§ 63. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДРУГОЮ

1. На рис. 400 изображены пересекающиеся между собой: а) два цилиндра с параллельными образующими, б) два конуса с общей вершиной. В обоих случаях линиями пересечения поверхностей являются общие образующие этих поверхностей.

Положим, что надо построить проекции прямой, проходящей через точку B на оси проекций и расположенной под углом φ_1 по отношению к пл. π_1 и под углом φ_2 к пл. π_2. Известно, что для прямой общего положения $\varphi_1 + \varphi_2 < 90°$ (см. § 13).

Геометрическим местом прямых, проходящих через данную точку и составляющих с пл. π_1 угол φ_1, является коническая поверхность вращения, вершина которой находится в данной точке, а образующие составляют с пл. π_1 угол φ_1.

Точно так же геометрическим местом прямых, проходящих через данную точку и составляющих с пл. π_2 угол φ_2, является коническая поверхность вращения, вершина которой находится в данной точке, а образующие составляют с пл. π_2 угол φ_2.

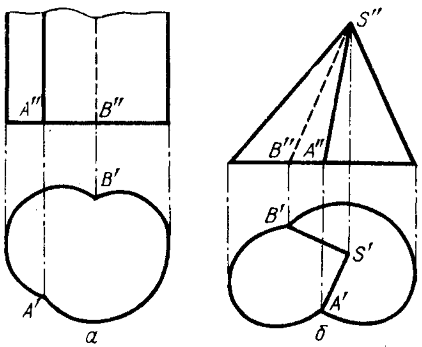

Рис. 400

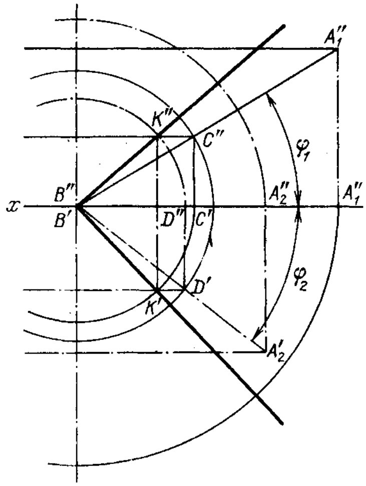

Рис. 401

Очевидно, искомая прямая должна одновременно принадлежать поверхностям обоих конусов, имеющих общую вершину в данной точке, т. е. должна быть линией их пересечения – общей их образующей. Мы получим восемь лучей, выходящих из точки B, отвечающих поставленным условиям (четыре прямых).

На рис. 401 выполнено построение одного из этих лучей. Первый конус определяется образующей BA_1 и осью, перпендикулярной к пл. π_1, а второй конус – образующей BA_2 и осью, перпендикулярной к пл. π_2. Для построения искомой прямой имеется пока лишь точка B – общая вершина конусов. Вторую точку – точку K – общую для поверхностей этих конусов, мы находим при помощи сферы с центром в точке B (см. дальше рис. 415).

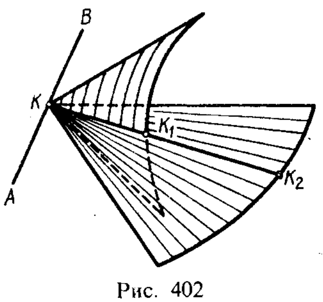

Рис. 402

Другим примером, когда в процессе некоторого построения используется свойство пересечения двух конических поверхностей с общей вершиной по общей для них прямой линии – образующей, служит построение образующих линейчатой поверхности, называемой цилиндром с тремя направляющими (об этой поверхности см. § 50, раздел Б, пункт 2.2). Положим (рис. 402), что в числе направляющих одна прямая AB и две кривые линии. Если взять точку (K) на прямой направляющей и принять ее в качестве общей вершины вспомогательных конических поверхностей, для которых данные кривые служат направляющими, то прямая пересечения этих конических поверхностей, проходя через их вершину, пересечет и их направляющие, т. е. окажется прямолинейной образующей цилиндра с тремя направляющими. Очевидно, надо взять ряд точек заданной прямой и выполнить для каждой из них указанное построение, что даст ряд образующих цилиндра с тремя направляющими.

Если для этой поверхности все три направляющие кривые, то указанный способ построения остается таким же: точки, служащие вершинами для вспомогательных конических поверхностей, берутся на одной из данных кривых.

2. При взаимном пересечении поверхностей вращения второго порядка получается в некоторых случаях распадение линии пересечения на две плоские кривые второго порядка. Это бывает в тех случаях, когда обе пересекающиеся поверхности вращения (цилиндр и конус, два конуса, эллипсоид и конус и т. п.) описаны вокруг общей для них сферы. В примерах, приведенных на рис. 403, в первых трех случаях

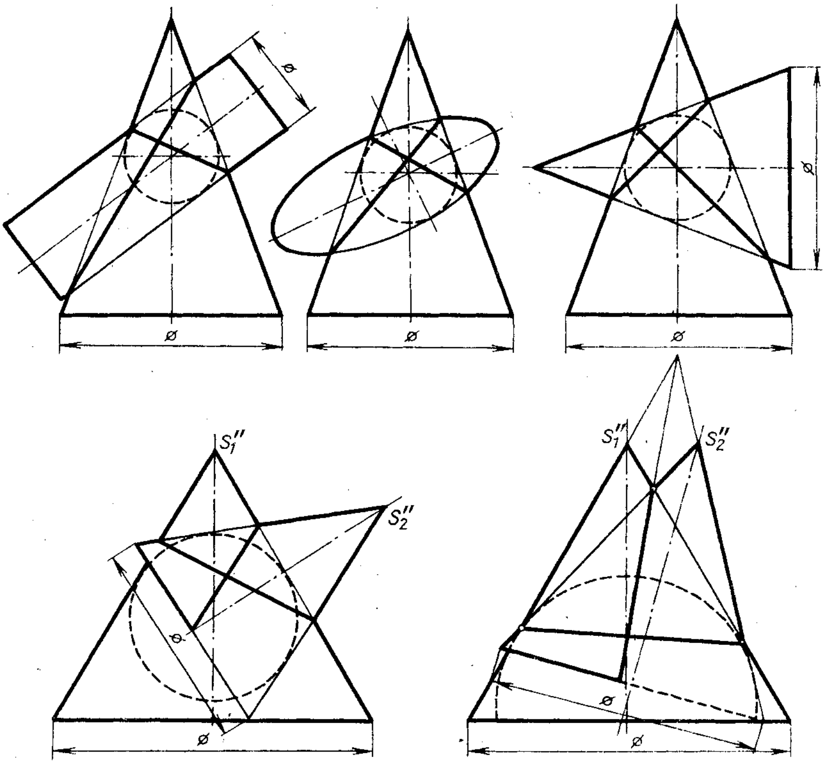

Рис. 403

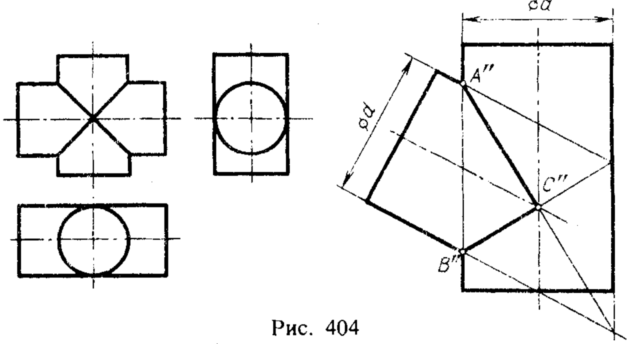

Рис. 404

пересечение происходит по эллипсам, в четвертом – по эллипсу и параболе, а в пятом – по эллипсу и гиперболе.

На рис. 404 показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися осями. Из точки пересечения осей может быть проведена сфера, вписанная в оба цилиндра. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов. На рис. 404 справа также изображены два цилиндра равного диаметра, но их оси пересекаются на этот раз не под прямым углом. Линия пересечения составлена из половин двух эллипсов.

Изображенные на рис. 403 и 404 кривые пересечения поверхностей проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков, так как общая плоскость симметрии для каждой пары рассмотренных поверхностей расположена параллельно пл. π_2.

В рассмотренных примерах имеет место *двойное соприкосновение* двух пересекающихся поверхностей второго порядка, т. е. наличие у этих поверхностей двух точек прикосновения, а следовательно, и двух плоскостей, каждая из которых касается обеих поверхностей в общей их точке. Приведем без доказательств[1]) следующие два положения, на которых основаны указанные выше построения: 1) *поверхности второго порядка, имеющие двойное соприкосновение, пересекаются между собой по двум кривым второго порядка, причем плоскости этих кривых проходят через прямую, определяемую точками прикосновения;* 2) *две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка* (*или в нее вписанные*[2])), *пересекаются между собой по двум кривым второго порядка.* Второе положение, известное под названием *теоремы Монжа*, вытекает из первого.

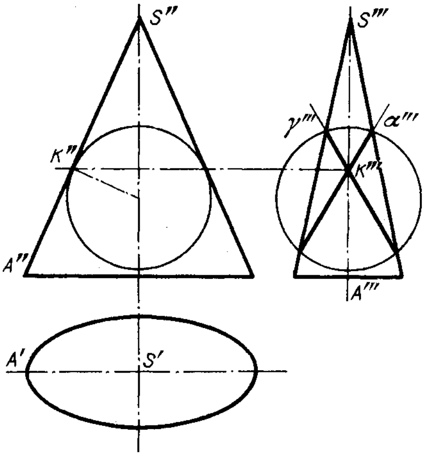

Рис. 405

На основании изложенного можно найти круговые сечения эллиптического конуса и эллиптического цилиндра (см. с. 141). Пример дан на рис. 405. Взята некоторая сфера так, чтобы она имела двойное соприкосновение с поверхностью эллиптического конуса. В пересечении сферы с конусом получаются две плоские кривые – окружности в профильно-проецирующих плоскостях γ и α (показаны профильные следы этих плоскостей). Плоскости, параллельные плоскостям γ и α, дают две системы круговых сечений эллиптического конуса.

3. Соосные поверхности вращения (т. е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. На рис. 406 даны три примера: а) цилиндр и конус,

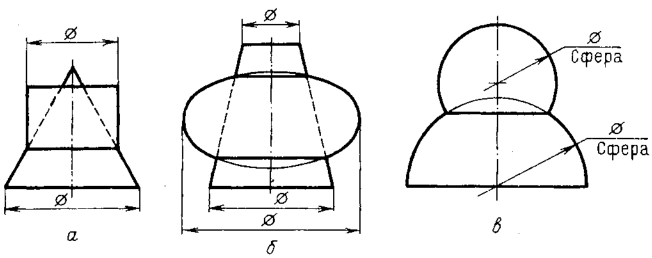

Рис. 406

б) сжатый эллипсоид и усеченный конус, в) две сферы. Во всех этих примерах даны лишь фронтальные проекции, причем общая ось поверхностей расположена параллельно пл. π_2. Поэтому окружности, получаемые при пересечении одной поверхности другою, проецируются на π_2 в виде прямолинейных отрезков.

---

[1]) См. в курсах аналитической геометрии.

[2]) Например, два сжатых эллипсоида вращения, вписанных в сферическую поверхность.

За ось сферы можно принять любой ее диаметр. Поэтому пересекающиеся сферы рассматриваются как соосные поверхности вращения. Также в качестве соосных поверхностей могут быть рассмотрены изображенные на рис. 407 цилиндр и сфера, конус и сфера, некоторая поверхность вращения и сфера. Оси цилиндра,

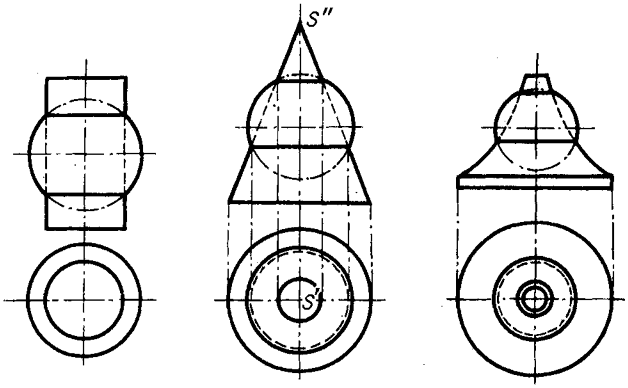

Рис. 407

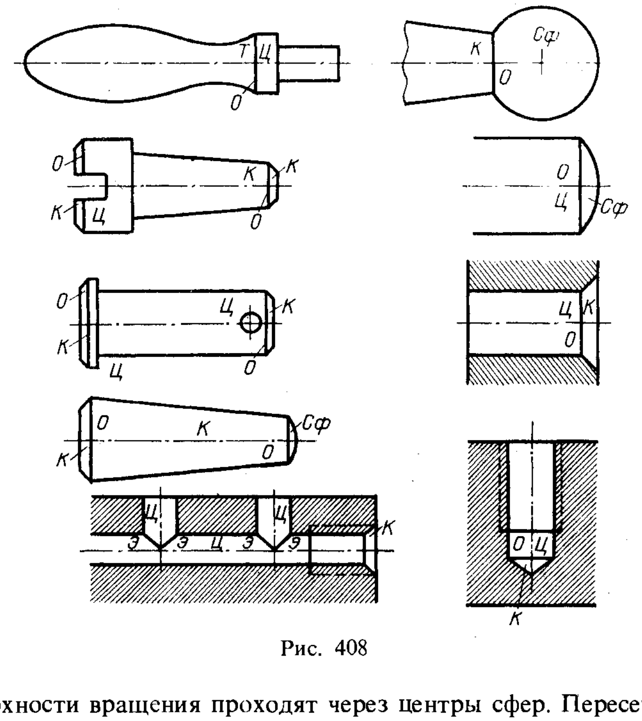

Рис. 408

конуса и поверхности вращения проходят через центры сфер. Пересечение происходит по окружностям.

На рис. 408 даны примеры изображения соосных поверхностей вращения и встречных сверлений одного и того же диаметра из практики машиностроительного черчения. Поверхности обозначены буквами: *Т* – круговое кольцо, *К* – конус, *Ц* – цилиндр, *Сф.* – сфера; полученные в пересечении линии обозначены буквами: *О* – окружность, *Э* – эллипс. Эти линии проецируются в виде прямолинейных отрезков, так как оси поверхностей параллельны плоскости проекций (в данном случае пл. π_2).