

§ 64. ПРИМЕНЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ СФЕР

Рассмотренное в § 63 пересечение поверхностей вращения со сферой лежит в основе применения сфер в качестве вспомогательных поверхностей при построении линии пересечения одной поверхности другою.

На рис. 409 даны две поверхности вращения с пересекающимися осями и, следовательно, с общей плоскостью симметрии, параллельной пл. π_2 . Из точки пересечения осей можно провести ряд сфер. Положим, проведена сфера, обозначенная на рис. 409 *Сф.1*. Эта сфера пересекается по окружностям с каждой из поверхностей; в пересечении окружностей получают точки, общие для обеих поверхностей и,

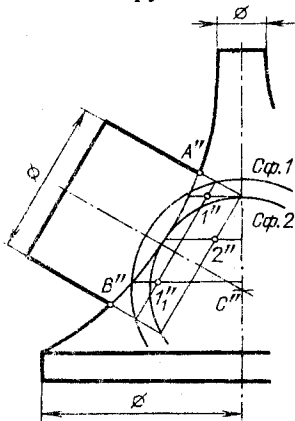


Рис. 409

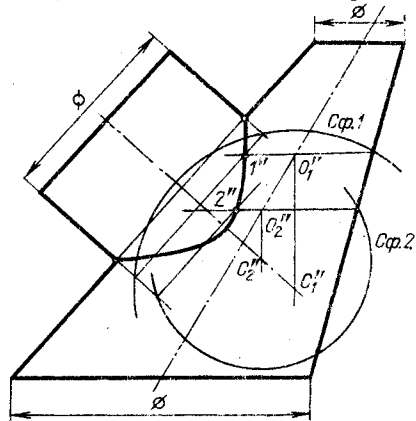


Рис. 410

следовательно, принадлежащие линии пересечения. Как видно из рисунка, построение весьма упрощается вследствие того, что плоскость симметрии, общая для данных поверхностей, параллельна плоскости проекций (в данном случае пл. π_2): окружности, по которым сфера пересекает одновременно две поверхности, проецируются на пл. π_2 в виде прямолинейных отрезков. Кроме того, проекция линии пересечения строится без помощи других проекций поверхностей.

Конечно, проводится несколько сфер, чтобы получить достаточно точек для проведения искомой проекции линии пересечения. На рис. 409 показана еще одна сфера — *Сф.2*; она лишь касается поверхности с криволинейной образующей и дает на рассматриваемой проекции точку $2''$, «последнюю» для фронтальной проекции: сферы меньшего диаметра не дадут точек для искомой линии.

Теперь остается провести через точки A'' , $1''$, $2''$, $1'$ и B'' кривую — фронтальную проекцию линии соединения обеих поверхностей (рассматривая их как одно целое).

Как видно, все построение выполнено лишь на одной проекции.

Итак, если надо построить линию пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются, то можно применять вспомогательные секущие сферы с центром в точке пересечения осей поверхностей.

На рис. 410 дан другой пример применения сфер в построении, аналогичном показанному на рис. 409. На этот раз лишь одна из них — поверхность вращения, другая же — наклонный круговой конус (см. § 50); он имеет ряд круговых параллельных между собой сечений.

Каждое такое сечение может быть принято за параллель сферы, центр которой берется на оси поверхности цилиндра. Например, взяв параллель с центром O_1 (проекция O_1''), проведем через O_1 перпендикуляр к плоскости параллели до пересечения с осью цилиндра. Точка C_1 (проекция C_1'') принимается за центр сферы, пересекающей каждую из поверхностей по окружностям — поверхности конуса по взятой параллели с центром O_1 , поверхность цилиндра по окружности, получаемой при ее «надвигании» на сферу. В результате на рассматриваемой проекции (фрон-

тальной) получается точка $1''$, принадлежащая проекции искомой линии пересечения. Аналогично может быть найден центр C_2 (проекция C_2'') для проведения сферы по выбранной параллели с центром в точке O_2 (проекция O_2''). Дальнейшее ясно из чертежа.

Итак, вспомогательные сферы можно применять и в случаях пересечения поверхности вращения с поверхностью, имеющей параллельные между собой круговые сечения, центры которых лежат на одной линии, пересекающей ось поверхности вращения.

На рис. 411 показано построение линии соединения поверхности цилиндра вращения и сферы (образующая AB цилиндра касается сферы в точке B). Эти поверхности имеют общую для них плоскость симметрии, параллельную пл. π_2 . Центр одной вспомогательной сферы ($Cф.1$) взят в точке с фронтальной проекцией C_1'' . Радиус этой сферы взят равным отрезку $C_1''I_1''$ (в данном случае это наименьший радиус для вспомогательных сфер); он является и радиусом окружности, по которой происходит касание вспомогательной $Cф.1$ с поверхностью цилиндра. Эта сфера пересекает заданную сферу радиуса R по окружности с диаметром $1_2''1_3''$. В пересечении прямых $1_2''1_3''$ и $C_1''I_1''$ получается точка $1''$ — одна из точек, принадлежащих проекции искомой линии соединения поверхностей цилиндра и сферы.

Вторая вспомогательная сфера ($Cф.2$) проведена из точки, также взятой на оси цилиндра (проекция C_2''). Эта сфера дает точку $2''$. Получив еще несколько точек между крайними точками B'' и C'' , можно провести фронтальную проекцию искомой линии. В точке $1''$, полученной при помощи «предельной» сферы (вписанной в цилиндр), прямая $1_2''1_3''$ является касательной и кривой $B''1''2''C''$.

На рис. 412 показано пересечение двух конусов вращения. Их оси в своем пересечении образуют общую для этих конусов плоскость симметрии, параллельную пл. π_2 .

В данном случае применены вспомогательные сферы, проводимые из одного и того же центра — точки O пересечения осей конусов. Так, для нахождения точки 1 проведена сфера радиуса r .

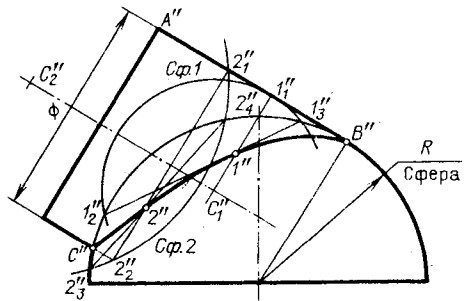


Рис. 411

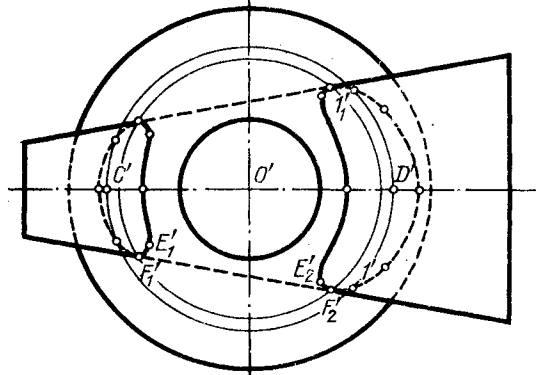
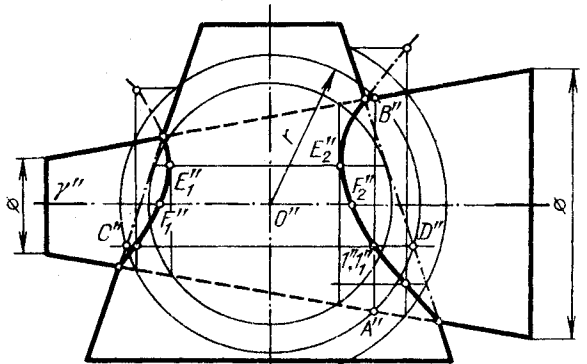


Рис. 412

На рис. 412 показано пересечение двух конусов вращения. Их оси в своем пересечении образуют общую для этих конусов плоскость симметрии, параллельную пл. π_2 .

В данном случае применены вспомогательные сферы, проводимые из одного и того же центра — точки O пересечения осей конусов. Так, для нахождения точки 1 проведена сфера радиуса r .

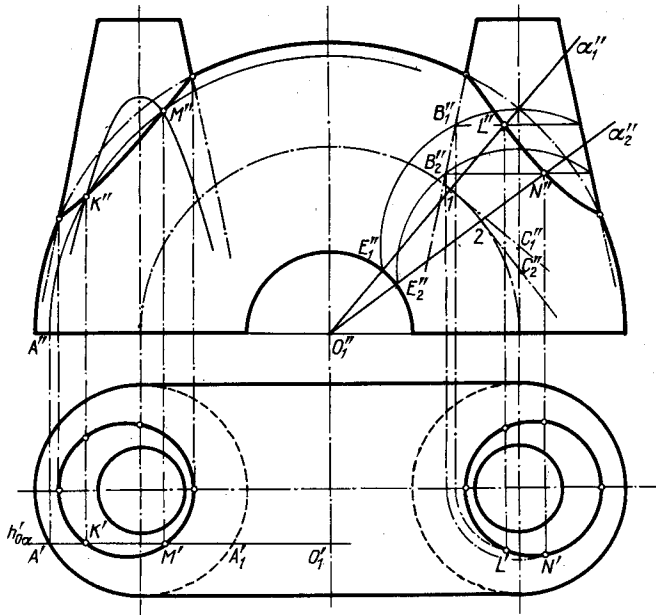


Рис. 414

определяются проекции точек на пл. π_2 , а затем на пл. π_1 . Например, точка 5 на пл. π_1 определена на дуге окружности, проведенной из точки O' радиусом $O'A' = O''A''$; точка 5_1 получена на дуге радиуса $O'A'_1 = O''_1A''_1$. Точка с проекциями $4''$ и $4'$ найдена при помощи сферы, вписанной в поверхность вращения с криволинейной образующей.

Точки на пл. π_3 найдены обычным построением третьей проекции по двум, определенным на плоскостях π_1 и π_2 . Для экономии места на рис. 413 все три вида даны не полностью.

Пример, приведенный на рис. 414, позволяет установить преимущество способа вспомогательных сфер перед другими для данного случая. Требуется построить проекции линии соединения поверхностей конуса вращения и кругового кольца (на рис. 414 изображена половина кольца). В левой части чертежа показано применение вспомогательных секущих плоскостей, параллельных оси конуса. Эти плоскости рассекают поверхность конуса по гиперболам, которые приходится строить по точкам, а кольцо — по полуокружностям радиусов $O'_1A'_1$ и $O''_1A''_1$. Например, построив на фронтальной проекции гиперболу — линию пересечения конической поверхности плоскостью α , проводим дугу окружности радиуса $O''_1A'' = O'_1A'_1$, находим точки K'' и M'' на фронтальной проекции и соответствующие им горизонтальные проекции K' и M' .

Приходится строить ряд гипербол, что усложняет решение и уменьшает точность. Неудобно было бы пользоваться и плоскостями, перпендикулярными к оси конуса, так как эти плоскости при указанном на рис. 414 расположении кольца будут пересекать его поверхность по некоторым кривым; для построения каждой из них придется находить ряд точек (см. § 58). Также и плоскости, проходящие через вершину конуса, дадут в пересечении с поверхностью кольца кривые, которые придется строить по точкам.

Построение упрощается и уточняется, если применить вспомогательные сферы, центры которых должны быть на оси конуса. Сферы надо подбирать так, чтобы они пересекали кольцо по окружностям. Получить это можно следующим образом.

Возьмем плоскость α_1 , проходящую через ось кольца и перпендикулярную к пл. π_2 . Она пересечет кольцо по окружности радиуса $1E''_1$ с центром в точке 1 ; на

пл. π_2 эта окружность проецируется в виде отрезка прямой. Где должны находиться центры сфер, которые можно провести через эту окружность? Очевидно, они лежат на прямой, проходящей через центр окружности 1 и перпендикулярной к пл. α_1 . Эта прямая на фронтальной проекции изображается линией $1C''$, перпендикулярной к α_1 (и, следовательно, касательной к осевой окружности кольца, изображенной на рисунке штрихпунктирной линией).

Итак, мы должны провести сферу, центр которой лежит, во-первых, на оси конуса, а во-вторых, на прямой $1C''$. Такой центр C''_1 вполне определяется двумя этими прямыми, и мы можем провести сферу с центром C''_1 и радиусом $C''_1E''_1$; на пл. π_2 показана часть проекции сферы – дуга окружности. В пересечении сферы с конусом получается окружность, проецирующаяся в виде отрезка, проходящего через точку B''_1 ; пересечение же с кольцом – по указанной выше окружности, проецирующейся в виде отрезка на следе α''_1 . В пересечении этих прямых и найдена точка L'' – проекция одной из точек искомой линии.

Аналогично, при помощи пл. α_2 и точек $2, C''_2, B''_2, E''_2$ найдена точка N'' . Для построения горизонтальных проекций этих точек можно использовать параллели конической поверхности, как показано для точек L' и N' .

Можно представить себе, что прямые C''_11 и C''_22 являются осями некоторых цилиндров, нормальное сечение которых совпадает с нормальным сечением кольца. Если взять точки 1 и 2 весьма близко друг к другу и представить себе, что таких точек весьма много, а следовательно, много проведенных через эти точки осей и много цилиндров, то поверхность кольца окажется замененной последовательно расположенными цилиндрическими поверхностями. Поэтому задача сведется к нахождению точек, общих для поверхности конуса и поверхности каждого такого «мгновенного цилиндра»¹⁾. Оси «мгновенных цилиндров» пересекают ось конуса в точках, которые принимаются за центры вспомогательных сфер, пересекающих конус и «мгновенный цилиндр» по окружностям; проекции этих окружностей на пл. π_2 представляют собой отрезки прямых линий. Окружности, по которым вспомогательные сферы пересекают «мгновенные цилиндры», являются теми нормальными сечениями кольца, от которых и началось построение.

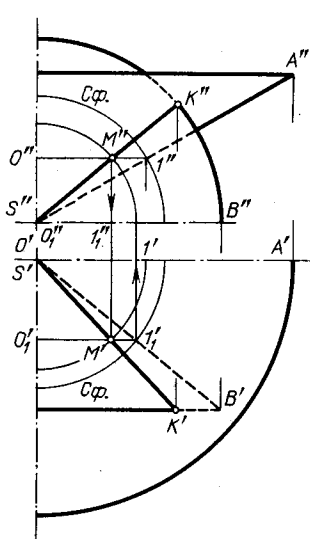


Рис. 415

На рис. 415 изображены частично два конуса вращения с общей вершиной S и показано построение той образующей, по которой пересекаются конические поверхности в изображенных их частях. Одна точка искомой образующей известна: это вершина S . Для нахождения второй точки применена вспомогательная сфера с центром в точке S . Сфера пересекает одну из конических поверхностей по дуге окружности, радиус которой равен $O'1'$ или $O''1''$. Вторую из поверхностей сфера пересекает по дуге окружности с радиусом, равным O_1I_1' или O_1I_1'' . Фронтальные проекции этих дуг пересекаются в точке M'' , а горизонтальные – в точке M' ; точки M'' и M' являются проекциями точки M – второй точки для искомой образующей.

Такое построение было использовано на рис. 401.

¹⁾ Мы применили выражение «мгновенный цилиндр», чтобы подчеркнуть замену поверхности кольца очень большим числом цилиндрических элементов. Практически производится лишь несколько таких построений.