ГЛАВА XII. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 71. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Во многих случаях при выполнении технических чертежей оказывается необходимым наряду с изображением предметов в системе ортогональных проекций иметь изображения более наглядные. Для построения таких изображений применяют проекции, называемые *аксонометрическими* или, сокращенно, *аксонометрией*. Название «аксонометрия» образовано из слов древнегреческого языка: *аксон* – ось и *метрео* – измеряю.

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат, к которым эта система точек отнесена в пространстве, параллельно проецируется на некоторую плоскость [1]). Следовательно, аксонометрическая проекция есть, прежде всего, проекция только на одной плоскости, а не на двух или более, как это имеет место в системе ортогональных проекций. При этом необходимо обеспечить наглядность изображений и возможность производить определения положений и размеров, как это изложено дальше.

На рис. 449 показана схема проецирования точки A на некоторую пл. α, принятую за плоскость *аксонометрических проекций* (называемую также *картинной плоскостью*). Направление проецирования указано стрелкой [2]).

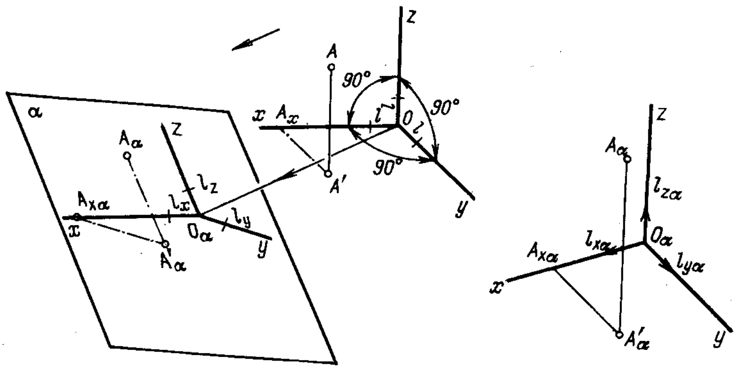

Рис. 449

Прямые Ox, Oy, Oz изображают оси координат в пространстве, прямые $O_\alpha x$, $O_\alpha y$, $O_\alpha z$ – их проекции на пл. α, называемые *аксонометрическими осями* (или осями аксонометрических координат).

---

[1]) Аксонометрия может быть также центральной; здесь рассматривается параллельная аксонометрия.

[2]) Направление проецирования может составлять с плоскостью аксонометрических проекций некоторый острый или прямой угол. Для обеспечения наглядности изображений направление проецирования не следует брать параллельным ни одной из координатных плоскостей.

На осях x, y, z отложен некоторый отрезок длиной l, принимаемый за единицу измерения по этим осям (*натуральная единица*). Отрезки l_x, l_y, l_z на аксонометрических осях представляют собой проекции отрезка l; они вообще не равны l и не равны между собой. Отрезки l_x, l_y, l_z являются единицами измерения по аксонометрическим осям — *аксонометрическими единицами* [1]).

Отношения $\frac{l_x}{l}$, $\frac{l_y}{l}$, $\frac{l_z}{l}$ называются *коэффициентами искажения* (или показателями искажения) по аксонометрическим осям.

Коэффициент искажения по оси $O_\alpha x$ обозначим k, по оси $O_\alpha y$ обозначим m, по оси $O_\alpha z$ обозначим n.

Трехзвенная пространственная линия $OA_xA'A$ спроецировалась в плоскую ломаную линию $O_\alpha A_{x\alpha}A'_\alpha A_\alpha$ (рис. 449). Точка A_α — *аксонометрическая проекция* точки A; точка A'_α представляет собой аксонометрическую проекцию точки A', которая является одной из ортогональных проекций точки A, а именно на пл. π_1 (xOy). Точку A'_α называют *вторичной проекцией точки* A [2]). Можно построить еще две вторичные проекции точки A, соответствующие двум другим ее ортогональным проекциям — на плоскостях $\pi_2(xOz)$ и $\pi_3(yOz)$.

Отношения между аксонометрическими проекциями отрезков прямых линий, параллельных прямоугольным осям координат, и самими отрезками выражаются коэффициентами k, m, n.

Так как (см. рис. 449) $A'A_x \parallel Oy$ и $A'A \parallel Oz$, то при параллельном проецировании $A'_\alpha A_{x\alpha} \parallel O_\alpha y$ и $A'_\alpha A_\alpha \parallel O_\alpha z$. Отношение параллельных отрезков при параллельном проецировании сохраняется; следовательно, $A'_\alpha A_{x\alpha} : l_y = A'A_x : l$ или $A'_\alpha A_{x\alpha} : A'A_x = l_y : l = m$, где m — коэффициент искажения по оси $O_\alpha y$. Аналогичные заключения можно сделать и относительно отрезков, расположенных параллельно осям x и z: отношения проекций таких отрезков к самим отрезкам равны (соответственно) коэффициентам искажения k и n.

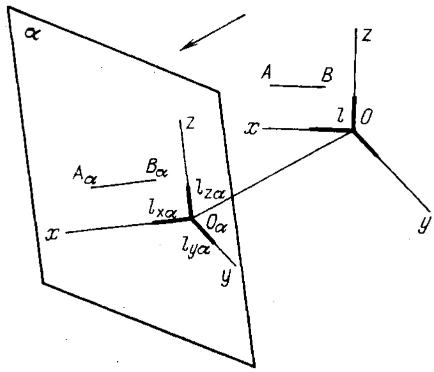

Рис. 450

Так, между аксонометрической проекцией $A_\alpha B_\alpha$ отрезка AB, параллельного оси x (рис. 450), и самим отрезком отношение равно $A_\alpha B_\alpha : AB = k$.

Каждый из отрезков линии $OA_xA'A$ (рис. 449) определяет одну из прямоугольных координат точки A; проекции этих отрезков — отрезки плоской ломаной линии $O_\alpha A_{x\alpha}A'_\alpha A_\alpha$ — определяют соответственно *аксонометрические координаты* той же точки A. Очевидно, при помощи коэффициентов искажения можно перейти от прямоугольных координат к аксонометрическим, и наоборот: $x_\alpha = kx$, $y_\alpha = my$, $z_\alpha = nz$, где буквами x_α, y_α, z_α обозначены отрезки, определяющие аксонометрические координаты точки, а буквами x, y, z — отрезки, определяющие ее прямоугольные координаты.

На рис. 451 дан пример построения аксонометрической проекции точки по ее ортогональным проекциям.

Точка A_α построена по координатным отрезкам, взятым с чертежа: $x = OA_x$, $y = A_xA'$, $z = A_xA''$. Учитывая коэффициенты искажения k, m и n, откладываем по оси $O_\alpha x$ отрезок $O_\alpha A_{x\alpha} = k \cdot OA_x$, затем параллельно оси $O_\alpha y$ отрезок $A_{x\alpha}A'_\alpha = m \cdot A_xA'$ и, наконец, параллельно оси $O_\alpha z$ отрезок $A'_\alpha A_\alpha = n \cdot A_xA''$.

---

[1]) Применяются также названия «аксонометрические масштабы» и соответственно «натуральный масштаб».

[2]) Термин, примененный В. И. Курдюмовым в его труде «Курс начертательной геометрии».

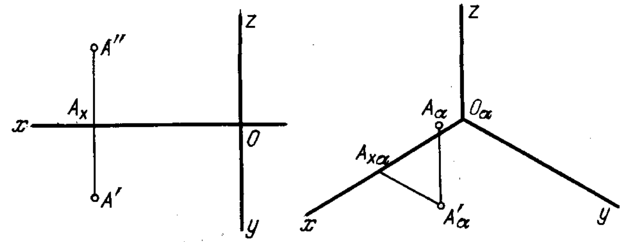

Рис. 451

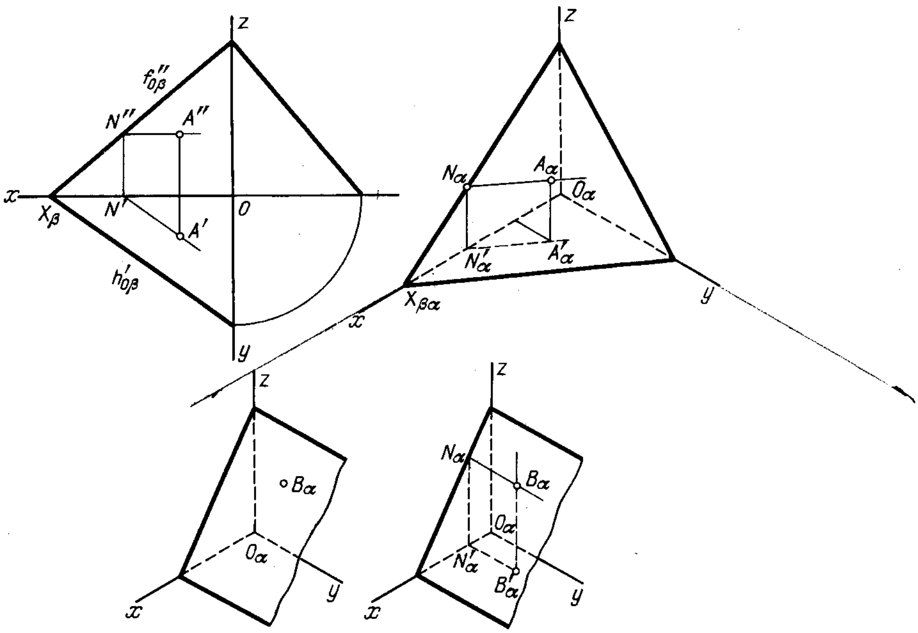

Рис. 452

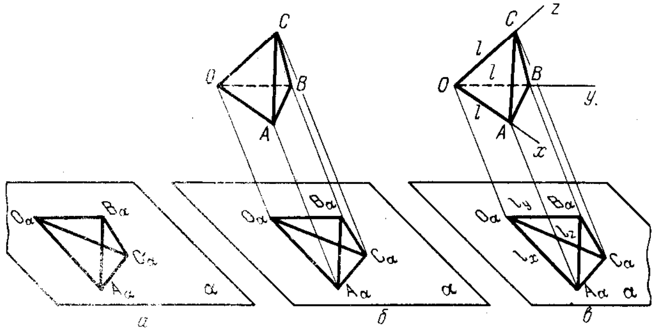

Рис. 453

Плоскость β (рис. 452) изображена следами и в аксонометрической проекции. Для построения следов взяты точки их пересечения с осями по отрезкам на осях (например, точка $X_{\beta\alpha}$ построена по отрезку OX_β: $O_\alpha X_{\beta\alpha} = k \cdot OX_\beta$).

Точка A, лежащая в пл. β, построена в аксонометрической проекции по ее координатам; горизонталь $N_\alpha A_\alpha$ должна быть параллельна своей вторичной проекции и следу на плоскости $xO_\alpha y$. Точку A_α можно было построить и как точку пересечения двух каких-либо прямых в пл. β, построив аксонометрические проекции этих прямых.

На том же рис. 452 изображена в аксонометрической проекции фронтально-проецирующая плоскость и принадлежащая ей точка B_α. Как определить прямоугольные координаты этой точки? Построение показано на рис. 452 справа: в аксонометрической проекции проведена горизонталь $N_\alpha B_\alpha$ и построена ее вторичная проекция, на которой получена вторичная проекция B'_α. Искомые координаты точки B:

$$x = \frac{O_\alpha N'_\alpha}{k}, \quad y = \frac{N'_\alpha B'_\alpha}{m}, \quad z = \frac{B'_\alpha B_\alpha}{n},$$

где k, m, n – коэффициенты искажения.

При построении аксонометрических проекций обычно пользуются не самими коэффициентами искажения, а некоторыми величинами, им пропорциональными. Эти величины будем называть *приведёнными*[1]) *коэффициентами искажения.*

Задаваясь приведенными коэффициентами, можно взять наибольший из них равным единице, что упрощает построения.

Если на пл. α взять произвольно четыре точки O_α, A_α, B_α и C_α, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и соединить их попарно прямыми, то получится фигура, называемая полным *четырехугольником* ($O_\alpha A_\alpha B_\alpha C_\alpha$); *это четырехугольник с его диагоналями* (рис. 453, *а*). Если, далее, через эти точки провести параллельные между собой прямые и взять на каждой из них по произвольной точке O, A, B и C так, чтобы все они не лежали в одной плоскости, то в пространстве образуется вообще некоторый тетраэдр $OABC$[2]). Очевидно, тетраэдров в пространстве, параллельной проекцией которых может служить полный четырехугольник $O_\alpha A_\alpha B_\alpha C_\alpha$, может быть бесконечное множество. В их числе содержится и тетраэдр с прямым трехгранным углом при точке O и с равными ребрами OA, OB, OC; такой тетраэдр может рассматриваться как *масштабный*[3]), т. е. три равных и взаимно перпендикулярных ребра этого тетраэдра служат масштабами осей координат в пространстве (рис. 453, *в*). Это составляет содержание *основного предложения аксонометрии* (или «основной теоремы аксонометрии»), приводимого в следующей формулировке: *любой полный четырехугольник на плоскости всегда является параллельной проекцией некоторого масштабного тетраэдра.* Поэтому любые три прямые, проходящие через одну точку на плоскости и не совпадающие между собой, могут быть приняты за аксонометрические оси, т. е. за проекции осей прямоугольных координат, и любые три отрезка, отложенные на этих прямых от точки их пересечения, могут быть взяты в соответствии с выбранным соотношением приведенных коэффициентов искажения в качестве аксонометрических единиц[4]).

---

[1]) Название «приведенный» по отношению к коэффициентам (показателям) искажения применено Н. Ф. Четверухиным и Е. А. Глазуновым в их труде «Аксонометрия» (М.: Гостехиздат, 1953).

[2]) Тетраэдр – в данном случае треугольная пирамида произвольной формы.

[3]) Термин «масштабный тетраэдр» применен Н. Ф. Четверухиным.

[4]) «Основное предложение аксонометрии» было сформулировано К. Польке (в 1851 г.) в виде следующей теоремы: *любые три отрезка, выходящие из одной точки на плоскости, могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве.* В шестидесятых годах прошлого столетия Г. Шварц обобщил теорему Польке, доказав, что любой полный четырехугольник на плоскости всегда можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, подобного любому заданному. Интересующихся доказательством отсылаем к книге Е. А. Глазунова и Н. Ф. Четверухина, указанной в сноске[1]), или к книге Н. А. Глаголева «Начертательная геометрия» (М.: Гостехиздат, 1953).

Если все три коэффициента искажения равны между собой ($k = m = n$), то аксонометрическая проекция называется *изометрической*; если равны между собой только два коэффициента искажения (например, $k = n$, но m не равна k, или $k = m$, но n не равно k), то проекция называется *диметрической*; наконец, если $k \neq m$, $k \neq n$, $m \neq n$, то проекция называется *триметрической* [1]).

Если направление проецирования не перпендикулярно к плоскости α, то аксонометрическая проекция носит название *косоугольной*. В противном случае аксонометрическая проекция называется *прямоугольной*.

Для сравнения представим себе сферу в прямоугольной и косоугольной аксонометрических проекциях. В первом случае образующие цилиндрической проецирующей поверхности, обертывающей шар, перпендикулярны к плоскости аксонометрических проекций; а так как проецирующий цилиндр является цилиндром вращения, то *прямоугольная аксонометрическая проекция сферы есть окружность.*

В случае же косоугольной проекции в пересечении проецирующей поверхности с плоскостью аксонометрических проекций получается эллипс; в косоугольной аксонометрической проекции изображение сферы теряет в своей наглядности.

В практике построения наглядных изображений обычно применяют лишь некоторые определенные комбинации направлений аксонометрических осей и коэффициентов искажения (или приведенных коэффициентов искажения).

§ 72. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИСКАЖЕНИЯ И УГЛЫ МЕЖДУ ОСЯМИ

1. Возьмем плоскость аксонометрических проекций таким образом, чтобы она пересекала все три координатные оси (рис. 454, слева) в точках X, Y, Z. В случае прямоугольных аксонометрических проекций отрезок OO_α перпендикулярен к плоскости α. Отрезки $O_\alpha X$, $O_\alpha Y$, $O_\alpha Z$ (аксонометрические проекции отрезков на осях) представляют собой катеты прямоугольных треугольников, а сами отрезки на осях координат – гипотенузы. Отсюда $O_\alpha X : OX = \cos\varphi$, $O_\alpha Y : OY = \cos\sigma$, $O_\alpha Z : OZ = \cos\gamma$. Но эти отношения представляют собой коэффициенты искажения k, m и n. Следовательно, $k = \cos\varphi$, $m = \cos\sigma$, $n = \cos\gamma$. Для отрезка OO_α косинусы углов φ_1, β_1, γ_1 (рис. 454, справа) дополнительных к углам φ, β и γ являются *направляющими*

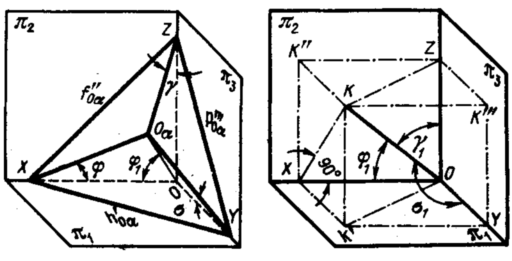

Рис. 454

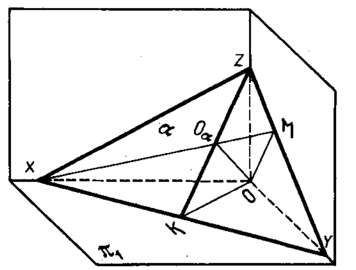

Рис. 455

косинусами. Поэтому $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\sigma_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$ [2]), а так как $\varphi = \pi/2 - \varphi_1$ и т. д., то $\sin^2\varphi + \sin^2\sigma + \sin^2\gamma = 1$, т. е. $1 - \cos^2\varphi + 1 - \cos^2\sigma + 1 - \cos^2\gamma = 1$, откуда

[1]) Древнегреческое «isos» – одинаковый; изометрическая проекция – проекция одинаковых коэффициентов искажения по всем трем осям; «di» – двойной; диметрическая проекция – проекция одинаковых коэффициентов искажения только по двум осям; «treis» – три; триметрическая проекция – проекция разных коэффициентов искажения по всем трем осям.

[2]) Напомним вывод этого соотношения (рис. 454, справа): $OK^2 = OX^2 + OY^2 + OZ^2$; но $OX = OK\cdot\cos\varphi_1$, $OY = OK\cdot\cos\sigma_1$ и $OZ = OK\cdot\cos\gamma_1$, откуда $OK^2 = OK^2\cos^2\varphi_1 + OK^2\cos^2\sigma_1 + OK^2\cos^2\gamma_1$ и (после сокращения на OK^2) $1 = \cos^2\varphi_1 + \cos^2\sigma_1 + \cos^2\gamma_1$.