

§ 59. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

На рис. 386 слева показано пересечение прямой линии с некоторой цилиндрической поверхностью. Эта поверхность задана ее следом на пл. π_1 — кривой MN и направлением образующей — прямой MT . Через прямую AB проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость β , пересекающая данную цилиндрическую поверхность по кривой, построенной по точкам, в которых образующие поверхности пересекают пл. β . В пересечении полученной кривой с заданной прямой AB находим точку K , в которой прямая AB пересекает цилиндрическую поверхность.

Этот прием является общим для построения точек пересечения прямой с любой поверхностью: *через прямую следует провести вспомогательную плоскость,*

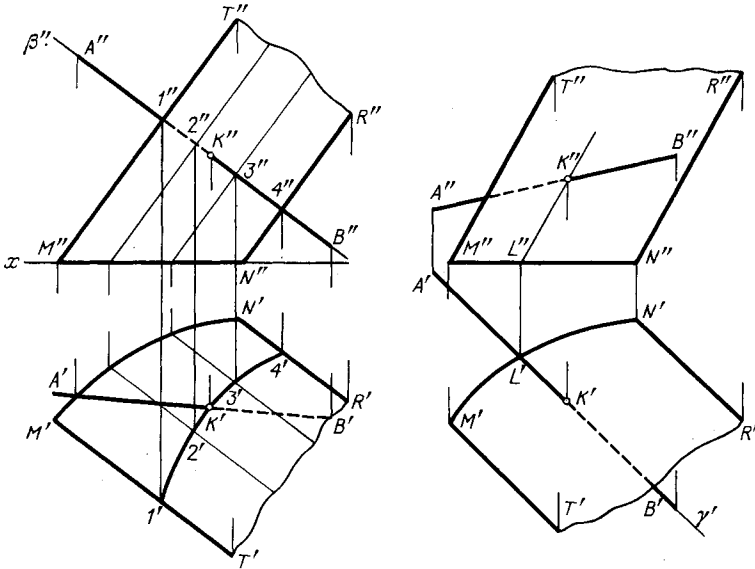


Рис. 386

найти линию пересечения этой плоскости с поверхностью; точка пересечения заданной прямой и построенной линии на поверхности и будет искомым точкой пересечения прямой с поверхностью.

Здесь полная аналогия с построением точки пересечения прямой линии с плоскостью (см. §§ 22, 25).

Построение, показанное на рис. 386 слева, конечно, упрощается, если (рис. 386, справа) вспомогательная пл. γ параллельна образующей MT : поверхность оказывается пересеченной по прямой, параллельной MT и определяемой по одной точке L . Это один из возможных частных случаев, а именно данная прямая AB лежит в плоскости, параллельной образующей MT .

Иногда показ вспомогательной плоскости излишен. Примеры даны на рис. 387: прямой круговой цилиндр, ось которого перпендикулярна к пл. π_1 , и конус при таком же положении его оси. Горизонтальная проекция точки пересечения прямой AB , перпендикулярной к пл. π_1 , с боковой поверхностью прямого кругового конуса совпадает с горизонтальной проекцией

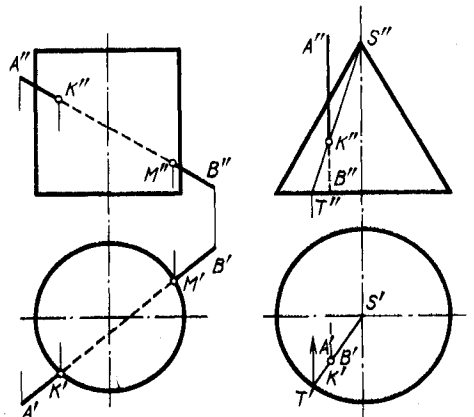


Рис. 387

самой прямой. Проведя горизонтальную проекцию образующей ST и построив ее фронтальную проекцию $S''T''$, находим фронтальную проекцию K'' искомой точки.

Вспомогательную плоскость, проводимую через прямую при пересечении ею какой-либо поверхности, следует выбирать так, чтобы получились простейшие сечения.

Например, при пересечении конической поверхности прямой линией такой плоскостью является плоскость, проходящая через вершину и, следовательно, пересекающая эту поверхность по прямым линиям. При пересечении цилиндрической поверхности прямой линией целесообразно проводить вспомогательную плоскость через данную прямую параллельно образующим этой поверхности; при пересечении так проведенной плоскости с цилиндрической поверхностью получаются прямые линии.

Пример с конусом дан на рис. 388, где точки пересечения найдены при помощи пл. α , определяемой вершиной конуса и данной прямой.

Для построения образующих, по которым пл. α пересекает конус, надо найти еще по одной точке для каждой образующей, кроме точки S . Эти точки могут быть

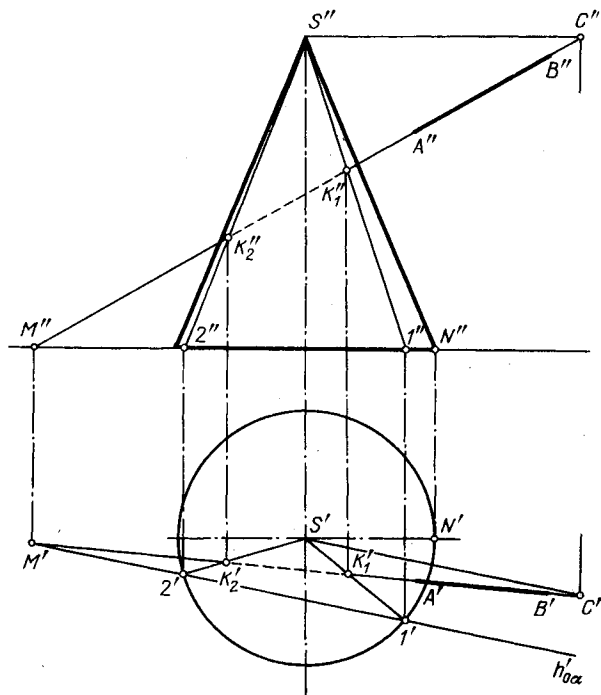


Рис. 388

найжены в пересечении следа пл. α , полученного на плоскости основания конуса, с окружностью этого основания. На рис. 388 плоскость основания конуса принята за плоскость проекций π_1 ; поэтому след плоскости обозначен $h'_{0\alpha}$. Для его построения взята вспомогательная прямая SC — горизонталь пл. α и найден горизонтальный след прямой AB . След $h'_{0\alpha}$ проходит через точку M' параллельно проекции $S'C'$. Через точки $1'1''$ и $2'2''$ пройдут искомые образующие. Точки K_1 и K_2 являются точками входа и выхода при пересечении прямой AB с поверхностью конуса.

Если дан усеченный конус (рис. 389), а фронтальную проекцию вершины нельзя построить, то можно взять точку N'' как фронтальную проекцию точки пересечения данной прямой AM_1 с некоторой вспомогательной прямой, проходящей через вершину S ; найдя проекцию N' , строим горизонтальную проекцию вспомогательной прямой SM_2 (используя точку S'). Дальнейшее ясно из чертежа.

На рис. 390 показано построение точек K и M , в которых отрезок AB пересекает сферу радиуса R . Применен способ перемены плоскостей проекций.

Прежде всего через AB проведена горизонтально-проецирующая пл. π_3 (след на пл. π_1 совпадает с проекцией $A'B'$). Она пересекает сферу по окружности, радиус которой R_1 равен отрезку $C'I'$. Принимая эту же пл. π_3 за дополнительную плоскость проекций, образующую с пл. π_1 систему π_3, π_1 , строим проекцию $A'''B'''$ отрезка

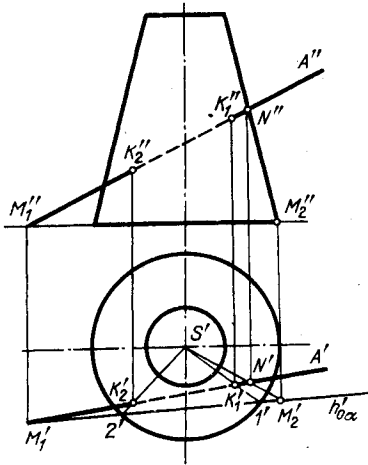


Рис. 389

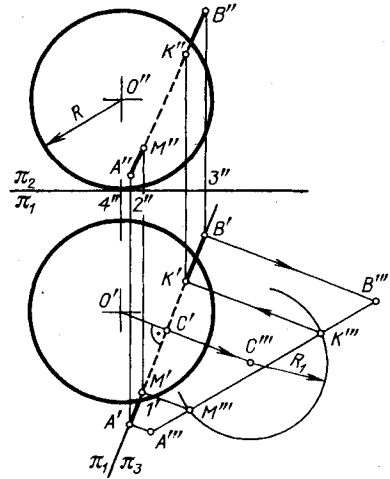


Рис. 390

AB ($A'A''' = A'2''$, $B'B''' = B'3''$) и проекцию окружности, по которой плоскость π_3 пересекает сферу. Проекцию центра C''' находим, откладывая $C'''C' = O'4''$, и из C''' проводим радиусом R_1 дугу так, чтобы получить точки K''' и M''' (проведение радиусом R_1 окружности целиком излишне). По этим точкам сначала находим проекции K' и M' , а по ним — проекции K'' и M'' .

Еще один пример построения точек пересечения прямой линии с поверхностью, ограничивающей некоторое тело вращения, дан на рис. 391. Помимо двух плоскостей, тело ограничено двумя цилиндрическими поверхностями вращения и переходной между ними частью — поверхностью кругового кольца. В точке K_1 прямая пересекает цилиндрическую поверхность и далее пересекает в точке K_2 поверхность кругового кольца. Для построения проекций этой точки найдена кривая с проекциями $1'2'3'$, $1''2''3''$, полученная при пересечении поверхности кольца плоскостью β , проведенной через прямую AB перпендикулярно к пл. π_1 . Кривая построена по точкам при помощи параллелей; на рисунке показаны две, отмеченные точками M и N . Далее, прямая вновь пересекает поверхность кольца в точке K_3 и выходит за пределы поверхности через точку K_4 .

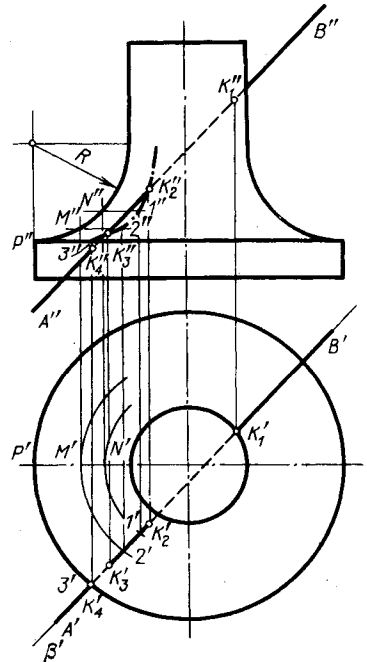


Рис. 391

Теперь обратим внимание на построение, показанное на рис. 392. Здесь изображен наклонный цилиндр с круговым основанием. Для построения точек пересечения поверхности цилиндра

ра прямой линией AB проводим пл. α , определяемую, помимо прямой AB , дополнительной прямой BM_1 , проведенной через точку B параллельно образующим цилиндра. Такая плоскость пересекает цилиндр по его образующим. Если найти горизонтальные следы прямых, определяющих плоскость, то может быть проведен горизонтальный след пл. α . Отметив точки $1'$ и $2'$ в пересечении следа $h'_{0\alpha}$ с основанием цилиндра (оно расположено в пл. π_1), проводим через эти точки прямые параллельно горизонтальной проекции образующей цилиндра и отмечаем точки K'_1 и K'_2 — горизонтальные проекции точек пересечения прямой AB с поверхностью цилиндра. Далее находим точки K''_1 и K''_2 .

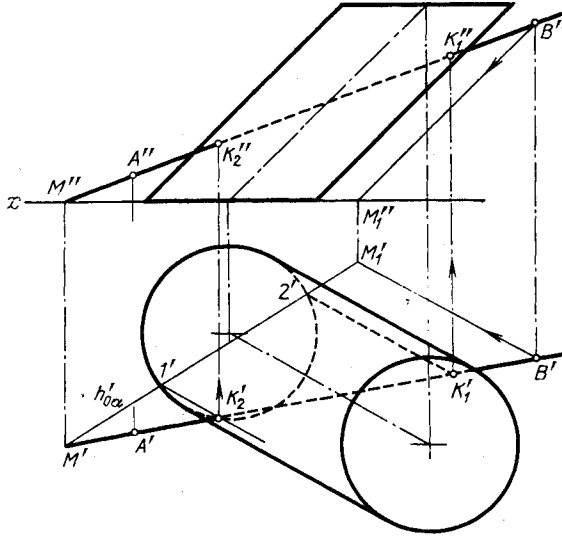


Рис. 392

Такое построение можно также представить как косоугольное проецирование цилиндра и прямой AB на плоскость проекций π_1 . Проецирование проводится по направлению, параллельному образующей цилиндра. Точка M прямой AB расположена в пл. π_1 ; точка M_1 является косоугольной проекцией точки B , построенной на пл. π_1 . Прямая $M'M_1$ является косоугольной проекцией прямой AB на пл. π_1 . Цилиндр же проецируется на эту плоскость в свое основание. Дальнейшее ясно из чертежа.

При решении задачи на пересечение поверхности прямой линией может оказаться, что данная прямая не пересекает, но лишь касается кривой, ограничивающей фигуру, получаемую при пересечении данной поверхности плоскостью, проведенной через прямую. В этом случае прямая является касательной к данной поверхности. Вообще, если требуется определить, как прямая расположена относительно поверхности, надо через прямую провести плоскость, пересекающую поверхность, и рассмотреть взаимное положение прямой и фигуры, полученной при пересечении поверхности плоскостью.

В данном параграфе рассмотрен вопрос о построении точек, получаемых при пересечении кривой поверхности прямой линией. Общим приемом является: 1) проведение через заданную прямую некоторой плоскости, 2) построение линии пересечения поверхности этой плоскостью, 3) нахождение точек пересечения построенной линии с заданной прямой.

А как надо поступать, если некоторая поверхность должна быть пересечена не прямой линией, а какой-либо плоской кривой? Очевидно, изложенный прием применим и в этом случае, причем плоскостью, проводимой через линию, здесь служит плоскость, в которой лежит сама плоская кривая.

ВОПРОСЫ К §§ 58–59

1. Какая линия получается при пересечении сферы любой плоскостью и какими могут быть проекции этой линии?
2. В чем заключается способ построения сечения тора плоскостью?
3. Как должны быть направлены плоскости, рассекающие тор по окружностям?
4. Как называются кривые, получаемые при пересечении тора плоскостью, параллельной оси тора? В каком случае эти кривые становятся овалами Кассини и в каком случае получается лемниската Бернулли?
5. Что понимается под названием «кривая среза»?
6. В чем заключается общий прием построения точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью?
7. Как провести вспомогательную секущую плоскость при пересечении конуса прямой линией, чтобы получить на поверхности конуса прямые линии?
8. Можно ли применить косоугольное проецирование в случае пересечения прямой линией цилиндра, образующие которого не перпендикулярны к плоскости проекций?