ГЛАВА XI. РАЗВЕРТЫВАНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 68. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертывание боковой поверхности прямого кругового цилиндра, известное из стереометрии, было показано на рис. 305. У получаемого при этом прямоугольника основание равно развернутой окружности (πd), а высота равна высоте цилиндра. На рис. 362 изображена развертка поверхности прямого кругового цилиндра с плоским срезом по эллипсу. Здесь в основе лежит нормальное сечение цилиндрической поверхности вращения – окружность. Она развернута в прямую; эта прямая разделена на некоторое число равных частей, соответствующее делению окружнссти на рис. 361. Далее применена схема развертывания поверхности призмы. Здесь цилиндрическая поверхность как бы заменена вписанной в нее поверхностью призмы, ребра которой равны отрезкам образующих цилиндрической поверхности[1]). Теоретическая развертка цилиндрической поверхности тем точнее, чем больше граней у призмы, вписанной в цилиндр, и чем меньше каждый из отрезков ломаной линии, ограничивающей развертку призматической поверхности[2]).

Развертывание конической поверхности в общем случае производится по схеме развертывания поверхности пирамиды. На рис. 308 для развертывания боковой поверхности прямого кругового конуса было использовано известное из стереометрии построение с подсчетом угла сектора, представляющего собой искомую развертку $\left(\varphi = \frac{R}{L} \cdot 360°\right.$, где R – радиус основания конуса, L – длина его образующей$\left.\right)$.

Теперь рассмотрим построение развертки боковой поверхности наклонного конуса с круговым основанием (рис. 439).

Окружность основания заменена многоугольником со сторонами A_1A_2, A_2A_3 и т. д., а коническая поверхность – поверхностью пирамиды с треугольными гранями SA_1A_2, SA_2A_3 и т. д. В развернутом состоянии поверхность представляет собой совокупность этих треугольников.

Определив (способом вращения) длину отрезка SA_1 – отрезок $S''\bar{A}_1$ и длину отрезка SA_2 – отрезок $S''\bar{A}_2$, строим треугольник по трем его сторонам $S''\bar{A}_1$, $S''\bar{A}_2$ и $A'_1A'_2$ (хорда), затем строим второй треугольник, $S''\bar{A}_2\bar{A}_3$, для чего определяем длину отрезка SA_3 – отрезок $S''\bar{A}_3$ и берем хорду $A'_2A'_3$ и т. д. Получаем точки $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ и т. д., через которые проводим плавную кривую.

Если на развертке надо найти точку, заданную на поверхности, например M (M'', M'), то через эту точку проводят образующую $S''K''$, $S'K'$, находят ее положение на развертке ($S''\bar{K}$) и откладывают на $S''\bar{K}$ отрезок $S''\bar{M}$. Чтобы построить

---

[1]) Замену одной поверхности другою, более простой, или кривой линии ломаной, приближенно выражающей первую, называют *аппроксимацией* (от *лат.* approximare – приближаться), означающей в математике приближенное выражение каких-либо величин (или геометрических объектов) через другие, более известные.

[2]) При большом числе построений возникают неточности, влияющие на общую точность результата.

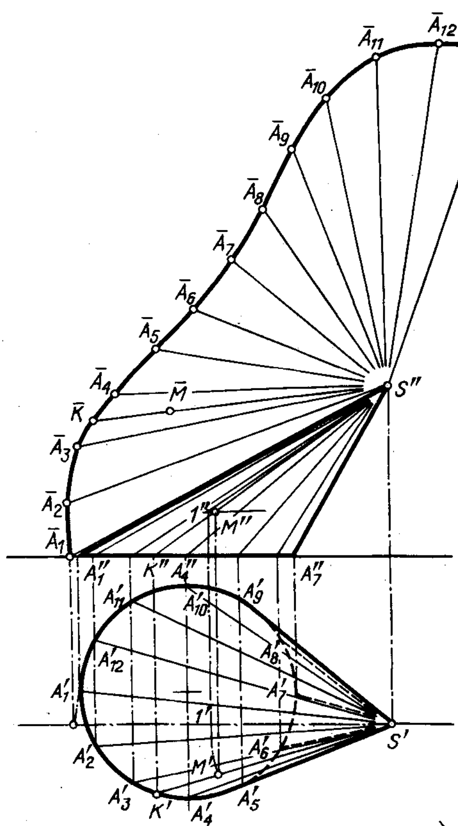

Рис. 439

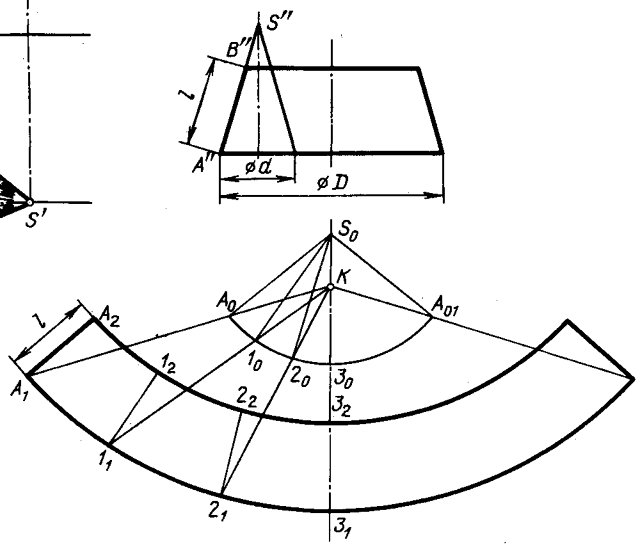

Рис. 440

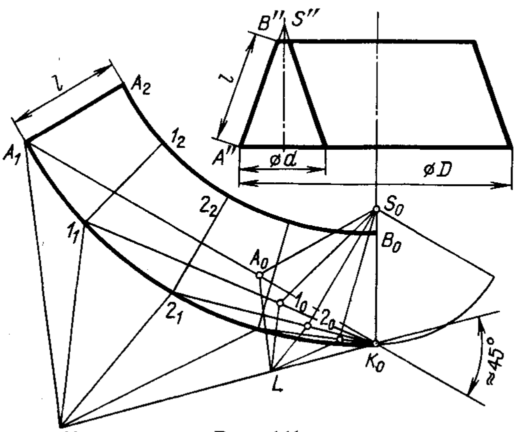

Рис. 441

$S''\bar{K}$ на развертке, надо засечь кривую $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\ldots$ из точки $\bar{A}_3$ дугой радиуса $A_3'K'$ и провести через полученную точку $\bar{K}$ и точку S'' прямую. Отрезок же $S''\bar{M}$ представляет собой натуральную величину отрезка $S''M''$, $S'M'$, полученную при повороте отрезка $S''M''$, $S'M'$ в положение $S''1''$, $S'1'$. Получаем $S''\bar{M} = S''1''$.

Может быть поставлена и обратная задача: построить проекции точки M, заданной на развертке ($\bar{M}$). В этом случае надо начать с проведения на развертке через $\bar{M}$ отрезка $S''\bar{K}$, найти на окружности основания конуса точку K' по равенству отрезков $\bar{A}_3\bar{K}$ и $A_3'K'$. Построив проекции $S'K'$ и $S''K''$ образующей, находим в проекциях отрезок SM, для чего отрезок SK путем поворота выводим в положение, когда он проецируется без искажения (например, параллельно плоскости π_2), откладываем в этом положении длину $S''\bar{M}$ отрезка ($S''1'' = S''\bar{M}$) и возвращаем его в начальное положение.

На рис. 440 показано построение развертки боковой поверхности усеченного конуса при условии, что конус не может быть достроен до полного [1]).

Строится вспомогательный конус, подобный заданному. Целесообразно выбрать диаметр основания этого конуса (d) так, чтобы отношение $\frac{D}{d}$ выражалось целым числом (k). Вспомогательный конус может быть построен, как показано на рис. 440, или вне усеченного.

Далее строится развертка боковой поверхности вспомогательного конуса – сектор $S_0A_0A_{01}$, выбирается произвольно точка K, из нее проводят лучи KA_0, $K1_0$, $K2_0$, $K3_0$ соответственно делениям дуги A_0A_{01} и на них откладывают отрезки $KA_1 = k \cdot KA_0$, $K1_1 = k \cdot K1_0$, $K2_1 = k \cdot K2_0$, $K3_1 = k \cdot K3_0$, где коэффициент $k = \frac{D}{d}$. Через точки A_1, 1_1, 2_1 проводят прямые, соответственно параллельные S_0A_0, S_01_0, S_02_0, и на этих прямых откладывают отрезки $A_1A_2 = l$, $1_11_2 = l$, $2_12_2 = l$. Так же откладывается $3_13_2 = l$. Теперь надо провести лекальные кривые через точки A_1, 1_1, 2_1, 3_1 и через точки A_2, 1_2, 2_2, 3_2.

Вторая половина развертки может быть построена так же, как первая, или на основании симметрии относительно оси S_03_1.

На рис. 441 дан вариант построения развертки [2]). Так же, как и на рис. 440, взят вспомогательный конус (на рис. 441 отношение $\frac{D}{d}$ равно трем) и построена его развертка (показана ее половина). Далее, из точки K_0 проведено несколько лучей – через точки A_0, 1_0, $2_0, \ldots$ и прямая K_0M под углом $\approx 45°$ к K_0A_1. На этой прямой взяты точки L и M так, чтобы $K_0M : K_0L$ равнялось трем (т. е. взятому отношению между D и d). Теперь проведены отрезки LA_0, $L1_0$, $L2_0, \ldots$, а через точку M – прямые $MA_1 \parallel LA_0$, $M1_1 \parallel L1_0, \ldots$ В пересечении этих прямых с лучами K_0A_0, $K_01_0, \ldots$ получаются точки A_1, 1_1, $2_1, \ldots$, через которые надо провести $A_1A_2 \parallel S_0A_0$, $1_11_2 \parallel S_01_0, \ldots$ и отложить $A_1A_2 = l$, $1_11_2 = l$ и т. д., а также $K_0B_0 = l$.

Теперь остается провести по лекалу кривые через точки A_1, 1_1, $2_1, \ldots$ и через точки A_2, 1_2, $2_2, \ldots$ и построить вторую половину развертки, симметричную первой относительно прямой S_0K_0.

§ 69. УСЛОВНОЕ РАЗВЕРТЫВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Сферическая поверхность не является развертываемой (см. § 49, п. 5). Здесь можно говорить только об условном развертывании.

На рис. 442 показан один из приемов построения.

1. Поверхность «разрезают» плоскостями, проходящими через ось сферы OO_1 (например, на рис. 442 на 12 равных частей, фронтальные проекции линии пересечения не показаны).

2. Дуги окружности на пл. π_1 между делениями заменяют прямыми, касательными к окружности (например, $M'N'$ заменяет дугу $K_1'6'L_1'$).

---

[1]) Приводимый способ изложен в книге: Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1965.

[2]) Предложение К. В. Бесчастнова.