

5. Построение точек касания окружности — очерка проекции сферы — с эллипсом — проекцией окружности, получаемой на сфере при пересечении ее плоскостью. На рис. 479, а показана сфера, срезанная тремя плоскостями — профильной ( $\gamma$ ), горизонтальной ( $\delta$ ) и фронтально-проецирующей ( $\beta$ ). По этому чертежу построена изометрическая проекция (рис. 479, б) в приведенных коэффициентах искажения. Эллипс  $m$  построен так, как было показано на рис. 469, а эллипс  $n$  — как на рис. 465. Проекция сферы дана очерком — окружностью радиуса равного  $1,22R$ . Эта окружность касается эллипса  $m$  в точке  $K$ , эллипса  $n$  — в точке  $L$ .

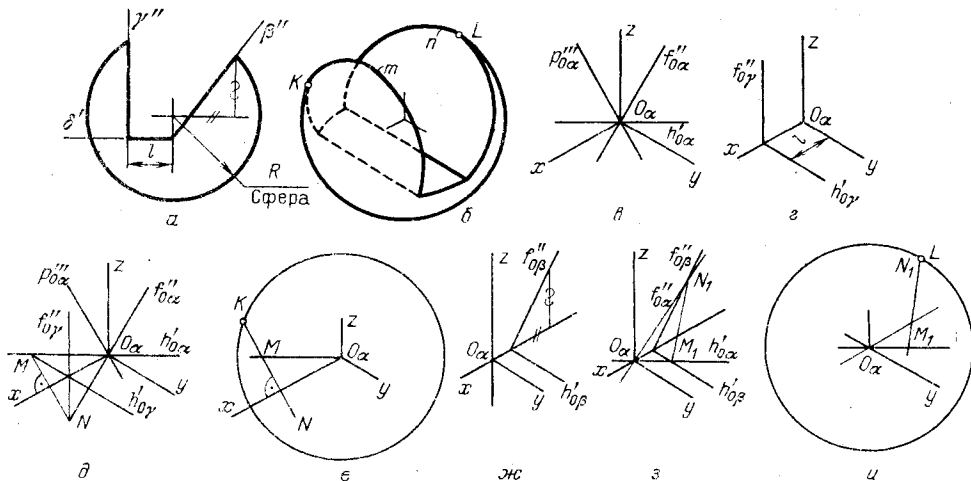


Рис. 479

Рассмотрим, как найдена точка  $K$ . Она получена на окружности — очерке проекции сферы, т. е. в плоскости изометрической проекции (а), и в то же время на эллипсе  $m$ , т. е. в пл.  $\gamma$ , перескакивающей сферу. Но если точка принадлежит одновременно двум плоскостям, то она принадлежит линии пересечения этих плоскостей.

Плоскость изометрической проекции, как известно, равнонаклонна к  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . Треугольник следов этой плоскости равносторонний (см. рис. 457). Отнеся пл.  $\alpha$  к точке  $O_\alpha$ , т. е. к началу осей и центру сферы, получим положение следов, указанное на рис. 479, в.

Пл.  $\gamma$  в системе тех же осей изобразится в следах, как показано на рис. 479, г. Совместим рис. в) и г) и построим линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$  (рис. 479, д): прямая  $MN$  проходит через точку  $M$  пересечения горизонтальных следов параллельно следу  $r''_{\delta\alpha}$ , так как  $\gamma \parallel \pi_3$  (при этом  $r''_{\delta\alpha} \perp O_\alpha x$ , следовательно,  $MN \perp O_\alpha x$ ).

Теперь остается найти точку  $K$  в пересечении прямой  $MN$  с окружностью — изометрической проекцией сферы (рис. 479, е).

Для определения положения точки  $L$  (см. рис. 479, б) надо изобразить в системе изометрических осей фронтально-проецирующую пл.  $\beta$  (рис. 479, ж), а затем найти прямую пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 479, з), эта прямая проходит через точку  $M_1$  пересечения следов  $h''_{\delta\beta}$  и  $h''_{\gamma\alpha}$ , и через точку  $N_1$  пересечения следов  $f''_{\delta\beta}$  и  $f''_{\gamma\alpha}$ . Искомая точка  $L$  получается в пересечении прямой  $M_1N_1$  с окружностью — изометрической проекцией сферы (рис. 479, и).

## § 75. НЕКОТОРЫЕ КОСОУГОЛЬНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Из числа косоугольных аксонометрических проекций остановимся прежде всего на часто применяемой проекции, получаемой на плоскости, параллельной пл.  $\pi_2$ . Если плоскость аксонометрических проекций  $\alpha$  параллельна пл.  $\pi_2$ , то не следует направление проецирования выбирать параллельно пл.  $\pi_3$ , так как проекции координатных осей займут положение, при котором аксонометрическое изображение получается мало наглядным. Направление проецирования следует выбрать так, чтобы проекции координатных осей на пл.  $\alpha$  располагались, как указано на рис. 480. При этом отрезки по осям  $x$  и  $z$  проецируются без искажения, равно как и самый

угол  $xO_2z$ ; таким образом, по осям  $O_2x$  и  $O_2z$  на плоскости  $\alpha$  коэффициенты искажения равны единице. Что же касается оси  $y$ , то соответствующий ей коэффициент искажения может иметь различные значения, в том числе и единицу; в последнем случае мы будем иметь *изометрическую косоугольную проекцию*. Если же коэффициент искажения по оси  $O_2y$  не равен единице, то косоугольная аксонометрическая проекция на пл.  $\alpha$  будет *диметрической*.

Отрезок  $OO_2$ , параллельный направлению проецирования, и отрезки  $O_2y$  и  $O_2z$  определяют прямоугольный треугольник  $O_2yO_2z$  (угол  $O_2yO_2z$  прямой). В самом деле, отрезок  $O_2y$  перпендикулярен к пл.  $\pi_2$ , а так как пл.  $\alpha$  параллельна пл.  $\pi_2$ , то, следовательно, пл.  $\alpha$  перпендикулярна к  $O_2y$ . Вращая треугольник  $O_2yO_2z$  вокруг катета  $O_2y$ , можно получить различные

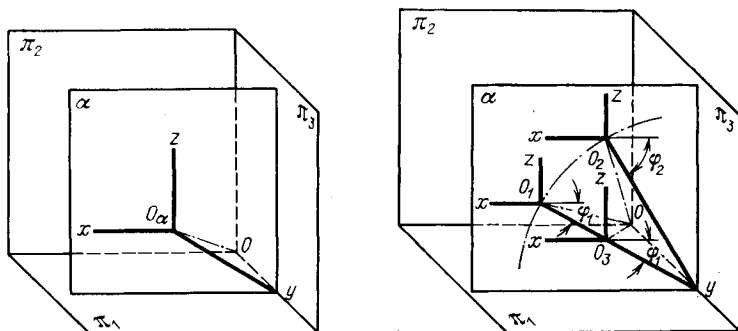


Рис. 480

положения точки  $O_1$  на пл.  $\alpha$ , причем во всех своих положениях точка  $O_1$  находится на одном и том же расстоянии от оси  $y$ : геометрическим местом положений точки  $O_1$  будет окружность, описанная из точки  $y$  радиусом  $yO_1$ . На рис. 480 справа указано два таких положения:  $O_1$  и  $O_2$ ; каждая из точек  $O_1$  и  $O_2$  служит началом осей, из которых оси  $x$  и  $z$  сохраняют свои направления, а ось  $y$  меняет направление: это выражается изменением угла  $\varphi$  между аксонометрическими осями  $x$  и  $y$ . При этом направление проецирования меняется (см. на рис. 480 направление отрезков  $OO_1$  и  $OO_2$ ). Угол  $\varphi$  можно выбрать произвольно.

С другой стороны, если взять на пл.  $\alpha$  начало осей в точке  $O_3$  на отрезке  $yO_1$ , т. е. взять направление проецирования параллельно направлению отрезка  $OO_3$ , то величина угла  $\varphi$  остается неизменной, в то время как  $\frac{O_3y}{Oy}$  не равно отношению  $\frac{O_1y}{Oy}$ ; это отношение представляет собой коэффициент искажения по оси  $y$ . Следовательно, можно выбирать произвольно как величину коэффициента искажения по оси  $y$ , так и величину угла  $\varphi$  с целью получить наиболее выразительное изображение.

Рассматриваемую нами косоугольную аксонометрическую проекцию на плоскости, параллельной пл.  $\pi_2$ , называют «*фронтальной проекцией*», а также «*кавалерной проекцией*» или «*кавалерной перспективой*». Очень часто применяют тот случай фронтальной проекции, когда для коэффициента искажения по оси  $y$  выбрано значение 0,5, а угол  $\varphi$  взят равным  $45^\circ$ ; такая проекция называется иногда «*кабинетной проекцией*»<sup>1)</sup>.

Изображение куба в кабинетной проекции дано на рис. 481. Передняя грань повторяет проекцию на пл.  $\pi_2$ . Поэтому окружность, вписанная в эту грань, останется окружностью и в кабинетной проекции. Отсюда можно вывести заключение, что кабинетная проекция, представляющая собой весьма простой и наглядный способ изображения тел с прямолинейными очертаниями, удобна и для построения изображений в тех случаях, когда приходится иметь дело с окружностями, расположенными в плоскостях, параллельных аксонометрической плоскости проекций, т. е.  $\parallel \pi_2$ .

<sup>1)</sup> Cabinet projection (англ.).

Если же приходится в кабинетной проекции изображать окружность, расположенную в плоскости, параллельной пл. проекций  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , то эту окружность вписывают в квадрат, строят параллелограмм, являющийся кабинетной проекцией этого квадрата, затем намечают на окружности ряд точек и строят их проекции. Они будут расположены на эллипсе — проекции окружности.

На рис. 482 показано построение точек эллипса — проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной пл.  $\pi_1$ . Прежде всего, окружность вписывается

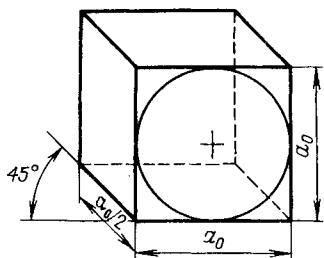


Рис. 481

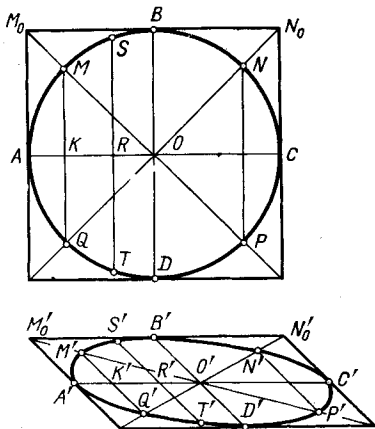


Рис. 482

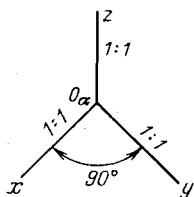


Рис. 483

в квадрат и строится проекция этого квадрата. Диаметр  $AC$  сохраняет свою длину и направление (получаем точки  $A'$  и  $C'$ ; диаметр  $BD$ , перпендикулярный к  $AC$ , займет положение под углом  $45^\circ$  к  $A'C'$  и сократится вдвое (точки  $B'$  и  $D'$ ). Хорды  $MQ$  и  $NP$ , получаемые при проведении диагонали квадрата, дают еще четыре точки ( $M'$ ,  $Q'$ ,  $N'$ ,  $P'$ ), причем

$$M'Q' = \frac{MQ}{2}, \quad N'P' = \frac{NP}{2}, \quad O'K' = OK.$$

Далее, взят произвольный отрезок  $OR$  и отложен по направлению  $O'A'$ ; через точку  $R'$  проведен отрезок  $S'T'$ , параллельный  $B'D'$  и равный  $ST:2$ . Получаются еще две точки ( $S'$  и  $T'$ ), лежащие на искомом эллипсе. Поступая аналогично, можно найти ряд точек, через которые проходит эллипс.

Построение проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной  $\pi_3$ , аналогично рассмотренному.

Отметим также случай косоугольной аксонометрической проекции, когда плоскость аксонометрических проекций параллельна пл.  $\pi_1$  (рис. 483). При таком расположении плоскости  $\alpha$  угол  $xO_\alpha y = 90^\circ$ . Что же касается оси  $z$ , получаемой на пл.  $\alpha$ , то соответствующий ей коэффициент искажения выражается отношением  $O_\alpha z : Oz$  (отрезки  $O_\alpha z$  и  $Oz$  представляют собой катеты прямоугольного треугольника  $OzO_\alpha$ , прямой угол — в точке  $z$ ). В тех случаях, когда

применяют такую косоугольную аксонометрическую проекцию, направление проецирования берут под углом  $45^\circ$  к пл.  $\alpha$  (или к пл.  $\pi_1$ ). При этом отрезок  $O_x z$  равен отрезку  $Oz$ , т. е. коэффициент искажения по оси  $z$  получается равным единице и сама проекция получается изометрической.

## ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ XII

1. В чем заключается способ аксонометрического проецирования?
2. Что называется коэффициентами (или показателями) искажения?
3. Что называется вторичной проекцией точки?
4. Как производится переход от прямоугольных координат к аксонометрическим?
5. В чем заключается «основное предложение аксонометрии» (иначе «основная теорема аксонометрии»)?
6. В каких случаях аксонометрическая проекция называется: а) изометрической, б) диметрической, в) триметрической?
7. В чем различие между косоугольной и прямоугольной аксонометрическими проекциями?
8. Какая линия является очерком аксонометрической проекции сферы: а) косоугольной, б) прямоугольной?
9. Чему равняется сумма квадратов коэффициентов искажения для прямоугольной аксонометрической проекции?
10. Чему равняются коэффициенты искажения в прямоугольной проекции: а) изометрической, б) диметрической (при соотношении коэффициентов  $1:0,5:1$ ) – и каковы эти коэффициенты в приведенном (к единице) виде?
11. Что такое «треугольник следов» и какие выводы из него можно сделать в прямоугольных аксонометрических проекциях?
12. Как строятся оси в прямоугольных проекциях: а) изометрической, б) диметрической ( $1:0,5:1$ )?
13. Как определяется направление и величина малой оси эллипса, являющегося изометрической или диметрической проекцией окружности, расположенной в а) плоскости общего положения, б) плоскостях фронтально-проецирующей и горизонтально-проецирующей, в) плоскостях фронтальной, горизонтальной и профильной?
14. В каких случаях прямоугольная аксонометрическая проекция окружности может оказаться отрезком прямой линии или окружностью?
15. Как определить координаты точек, заданных в прямоугольной аксонометрической проекции на поверхности: а) сферы, б) цилиндра вращения, в) конуса вращения?
16. Какая косоугольная аксонометрическая проекция называется: а) фронтальной или кавальерной, б) кабинетной?