## § 65. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТЬ, ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ ИХ ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

В ряде случаев имеет место пересечение одной поверхности вращения второго порядка другою. При этом, как и для всех алгебраических поверхностей второго порядка, получается пространственная кривая четвертого порядка, называемая *биквадратной*.

В сноске на с. 208 было сказано, что если две поверхности второго порядка имеют общую для них плоскость симметрии, то получаемая кривая пересечения этих поверхностей проецируется на плоскость, параллельную их плоскости симметрии, в виде кривой второго порядка. На рис. 412, к которому относилась эта сноска, были представлены два конуса вращения с пересекающимися осями, определявшими общую для этих конусов плоскость симметрии, параллельную пл. $\pi_2$. Фронтальная проекция полученной при этом биквадратной кривой представляла собой гиперболу.

На рис. 416 дана[1]) фронтальная проекция двух цилиндров вращения (*Ц1* и *Ц2*) разных диаметров. Точка $O''$ – фронтальная проекция точки пересечения осей цилиндров.

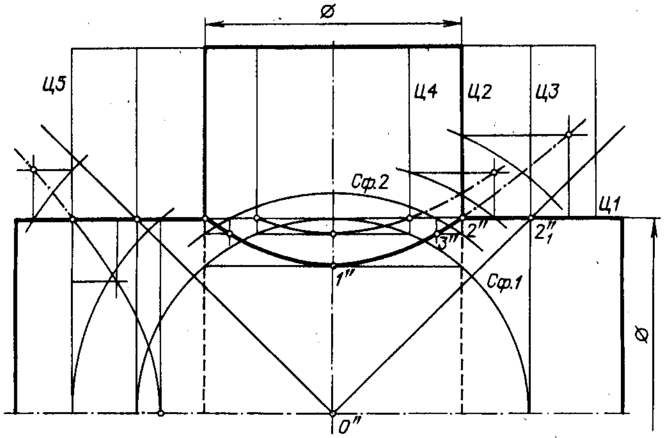


Рис. 416

Фронтальная проекция получаемой биквадратной кривой представляет собой равностороннюю гиперболу (одну ее ветвь) с центром в точке $O''$. Для построения применены сферы с общим центром в точке пересечения осей цилиндров. Сфера (*Сф.1*), вписанная в цилиндр большего диаметра, позволяет найти точку $1''$ – вершину гиперболы. Сферы с бо́льшим радиусом дают другие точки искомой проекции кривой (например, сфера *Сф.2*, точка $3''$); если при этом радиус больше отрезка $O''2''$, то получаются точки вне общей площади проекций обоих цилиндров.

На рис. 416 проведены асимптоты построенной гиперболы; они проходят через точку $O''$ и взаимно перпендикулярны. Эти асимптоты сохраняют свое значение для всех гипербол, получаемых на рис. 416, если брать, например, цилиндры с вертикальной осью разных диаметров (*Ц4*, *Ц5*). Если же у цилиндров диаметры одинаковы (*Ц1* и *Ц3*), т. е. эти цилиндры имеют общую для них вписанную сферу (*Сф.1*), то фронтальная проекция линии пересечения на рис. 416 (см. раньше рис. 404) представляет собой две пересекающиеся под прямым углом прямые, положение которых (например, $O''2''_1$) соответствует положению асимптот.

Если оси цилиндров пересекаются под острым углом (рис. 417), то проекция линии пересечения при тех же условиях, что и в случае, рассмотренном на рис. 416, представляет собой

[1]) В этом и в ряде последующих случаев ради экономии места и без ущерба для ясности изображения дается лишь часть проекции.

также равностороннюю гиперболу. Точки для этой проекции строятся по способу вспомогательных сфер, и в этом отношении между случаями, изображенными на рис. 417 и 416, различия нет. Обратим лишь внимание на то, что точка *4″*, получаемая при помощи сферы (*Сф.1*), вписанной в большой цилиндр, не является вершиной гиперболы, как это было на рис. 416.

Особенности же в построении на рис. 417 следующие. Для определения положения асимптот построен ромб *5 – 6 – 7 – 8*, стороны которого касательны к некоторой окружности и параллельны образующим цилиндра. Диагонали этого ромба дают направления асимптот. Отсюда асимптоты взаимно перпендикулярны и гипербола равносторонняя.

Проведя биссектрису угла между асимптотами, получаем действительную ось гиперболы; на этой оси должна быть вершина – точка *1″*. Чтобы ее найти, выполняем следующее

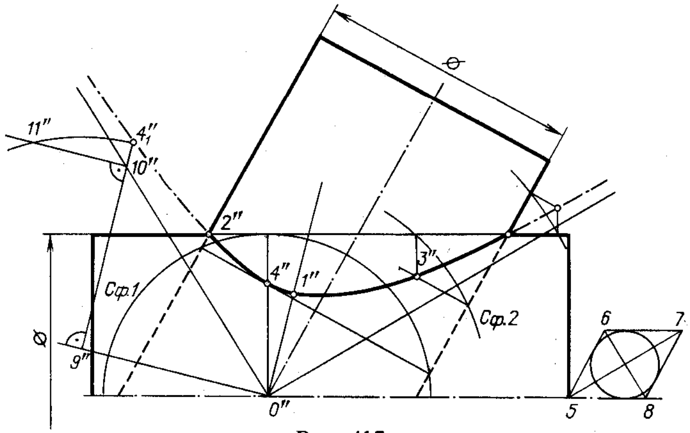


Рис. 417

построение: взяв какую-нибудь точку гиперболы, например $4_1''$, проводим через нее перпендикуляр к мнимой оси гиперболы и отмечаем точки *9″* и *10″*, в которых этот перпендикуляр пересекает мнимую ось и асимптоту; далее проводим радиусом $9'' - 4_1''$ дугу, засекая ею в точке *11″* перпендикуляр, проведенный из точки *10″* к прямой $9'' - 4_1''$. Полученный отрезок *10″11″* выражает расстояние от *О″* до *1″*, т. е. до вершины гиперболы – действительную ее полуось.

У изображенных на рис. 418 поверхностей вращения линия их пересечения проецируется на пл. $\pi_2$, параллельную общей плоскости симметрии этих поверхностей, в виде гиперболы (ее асимптоты параллельны диагоналям *1 – 3* и *2 – 4* трапеции, стороны которой соответственно параллельны образующим данных поверхностей и касаются некоторой окружности). Но в данном случае имеется еще плоскость симметрии, перпендикулярная к оси конической поверхности, – горизонтальная, проходящая через ось цилиндра. И на этой плоскости проекция линии пересечения рассматриваемых поверхностей должна быть кривой второго порядка. Получается замкнутая с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии кривая – *эллипс*. Его большая полуось *О′В′* равна отрезку *В″5″*, малая полуось *О′А′* равна отрезку *А″6″*, т. е. радиусу той параллели сферы (*Сф.1*), на которой находится точка *А*.

Гипербола, полученная на рис. 418, неравносторонняя: ее асимптоты составляют углы, не равные 90°. Так и на рис. 419, где тоже построена гипербола как проекция линии пересечения цилиндром поверхности конуса, гипербола неравносторонняя. Это характерно для случаев взаимного пересечения конической и цилиндрической поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии, когда линия пересечения проецируется на плоскость, параллельную плоскости симметрии[1]).

На рис. 419 центром для вспомогательных сфер служит точка *О*, фронтальная проекция *О″* которой находится в точке пересечения осей конической и цилиндрической поверхностей. Вписанная в коническую поверхность сфера (*Сф.1*) дает возможность получить положение действительной оси, центр и вершины гиперболы. Асимптоты получены как диагонали трапеции *5″6″7″8″*, в которой стороны *5″6″* и *7″8″* параллельны образующей цилиндра и касаются окружности «*Сф.1*».

---

[1]) По исследованию Е. А. Глазунова «О проекциях линии пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии», опубликованному в сборнике «Труды московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике» в 1958 г.

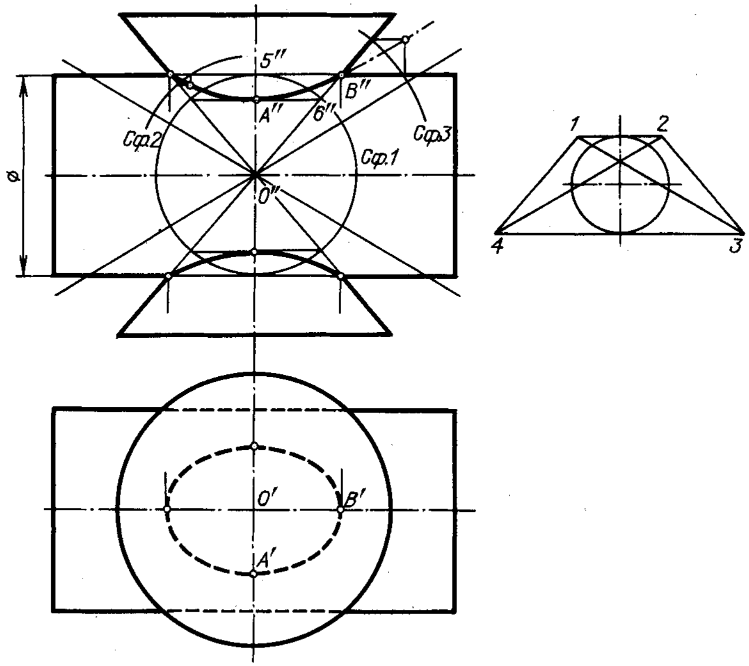


Рис. 418

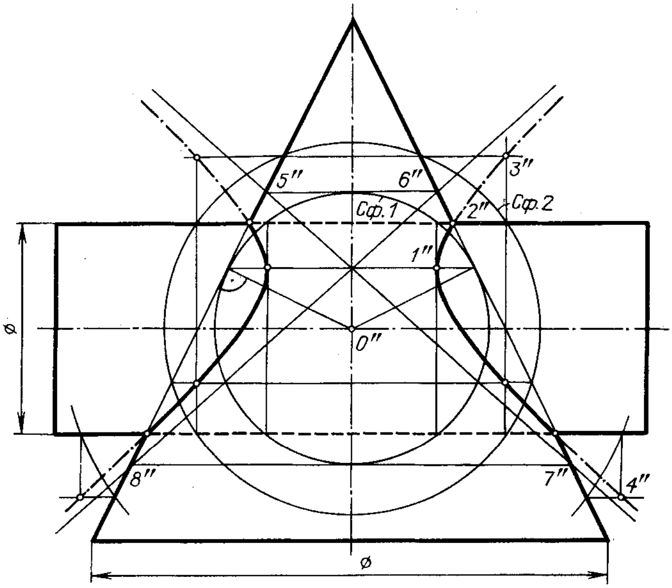


Рис. 419

Итак, на рис. 416 и 417 проекции линии пересечения представляют собой равностороннюю гиперболу, в то время как на рис. 418 и 419 также получались гиперболы, но неравносторонние. Неравносторонняя гипербола получилась и в случае, показанном на рис. 420, где построена проекция линии пересечения одной конической поверхности вращения другою.

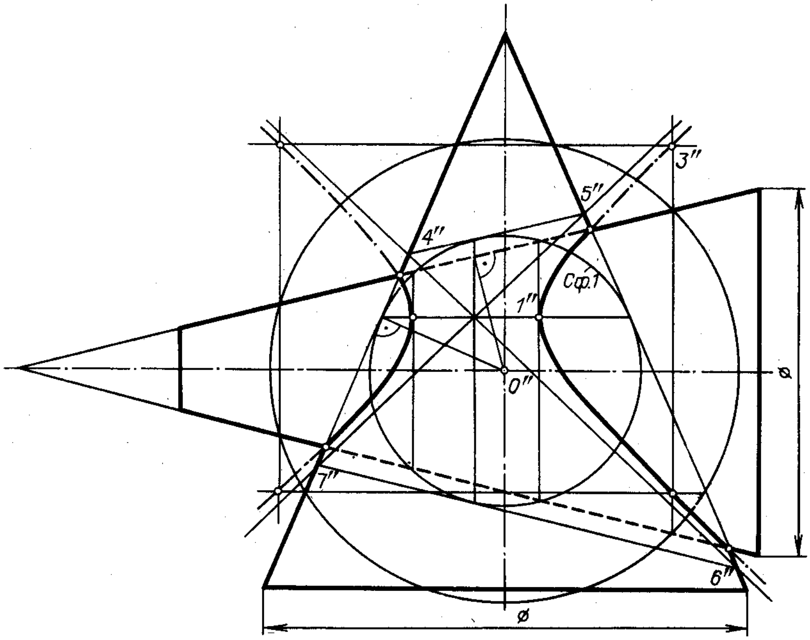


Рис. 420

Здесь вписанная в конус с бо́льшим углом при его вершине сфера (*Сф.1*) дает возможность получить положение действительной оси, центр и вершины гиперболы. Асимптоты построены как диагонали трапеции *4″5″6″7″*.

Аналогичный случай был представлен на рис. 412, где дан чертеж в двух проекциях конусов со взаимно перпендикулярными пересекающимися осями, из которых один проходил сквозь другой.

Всегда ли в случае двух конических поверхностей получается проекция линии пересечения в виде именно неравносторонней гиперболы? Нет; если углы при вершинах конусов, изображенных на рис. 412 и 420, будут равны между собой, то гипербола, получаемая как проекция линии пересечения конических поверхностей вращения с пересекающимися осями на плоскость, параллельную этим осям, окажется равносторонней.

В нижеследующей таблице приведены из упомянутого в сноске на с. 212 исследования указания о проецировании линии пересечения двух поверхностей вращения второго порядка с пересекающимися осями на плоскость, параллельную этим осям.

На с. 207 был приведен рис. 411, на котором было показано построение фронтальной проекции линии соединения поверхностей цилиндра вращения и сферы. При этом у поверхностей их общая плоскость симметрии, определяемая осью цилиндра и центром сферы, параллельна пл. $\pi_2$. Поэтому фронтальная проекция линии соединения данных поверхностей представляет собой кривую второго порядка, в рассматриваемом случае параболу с вершиной в точке *B″*.

На рис. 421 показано построение параболы – проекции линии пересечения сферы цилиндром. Точки *2″* и *3″* (а также им симметричные) заведомо принадлежат искомой проекции. Точка *4″* построена при помощи окружности, проведенной из точки *O″*. Эта окружность есть главный меридиан сферы (*Сф.2*), центр которой находится на оси цилиндра в точке *O″*. Для построения точки *1″* (вершина параболы) взята вспомогательная сфера (*Сф.1*); точка *1″* найдена в пересечении прямой *6″7″*

| Получаемая проекция | Поверхности вращения | |
|---|---|---|
| | без каких-либо особых условий | с условиями, помимо основных |
| Гипербола | Цилиндрические<br>Конические<br>Параболоиды<br>Гиперболоиды<br>Эллипсоиды растянутые<br>} в любых комбинациях | Обе поверхности – сжатые эллипсоиды |
| Равносторонняя гипербола | Обе поверхности цилиндрические<br>Обе поверхности – параболоиды<br>Цилиндрическая и параболоид | Обе поверхности конические с равными углами при вершинах конусов<br>Обе поверхности – гиперболоиды с равными углами при вершинах их асимптотических конусов<br>Коническая и гиперболоид с равными углами при вершине конуса и вершине асимптотического конуса гиперболоида<br>Обе поверхности – эллипсоиды, но подобные |

с проекцией оси параболы. В упомянутом выше исследовании[1]) установлено, что параметр параболы равен расстоянию между точками $C''$ и $O''$. Откладывая по половине этого отрезка в обе стороны от вершины параболы по ее оси, получаем точки $8''$ и $9''$. Через точку $8''$ проходит директриса, а в точке $9''$ находится фокус параболы. Можно теперь строить точки параболы, пользуясь найденными директрисой и фокусом.

В случае, если диаметр цилиндра, пересекающего сферу, равен ее радиусу и образующая цилиндра проходит через центр сферы (рис. 422), получается биквадратная кривая, носящая название *кривой Вивиани*[2]). Ее фронтальная проекция

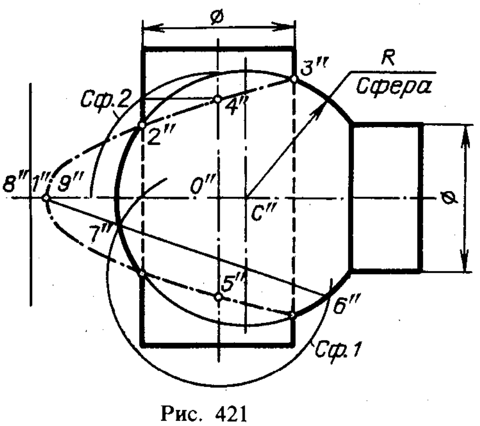


Рис. 421

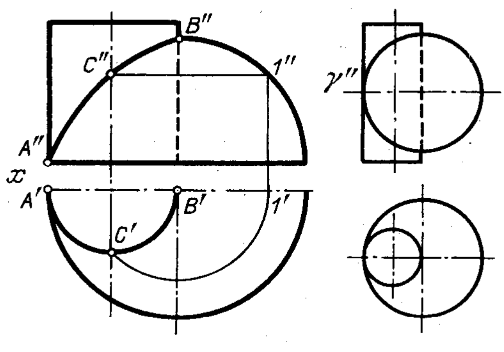


Рис. 422

является параболой. Проекция на плоскости, параллельной другой плоскости симметрии (см. рис. 422, справа), т. е. в данном случае на пл. $\pi_1$, совпадая с проекцией цилиндра, представляет собой окружность – кривую второго порядка, что и должно быть по общему правилу, указанному в начале этого параграфа.

---

[1]) См. сноску на с. 212.

[2]) Винченцо Вивиани (1622–1703), математик и архитектор, ученик Галилея, применял эту биквадратную кривую для окон в сферическом куполе.

Для сферы каждая диаметральная плоскость является плоскостью симметрии. Если какая-либо поверхность вращения второго порядка пересекает сферу, центр которой находится в плоскости симметрии этой поверхности, то кривая пересечения проецируется на плоскость, параллельную плоскости симметрии, в виде кривой второго порядка. Мы уже встречались с этим на рис. 418 и на рис. 422; если бы построить горизонтальную проекцию на рис. 421, то кривая пересечения цилиндра со сферой спроецируется в окружность, что является очевидным так же, как и на рис. 422. Еще раньше, на рис. 398, проекция кривой пересечения конуса с поверхностью полушария представляла собой на пл. $\pi_2$ параболу, а на пл. $\pi_3$ – эллипс. Надо представить себе второе полушарие и второй конус в таком же взаимном положении, что и на рис. 398, и примкнуть оба полушария друг к другу их круговыми основаниями; плоскость соприкосновения окажется ярко выраженной плоскостью симметрии, параллельной пл. $\pi_3$, а кривая на $\pi_3$ – эллипсом.

Парабола и эллипс как проекции линии пересечения были и на рис. 399. В нижеследующей таблице указывается, в каких случаях при пересечении двух поверхностей вращения второго порядка с пересекающимися осями получаются параболы и эллипсы как проекции линий пересечения на плоскостях, параллельных плоскости симметрии этих поверхностей [1]).

| Получаемая проекция | Поверхности вращения |
|---|---|
| Парабола | Сфера с поверхностями цилиндрической, конической, параболоидом, гиперболоидом, эллипсоидом |
| Эллипс | Сжатый эллипсоид с поверхностями цилиндрической, конической, параболоидом, гиперболоидом, растянутым эллипсоидом |

*Зная, какая именно линия должна получиться при построении проекций, можно в ряде случаев применить геометрические свойства этих линий, что упрощает построения и позволяет получать более точные результаты.*

## ВОПРОСЫ К §§ 63–65

1. По каким линиям пересекаются между собой: а) цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны между собой, б) конические поверхности с общей вершиной?
2. Как строятся образующие линейчатой поверхности, называемой цилиндром с тремя направляющими, если две из них или все три – кривые линии?
3. Какие линии получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?
4. По каким линиям пересекаются между собой соосные поверхности вращения?
5. В каких случаях возможно и целесообразно применять вспомогательные секущие сферы?
6. Какая кривая называется биквадратной?
7. В виде какой линии проецируется биквадратная кривая на плоскость, параллельную общей плоскости симметрии двух пересекающихся поверхностей второго порядка?
8. Какая из кривых второго порядка является проекцией линии пересечения одной цилиндрической поверхности вращения другою на плоскости, параллельной общей плоскости симметрии этих поверхностей?
9. В каком случае проекция линии пересечения конических поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную плоскости проекций, является равносторонней гиперболой?
10. Какие кривые могут быть проекциями линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса вращения со сферой в случае общей для них плоскости симметрии?

[1]) Из того же исследования (см. сноску на с. 212).