Отрезки, расположенные параллельно координатным осям в пространстве, претерпевают при аксонометрическом проецировании сокращение, выражаемое соответствующими коэффициентами искажения. Но в числе отрезков, расположенных в пространстве, имеются такие, размер которых не изменяется в аксонометрической их проекции. Это отрезки, расположенные в пространстве параллельно какой-либо из сторон треугольника следов. Действительно, каждый отрезок, расположенный, например, параллельно следу XY (рис. 457, слева), и в том числе сам отрезок XY, сохраняет свою величину и в аксонометрической проекции. Но в прямоугольной аксонометрической проекции эти отрезки получаются расположенными перпендикулярно к аксонометрическим осям, как прямые, параллельные сторонам треугольника следов.

Мы ограничимся рассмотрением указанных двух аксонометрических прямоугольных проекций – изометрической и диметрической с соотношением коэффициентов искажения $1:0,5:1$ и с осями, расположенными так, как это указано на рис. 459. В дальнейшем, применяя название *изометрическая* и *диметрическая* проекции, мы будем иметь в виду именно эти разобранные нами прямоугольные аксонометрические проекции.

В практике построения указанных проекций допускают следующие отступления:

1) в изометрической проекции *по большей части* не применяют коэффициентов искажения $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\approx 0,82$), заменяя их приведенными коэффициентами, равными единице;

2) в диметрической проекции *обычно не применяют коэффициентов искажения* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,94$) и $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,47$), а берут вместо них приведенные коэффициенты соответственно 1 и 0,5.

Замена значений натуральных коэффициентов искажения более удобными числами (приведенными коэффициентами искажения) представляет значительные удобства при практических построениях. Получающееся при этом некоторое увеличение изображений, менее заметное в диметрической проекции, чем в изометрической, может оказаться неприемлемым лишь в особых случаях построений; тогда должны быть применены натуральные коэффициенты искажения.

Удлинение отрезков в изометрической проекции, построенной по приведенным коэффициентам искажения, выражается отношением $1:\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,22$, а в диметрической проекции – отношением $1:\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,06$.

Например, отрезки, параллельные в пространстве сторонам треугольника следов и, следовательно, откладываемые в аксонометрической проекции по направлениям, перпендикулярным к аксонометрическим осям, удлиняются в изометрической проекции в 1,22 раза по сравнению с натуральной величиной, а в диметрической проекции – в 1,06 раза.

§ 73. ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ОКРУЖНОСТИ

1. Начнем с общей задачи – *построить прямоугольную аксонометрическую проекцию окружности, расположенной в некоторой плоскости общего положения* β.

Если пл. β составляет с плоскостью аксонометрических проекций α острый угол φ (рис. 461), то аксонометрическая проекция окружности представляет собой *эллипс*. Большая ось этого эллипса является проекцией того диаметра окружности, который параллелен прямой MN пересечения плоскостей β и α; малая ось эллипса

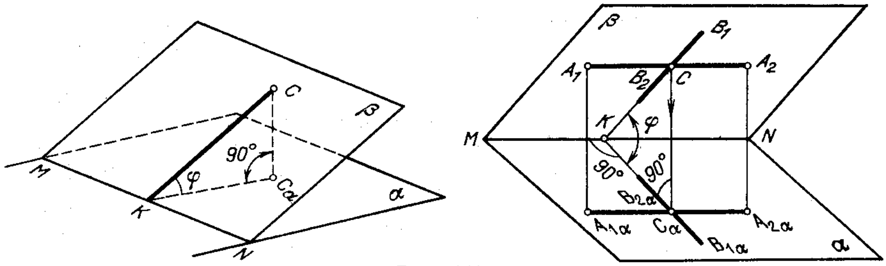

Рис. 461

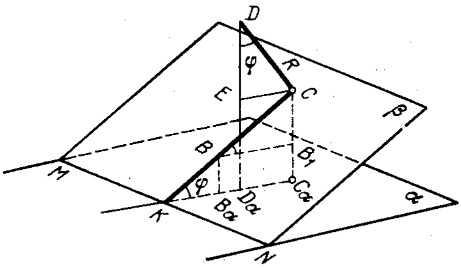

Рис. 462

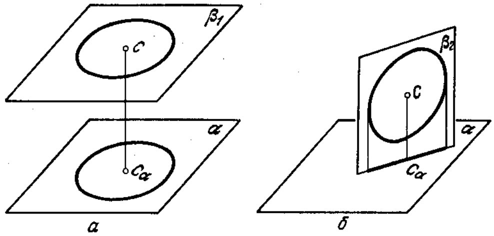

Рис. 463

будет проекцией того диаметра окружности, который располагается перпендикулярно к прямой MN, т. е. располагается на линии, определяющей наклон пл. β по отношению к пл. α. Если точка C есть центр окружности, расположенной в пл. β, то малая ось эллипса при проецировании этой окружности на пл. α окажется на прямой $C_\alpha K$. Размер малой оси эллипса будет зависеть от величины угла φ между плоскостями β и α; если (рис. 462) отрезок CB равен радиусу (R) окружности, то малая полуось эллипса $C_\alpha B_\alpha = R\cos\varphi$.

2. Если $\varphi = 0°$, то $C_\alpha B_\alpha = R$: пл. β_1 (рис. 463, *а*) параллельна плоскости аксонометрических проекций α, и аксонометрическая проекция окружности, расположенной в пл. β_1, представляет собой *окружность*.

Если $\varphi = 90°$, то $C_\alpha B_\alpha = 0$: пл. β_2 (рис. 463, *б*) перпендикулярна к плоскости аксонометрических проекций α, и аксонометрическая проекция окружности, расположенной в пл. β_2, представляет собой *отрезок прямой линии*.

В случае, когда окружность проецируется в виде эллипса, можно построить проекции двух любых взаимно перпендикулярных диаметров. Получаются два сопряженных диаметра эллипса, что даст возможность построить самый эллипс, а также найти его оси по этим сопряженным диаметрам.

3. В последующем изложении рассмотрено непосредственное построение осей эллипса – прямоугольный аксонометрической проекции окружности, что сводится к нахождению направления и величины малой оси эллипса.

Так как величина малой оси зависит только от величины диаметра изображаемой окружности и от величины угла φ (см. выше), то, очевидно, во множестве случаев будут получаться эллипсы – проекции окружностей – с повторяющимися по величине осями. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все окружности были одного и того же диаметра и были расположены в плоскостях, составляющих с плоскостью аксонометрических проекций равные между собой углы. Такие плоскости касательны к конусу вращения, ось которого перпендикулярна к плоскости аксонометрических проекций, а образующая составляет с этой плоскостью угол φ. Назовем этот конус направляющим.

Например, окружности, расположенные в горизонтальных, фронтальных и профильных плоскостях, изображаются в изометрической проекции в виде эллипсов, малая ось которых составляет ≈ 0,58 от величины большой оси (см. дальше). Но если взять окружность в какой-либо плоскости, составляющей с плоскостью изометрических проекций угол, равный

$\approx 54°45'$, т. е. угол, который образуют с плоскостью изометрических проекций плоскости π_1, π_2, π_3, то отношение между величинами малой и большой осей эллипса – изометрической проекции окружности – будет также $\approx 0{,}58$.

Представим себе прямоугольный тетраэдр, образованный плоскостями проекций и плоскостью изометрических проекций, с помещенным в нем направляющим конусом, вершина которого находится в точке O, окружность основания получается вписанной в треугольник следов, а образующая составляет с плоскостью изометрических проекций угол $\varphi \approx 54°45'$ ($\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$). Окружности, расположенные в плоскостях, касательных к направляющему конусу, изображаются в изометрической проекции эллипсами, малая ось которых составляет $\approx 0{,}58$ от величины большой оси.

Итак, получается множество равных между собой эллипсов – аксонометрических проекций окружностей одного и того же диаметра – во множестве положений относительно аксонометрических осей.

Но эллипсы могут повторяться не только по величине, но и по положению относительно аксонометрических осей, т. е. можно получить одинаковые и одинаково направленные эллипсы-проекции, хотя окружности-оригиналы расположены не в параллельных между собой плоскостях. Если представить себе два равных направляющих конуса, поставленных на плоскость аксонометрических проекций по обе ее стороны, и рассмотреть плоскости, касательные к направляющим конусам и имеющие общий след на плоскости аксонометрических проекций (или параллельные им плоскости), то окружности равных диаметров, расположенные в этих плоскостях, изобразятся в аксонометрической проекции равными и одинаково направленными эллипсами.

---

4. Обратимся теперь к рассмотрению способа построения малой оси эллипса, представляющего собой прямоугольную аксонометрическую проекцию окружности радиуса R, расположенной в пл. β, составляющей с плоскостью аксонометрических проекций α некоторый острый угол φ. Положим, что в точке C (рис. 462) проведен перпендикуляр CD к пл. β. Проекция этого перпендикуляра на пл. α расположится на той же прямой $C_\alpha K$, на которой находится и малая ось эллипса – аксонометрической проекции окружности, проведенной в пл. β из центра C.

Следовательно, *проекция на пл. α перпендикуляра, проведенного к пл. β, определяет направление малой оси эллипса.*

Если на этом перпендикуляре отложить от точки C отрезок $CD = R$ и построить прямоугольный треугольник CED, то можно установить, что $\triangle CED = \triangle CB_1B$ и катет $DE = BB_1 = C_\alpha B_\alpha = R\cos\varphi$, т. е. равен половине малой оси эллипса. Второй катет этого треугольника – катет CE – равен $C_\alpha D_\alpha$, т. е. равен проекции самого отрезка CD на плоскости аксонометрических проекций α.

Следовательно, можно построение осей эллипса, представляющего собой аксонометрическую проекцию окружности радиуса R, расположенной в плоскости общего положения β, выполнить следующим образом:

а) на чертеже (рис. 464, слева) провести перпендикуляр к пл. β из центра окружности (точка C) и отложить на этом перпендикуляре отрезок $CD = R$;

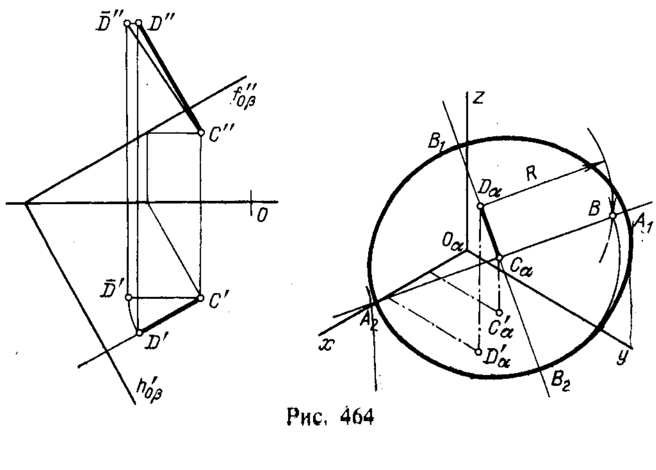

Рис. 464

б) построить в данной системе аксонометрических осей по координатам точек C и D аксонометрическую проекцию отрезка CD – отрезок $C_\alpha D_\alpha$ (рис. 464, справа), который даст направление малой оси эллипса;

в) определить размер малой полуоси эллипса, для чего провести в точке C_α перпендикуляр к $C_\alpha D_\alpha$, засечь его дугой радиуса, равного R, проводимой из точки D_α, как из центра, и длину полученного отрезка $C_\alpha B$, равную $R \cos\varphi$, отложить на прямой $C_\alpha D_\alpha$ по обе стороны от C_α; мы получим малую ось эллипса ($B_1 B_2 = 2R\cos\varphi$);

г) на перпендикуляре, проведенном в точке C_α к прямой $C_\alpha D_\alpha$, отложить отрезки $C_\alpha A_1$ и $C_\alpha A_2$, равные каждый радиусу R изображаемой окружности; мы получим большую ось эллипса ($A_1 A_2 = 2R$).

Эллипс может быть построен по найденным его осям [1]).

5. Применим указанный способ построения осей эллипса, представляющего собой прямоугольную аксонометрическую проекцию окружности, и в случаях, когда *окружность расположена в проецирующей плоскости*. При этом отпадает построение проекций отрезка по заданной его величине R: если окружность находится в пл. γ (рис. 465), то перпендикуляр к этой плоскости параллелен пл. π_2, и, следовательно, на этой плоскости получается проекция в виде отрезка, равного проецируемому отрезку R.

Построение дано для двух положений: на рис. 465 окружность радиуса R расположена в фронтально-проецирующей плоскости γ, на рис. 466 [2]) – в горизонтально-проецирующей плоскости β. Так же, как и в случае плоскости общего положения, надо построить по координатам точек C (центр изображаемой окружности) и D аксонометрическую проекцию отрезка CD, равного R, определить размер малой полуоси при помощи такого же построения, как и на рис. 464, и построить эллипс по найденным его осям.

6. Применим изложенный способ построения к часто встречающемуся на практике случаю, когда окружность расположена *в плоскости, параллельной плоскости проекций*. Положим, что окружность расположена в некоторой горизонтальной пл. γ (рис. 467). В таком случае перпендикуляр, проведенный из центра окружности к пл. γ, будет параллелен оси z и его аксонометрическая проекция – отрезок $D_\alpha C_\alpha$ – располагается параллельно аксонометрической оси $O_\alpha z$.

Но аксонометрическая проекция этого перпендикуляра определяет направление малой оси эллипса. Следовательно, малая ось эллипса в данном случае оказывается параллельной оси $O_\alpha z$ и большая ось эллипса перпендикулярна к этой оси. Очевидно, рассмотрение случаев, когда окружности расположены во фронтальной и в профильной плоскостях, приведет нас к заключению, что большая ось эллипса в первом случае будет перпендикулярна к оси $O_\alpha y$, а во втором – к оси $O_\alpha x$. Получаем изображенную на рис. 468 схему расположения осей эллипсов при прямоугольном аксонометрическом проецировании окружностей, расположенных в плоскостях, соответственно параллельных плоскостям проекций.

Определение размера малой полуоси в этих случаях может быть произведено так же, как указывалось выше. По построенным осям эллипса строятся и сами эллипсы.

Применим это к рассмотренным выше изометрической и диметрической проекциям.

---

[1]) На рис. 464 построение выполнено в изометрической проекции с применением натуральных коэффициентов искажения $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82\right)$.

[2]) На рис. 465 построение выполнено в изометрической проекции с приведенными коэффициентами искажения; поэтому на чертеже взято $1{,}22R$. На рис. 466 построение выполнено в диметрической проекции с приведенными коэффициентами искажения; поэтому на чертеже взято $1{,}06R$.

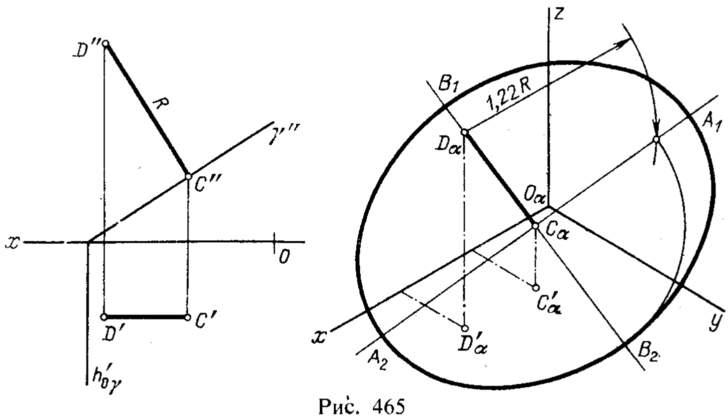

Рис. 465

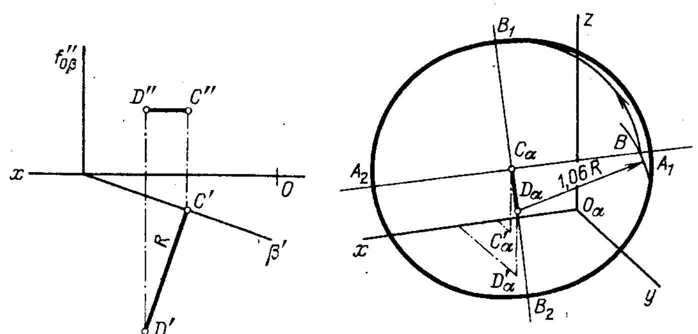

Рис. 466

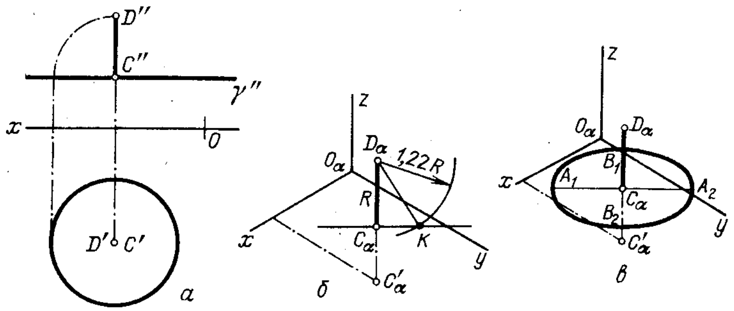

Рис. 467

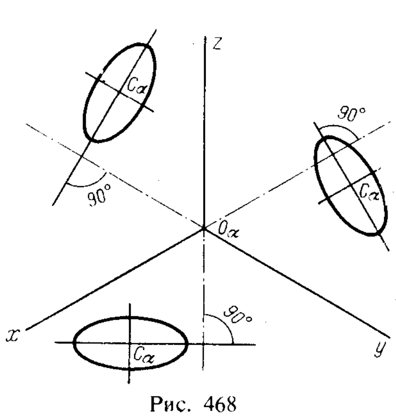

Рис. 468

7. Изометрическая проекция. Так как плоскость изометрической проекции наклонена к плоскостям проекций π_1, π_2 и π_3 под одним и тем же углом, то достаточно определить малую полуось эллипса хотя бы для случая, когда окружность радиуса R расположена в плоскости, параллельной пл. π_1.

Положим, что координаты были отложены без умножения на 0,82. В этом случае $C_\alpha D_\alpha$ (рис. 467, *б* и *в*) получается равным R и из точки D_α надо провести дугу, засекающую перпендикуляр к $C_\alpha D_\alpha$ радиусом, равным $1{,}22R$. Из прямоугольного треугольника $C_\alpha D_\alpha K$ получаем $C_\alpha K$ (малая полуось эллипса) $\approx \approx \sqrt{(1{,}22R)^2 - R^2} \approx 0{,}7R$. Этому будет соответствовать большая полуось, равная $1{,}22R$.

Если координаты откладываются с пересчетом на коэффициент искажения 0,82, то полуоси эллипса получаются равными: большая R, малая $0{,}58R$.

Итак, если окружность диаметра D расположена в горизонтальной, фронтальной или профильной плоскости, то в изометрической проекции большая ось эллипса равна D, а малая ось равна $0{,}58D$. *Если же взять изометрическую проекцию с приведенными коэффициентами, то оси указанных выше эллипсов надо брать соответственно равными* $1{,}22D$ и $0{,}7D$.

К четырем точкам — концам осей эллипса — можно добавить еще четыре точки — концы двух сопряженных диаметров эллипса, параллельных соответственно двум из аксонометрических осей (в зависимости от того, какой плоскости координат параллельна плоскость, в которой лежит рассматриваемая окружность). Эти сопряженные диаметры при указанном выше увеличении (1,22) равны диаметру изображаемой окружности.

Пусть, например, надо построить изометрическую проекцию окружности диаметром 100 мм, расположенной в пространстве в некоторой плоскости, параллельной пл. π_3. Положение эллипса определяется осями $O_\alpha y$ и $O_\alpha z$. Взяв на чертеже согласно тому или иному условию центр C_α (рис. 469), проводим:

а) прямую, перпендикулярную к оси x, и откладываем на ней большую ось эллипса $A_1A_2 = 122$ мм;

б) прямую, параллельную оси x, и откладываем на ней малую ось эллипса $B_1B_2 = 70$ мм;

в) прямую, параллельную оси y, и откладываем на ней диаметр эллипса $D_1D_2 = 100$ мм;

г) прямую, параллельную оси z, и откладываем на ней диаметр эллипса $E_1E_2 = 100$ мм.

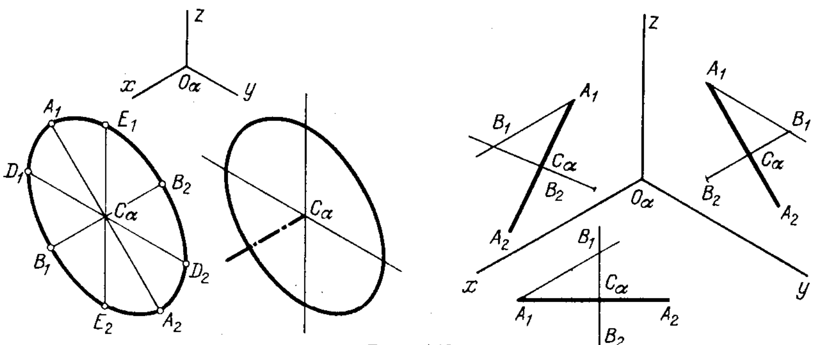

Рис. 469

Найденные восемь точек позволяют воспроизвести сам эллипс достаточно точно даже от руки. Обычно при обводке эллипса не оставляют большой и малой его осей, а указывают лишь направления, параллельные аксонометрическим осям; при этом одно из них, а именно соответствующее оси, перпендикулярной к плоскости изображаемой окружности, отмечается утолщенной линией.

Размер малой оси может быть получен способом, указанным на рис. 469 справа: построив большую ось эллипса A_1A_2 и перпендикуляр к ней в центре эллипса C_α, проводим из конца большой оси (например, из A_1) прямую, параллельную оси x, или y, или z, до пересечения с этим перпендикуляром; полученный отрезок $C_\alpha B_1$ определяет малую полуось.

8. Диметрическая проекция. Так как плоскость диметрической проекции наклонена под одним и тем же углом только к двум плоскостям проекций π_1 и π_3, то надо определить малую полуось эллипса для случая, когда окружности расположены в плоскостях, параллельных плоскостям проекций π_1 и π_3, и отдельно для случая, когда окружность расположена в плоскости, параллельной пл. π_2.

Применяя построение, аналогичное указанному на рис. 467, получим в одном случае (рис. 470) $C_\alpha D_\alpha \parallel$ оси z, а в другом $C_\alpha D_\alpha \parallel$ оси y и, следовательно, в первом случае $C_\alpha D_\alpha = R$, а во втором $C_\alpha D_\alpha = 0{,}5R$, где R – радиус окружности, изображаемой в диметрической проекции (следует помнить, что диметрическая проекция строится по приведенным коэффициентам искажения $1 : 0{,}5 : 1$).

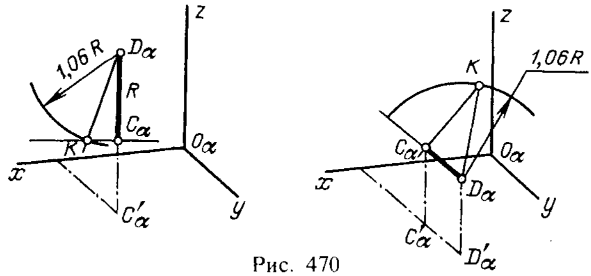

Рис. 470

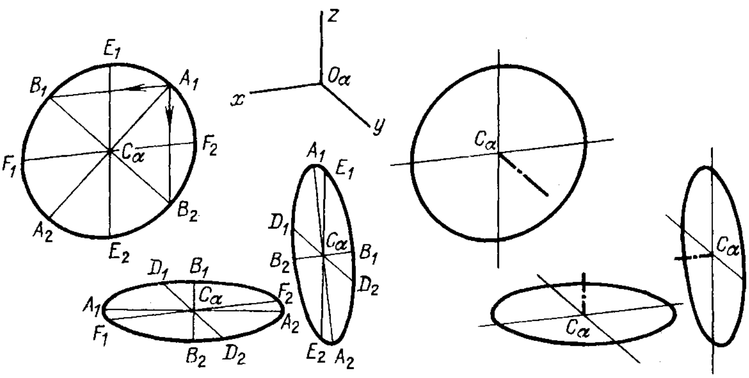

Рис. 471

Из прямоугольных треугольников $C_\alpha D_\alpha K$ (рис. 470) следует, что в первом случае $C_\alpha K$ (малая полуось эллипса) равна

$$\sqrt{(1{,}06R)^2 - R^2} \approx 0{,}35R,$$

а во втором случае она равна

$$\sqrt{(1{,}06R)^2 - (0{,}5R)^2} \approx 0{,}94R.$$

Итак, если окружности диаметра D расположены в горизонтальной и профильной плоскостях (или параллельно им), то в диметрической проекции большая ось эллипса получается равной D, а малая ось $D/3$.

Если же окружность диаметра D расположена во фронтальной плоскости (или параллельно ей), то в диметрической проекции этой окружности оси эллипса: большая ось D, а малая $0{,}88D$. Но так как диметрическая проекция строится по приведенным коэффициентам искажения, то *оси эллипса надо брать для окружностей, лежащих в горизонтальной и профильной плоскостях (или параллельно этим плоскостям), равными* $1{,}06D$ *и* $0{,}35D$, *а для окружности, лежащей во фронтальной плоскости (или параллельно ей), – равными* $1{,}06D$ *и* $0{,}94D$.

На рис. 471 дано построение восьми точек для каждого эллипса в диметрической проекции. Во всех случаях большая ось $A_1A_2 = 1{,}06D$, диаметры $F_1F_2 = E_1E_2 = D$, диаметр $D_1D_2 =$

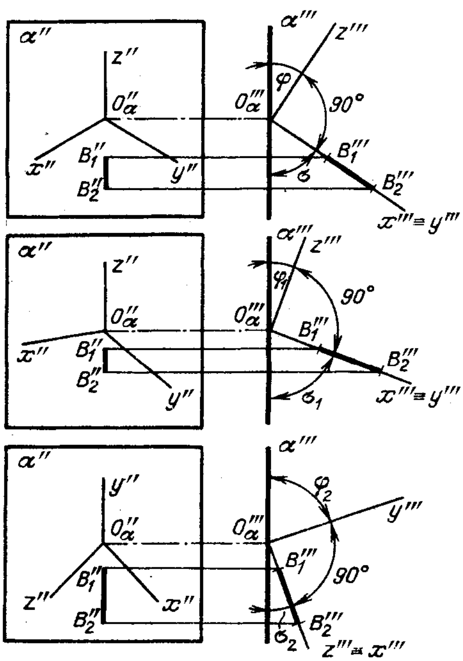

Рис. 472

$= 0{,}5D$; что же касается малой оси B_1B_2, то в двух положениях она равна $0{,}35D$, а в одном (когда она параллельна оси y) равна $0{,}94D$.

При обводке эллипсов, так же как и в изометрической проекции, указывают лишь направления, параллельные осям (см. рис. 471, справа). Для эллипса, малая ось которого направлена параллельно оси y, можно найти точку B_1, проведя из точки A_1 прямую, параллельную оси x (если через точку A_1 провести прямую, параллельную оси z, то получится точка B_2).

9. Рассмотрим другой вывод значений коэффициентов для подсчета величины малой оси эллипса, изображающего окружность, расположенную в пространстве в координатной плоскости xOy, или xOz, или yOz (или параллельно этим плоскостям). На рис. 472 изображены плоскости аксонометрических проекций в совмещении с плоскостью рисунка, т. е. во фронтальном положении: 1) плоскость изометрических проекций, 2) плоскость диметрических (1 : 0,5 : 1) проекций, 3) то же, но при вертикальном положении оси y. Во всех случаях даны еще изображения на дополнительной, профильной плоскости, причем изображены плоскости аксонометрических проекций (α''') и оси координат в их положении относительно плоскости аксонометрических проекций для изометрической и диметрической проекций.

Так как в изометрической проекции углы между координатными осями Ox, Oy и Oz и плоскостью изометрических проекций одинаковы и коэффициент искажения равен во всех трех случаях $\sqrt{\frac{2}{3}}$[1]), то построение проекции $O'''_\alpha z'''$ сводится к построению угла φ по значению его косинуса: $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Так как ось Oz в пространстве лежит в профильной плоскости, то профильная проекция координатной плоскости xOy представит собой прямую линию под углом 90° к $O'''_\alpha z'''$.

Теперь можно перейти к подсчету коэффициента для определения величины малой оси эллипса при построении изометрической проекции окружности, отнесенной к координатной плоскости xOy. Из всех диаметров окружности наиболее сократится тот, который расположен под углом σ к плоскости изометрических проекций. Пусть это диаметр с проекциями $B''_1B''_2$ и $B'''_1B'''_2$, причем $B'''_1B'''_2$ = диаметру окружности (с учетом масштаба чертежа).

Так как $\sigma + \varphi = 90°$, то $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sin\sigma$. Но для определения $B''_1B''_2$ по $B'''_1B'''_2$ надо иметь

$$\cos\sigma = \sqrt{1-\sin^2\sigma} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58.$$

Итак, в изометрической проекции для подсчета величины малой оси эллипса по величине диаметра окружности надо брать коэффициент 0,58, а в пересчете на приведенные коэффициенты искажения 0,7. Это справедливо для всех трех случаев:

[1]) Все расчеты даны в натуральных коэффициентах, а не в приведенных.

окружность в пространстве расположена в горизонтальной плоскости, или во фронтальной, или в профильной.

Переходя, далее, к диметрической проекции (2-е и 3-е положения на рис. 472), следует обратить внимание на то, что плоскость диметрических проекций наклонена под одним и тем же углом только к двум координатным осям, а именно к Ox и к Oz. Поэтому даны два положения (2-е и 3-е): в первом окружность рассматривается в плоскости xOy (это распространяется и на случай расположения окружности в плоскости yOz), во втором положении окружность рассматривается в плоскости xOz.

Руководствуясь значениями $\cos\varphi$ во 2-м положении: $\cos\varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и в 3-м положении: $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, получим

$$\cos\sigma_1 = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} \approx 0{,}33$$

и

$$\cos\sigma_2 = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}88,$$

а в пересчете на приведенные коэффициенты искажения $\approx 0{,}35$ и $\approx 0{,}94$.

§ 74. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЙ В ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ И ДИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЯХ

Ниже приведены некоторые примеры построений в прямоугольных изометрической и диметрической проекциях.

1. **Проекция сферы.** На рис. 473 сверху дано изображение сферы в изометрической и диметрической проекциях.

В обоих случаях сфера показана с вырезом одной восьмой части. Окружности, представляющие собой очерк проекции, проведены: для изометрической проекции радиусом, равным

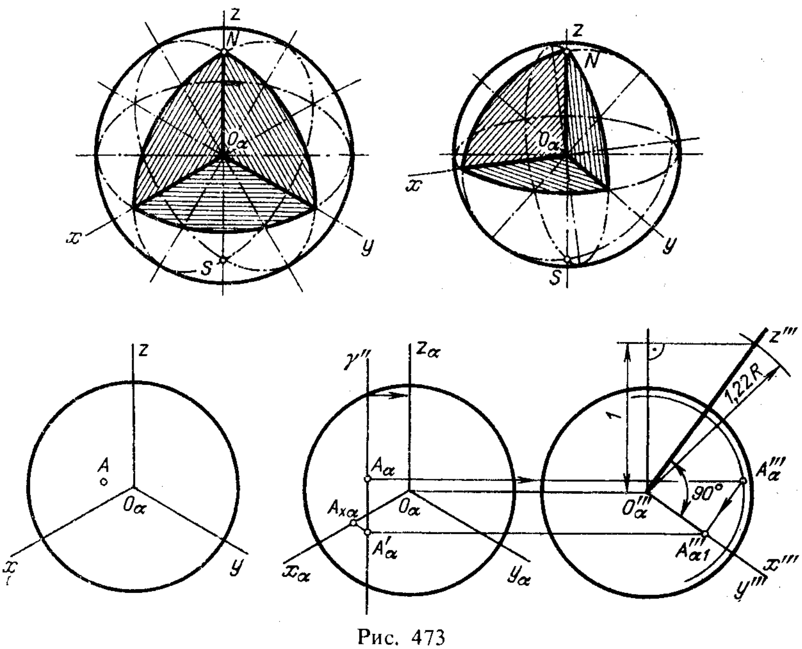

Рис. 473