sup>1</sup>) Лемниската — лат. *lemniscata* от *lemniscos* (греч.) — лента. Якоб Бернулли (1654—1705) — математик. Лемниската Бернулли — алгебраическая кривая 4-го порядка, имеющая форму восьмерки, геометрическое место точек  $M$ , для которых  $F_1M \cdot F_2M = (F_1F_2/2)^2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — фиксированные точки (фокусы).

<sup>2</sup>) Интересующихся более подробными сведениями о кривых Персея и их частных случаях отсылаем к книге: Савелов А. А. Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.

<sup>3</sup>) На рис. 385 точки сопряжения показаны только на одной половине вида спереди.