ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 76. О РОДСТВЕННОМ СООТВЕТСТВИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим *родственное соответствие* фигур, расположенных в двух пересекающихся плоскостях или в одной плоскости, в системе параллельного проецирования.

На рис. 484 точки A_1 и B_1 плоскости β параллельно спроецированы по направлению, заданному стрелкой, на пл. α. Проецирующие прямые A_1A_2 и B_1B_2 определяют проецирующую плоскость, которая пересекает плоскости β и α по прямым CB_1 и CB_2, сходящимся на прямой MN в точке C.

Если взять в пл. β некоторую прямую A_1B_1, то проекция этой прямой на пл. α при своем продолжении встретит на линии пересечения плоскостей β и α саму прямую A_1B_1.

Параллельное проецирование точек пл. β на пл. α устанавливает между этими плоскостями некоторое соответствие: точке A_1 в пл. β соответствует точка A_2 в пл. α, точке B_1 – точка B_2 и т. д. Это соответствие обладает следующими основными свойствами:

1) каждой точке одной плоскости соответствует единственная точка другой плоскости (соответствие взаимно однозначное);

2) если на прямой, расположенной в одной плоскости, установлено наличие двух точек, соответствующих точкам прямой другой плоскости, то эти прямые соответствуют одна другой, причем каждой точке одной из этих прямых соответствует определенная точка другой прямой;

3) прямая одной плоскости пересекается с соответствующей ей прямой другой плоскости в точке, лежащей на линии пересечения плоскостей [1]);

4) прямая, по которой пересекаются обе плоскости, сама себе соответствует;

5) если прямые одной плоскости параллельны между собой, то и соответствующие им прямые другой плоскости параллельны между собой;

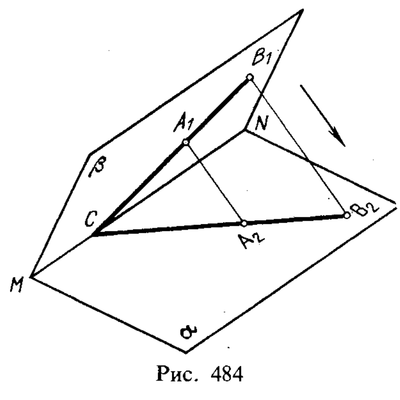

Рис. 484

6) отношение двух отрезков в одной плоскости, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению соответствующих отрезков в другой плоскости.

Рассмотренное соответствие между двумя плоскостями, обладающее перечисленными свойствами, называется *родственным соответствием* или, короче, *родством* [2]). На рис. 484 точки A_2 и B_2 *родственны* точкам A_1 и B_1; прямая A_2B_2 *родственна* прямой A_1B_1.

Если в пл. β взять какую-нибудь фигуру и в пл. α рассмотреть точки, родственные всем точкам этой фигуры, то совокупность последних дает на пл. α фигуру, родственную фигуре, взятой на пл. β.

---

[1]) Если эти прямые параллельны линии пересечения плоскостей, то точка пересечения прямых является бесконечно удаленной.

[2]) Родственное соответствие является частным случаем *аффинного* соответствия двух плоскостей, изучаемого в высшей геометрии. Affinis (*лат.*) – смежный, соседний; affinitas – родство, свойство.

Прямая MN пересечения плоскостей называется *осью родства.*

На рис. 485 слева те же плоскости даны в совмещенном положении: пл. β вращением вокруг прямой MN совмещена с пл. α.

Если взять обратное направление вращения, то получим расположение совмещенных плоскостей, показанное на рис. 485 справа.

Если между плоскостями β и α в пространстве было установлено родственное соответствие, то и после совмещения этих плоскостей (рис. 485) между их точками, прямыми и фигурами будет также иметь место родственное соответствие, по своим свойствам совпадающее со свойствами родства, установленного при параллельном проецировании. Действительно,

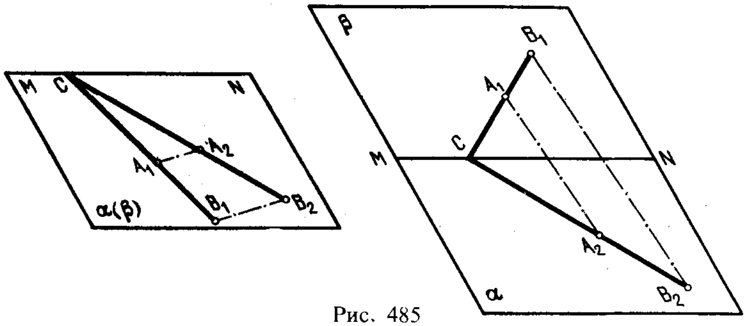

Рис. 485

в обоих случаях прямой линии соответствует прямая, точке на одной из прямых соответствует определенная точка на другой, отношение $\frac{CA_1}{A_1B_1}$ остается равным отношению $\frac{CA_2}{A_2B_2}$ и параллельность проецирующих прямых A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 484) переходит в параллельность прямых A_1A_2 и B_1B_2 на рис. 485 при совмещении плоскостей.

Итак, вне зависимости от того, рассматриваем ли мы родственные прямые в пространстве или при совмещении плоскостей, *родственные прямые пересекаются на оси родства и точки, соответствующие друг другу, лежат на прямых, параллельных между собой.*

Направление прямой A_1A_2 теперь уже не является направлением проецирования (как на рис. 484); будем называть его *направлением родства.*

Если на чертеже двух совмещенных плоскостей даны ось родства и две точки, родственные друг другу, то для каждой другой точки в данном родстве может быть найдена родственная точка. Положим (рис. 486), что прямая MN есть ось родства, точки A_1 и A_2 – родственные точки и, следовательно, A_1A_2 есть направление родства. Требуется для точки B_2 найти родственную точку. Проводим прямую B_2A_2 до пересечения с MN; через точки

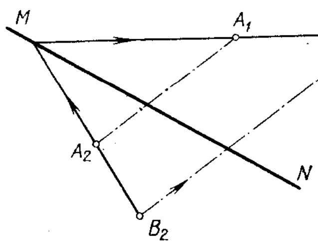

Рис. 486

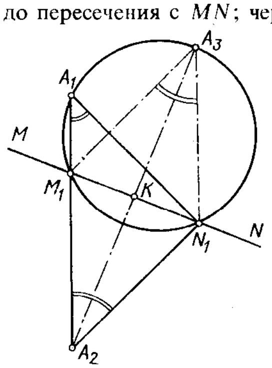

Рис. 487

C и A_1 (см. рис. 485) проводим прямую, на которой и находим точку B_1, родственную точке B_2, проводя прямую B_2B_1 параллельно A_2A_1. Умея строить родственные точки, можно построить фигуру, родственную любой заданной фигуре.

Если заданная фигура – многоугольник, то родственная ей фигура тоже многоугольник с тем же числом сторон, и для его построения достаточно найти точки, родственные вершинам, и соединить их прямолинейными отрезками. Если же заданная фигура криволинейная, то построение родственной ей фигуры производится по нескольким ее точкам; через полученные точки проводится кривая.

Рассматривая фигуру, родственную заданной фигуре, мы замечаем, что величина углов вообще не сохраняется (см., например, рис. 491: углы четырехугольника $A'B'C'D'$ не равны соответствующим им углам в родственном четырехугольнике $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$).

Однако при заданной оси родства MN (рис. 487), паре родственных точек A_1 и A_2 и паре родственных прямых A_1M_1 и A_2M_1, проходящих через эти точки, можно построить еще одну пару родственных прямых A_1N_1 и A_2N_1, так, что угол $M_1A_1N_1$ будет равен углу $M_1A_2N_1$. Из точки A_2 проведен перпендикуляр к прямой MN и построена точка A_3 так, что $A_2K = KA_3$, Через точки A_1, A_3 и M_1 проведена окружность, которая пересекает прямую MN еще в точке N_1. Дальнейшее ясно из чертежа.

В родственном соответствии двух плоскостей, заданных осью и двумя родственными точками A_1 и A_2, можно построить два взаимно перпендикулярных направления одной из плоскостей, соответствующих двум взаимно перпендикулярным направлениям другой плоскости. *Такие направления называются главными в данном родственном соответствии.* Построение показано на рис. 488. Отрезок прямой A_1A_2 разделен пополам в точке K, и через

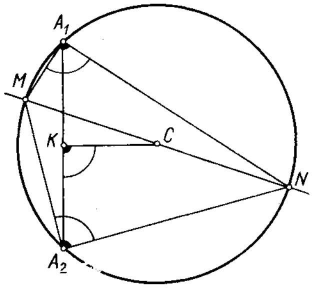

Рис. 488

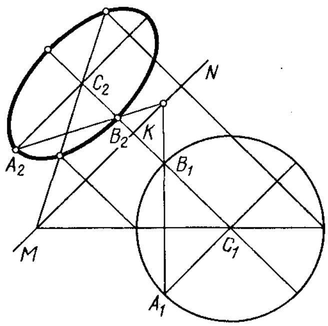

Рис. 489

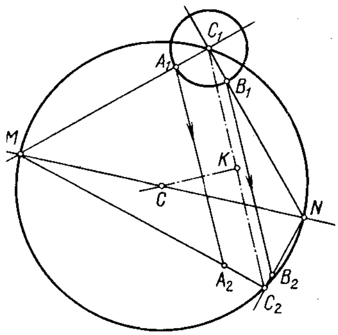

Рис. 490

эту точку проведен перпендикуляр к A_1A_2 до пересечения с MN в точке C. Из точки C проведена окружность через точки A_1 и A_2. Получены две пары родственных прямых: A_1M и A_2M, A_1N и A_2N. Углы MA_1N и MA_2N прямые.

Фигура, родственная окружности, будет вообще эллипсом, причем взаимно перпендикулярные диаметры окружности переходят в сопряженные диаметры эллипса.

На рис. 489 изображены ось родства MN и две родственные точки C_1 и C_2, причем точка C_1 является центром заданной окружности. Направление родства C_1C_2 расположено перпендикулярно к оси. Построена фигура, родственная окружности, – эллипс с центром C_2. Полуоси эллипса A_2C_2 и B_2C_2 получены как прямые, родственные двум взаимно перпендикулярным радиусам A_1C_1 и B_1C_1. В данном случае прямой угол A_2C_2K, родственный прямому углу A_1C_1K, получен проведением прямой $A_2C_2 \parallel MN$, так как $C_1A_1 \parallel MN$.

На рис. 490 показано построение полуосей A_2C_2 и B_2C_2 эллипса, родственного окружности с центром C_1, когда направление родства C_1C_2 не перпендикулярно к оси родства. Применено вспомогательное построение по рис. 488 для нахождения главных направлений MC_1 и NC_1, MC_2 и NC_2, которые определяют направления тех взаимно перпендикулярных диаметров окружности, которые преобразуются в оси эллипса (на рис. 490 показано построение только полуосей A_2C_2 и B_2C_2).

Если взять некоторую плоскость общего положения в системе плоскостей π_1, π_2 и π_3, то между плоскостью α и каждой из плоскостей проекций имеет место упомянутое выше родственное соответствие, так как ортогональное проецирование есть частный случай общего параллельного проецирования. Следы плоскости α будут осями родства: след $h'_{0\alpha}$ – для плоскостей α и π_1, след $f''_{0\alpha}$ – для α и π_2; след $p'''_{0\alpha}$ – для α и π_3. Прямая, расположенная в пл. α, и каждая из ее проекций пересекаются на соответствующих следах плоскости, т. е. на осях родства.

На рис. 491 выполнено построение четырехугольника $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ (натурального его вида) как фигуры, родственной проекции $A'B'C'D'$. След $h'_{0\alpha}$ фронтально-проецирующей плоскости, в которой находится данный четырехугольник, служит осью родства; направление родства перпендикулярно к $h'_{0\alpha}$. Находим обычным путем (способ совмещения) точку $\bar{C}$, родственную точке C', а затем строим точки $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{D}$ по схеме, указанной на рис. 486.

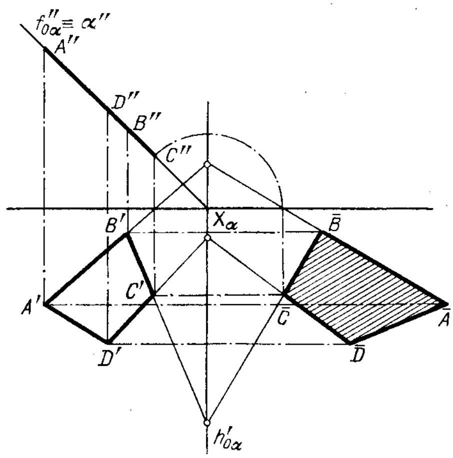

Рис. 491

Рис. 492 показывает, *что между горизонтальной и фронтальной проекциями всякой плоской фигуры* (в данном случае треугольника) *существует родственное соответствие.*

Прежде всего отмечаем, что прямые, соединяющие точки A' и A'', B' и B'', C' и C'', параллельны между собой. Далее следует установить, что любые две прямые, соответствующие одна другой, пересекаются на одной и той же прямой. Продолжим до пересечения прямые $A'B'$ и $A''B''$. Точка M_2 представляет собой одновременно горизонтальную и фронтальную проекции точки, принадлежащей прямой AB в пространстве. Совпадение проекций показывает, что эта точка находится на равных расстояниях от плоскостей π_1 и π_2.

То же можно сказать и относительно точек M_1 и M_3. Равноудаленность точек от плоскостей π_1 и π_2 позволяет заключить, что точки эти, принадлежа плоскости треугольника ABC, находятся в то же время в плоскости, делящей второй и четвертый углы (четверти) пространства пополам.

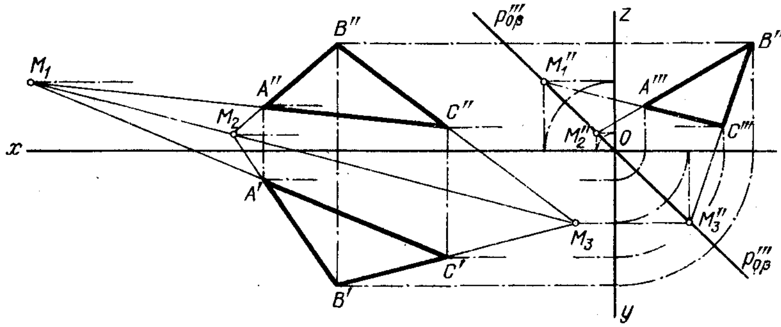

Рис. 492

На рис. 492 эта плоскость выражена следом $p'''_{0\beta}$. Так как рассматриваемые точки одновременно должны принадлежать двум плоскостям – пл. β и плоскости треугольника ABC, то очевидно, что они должны лежать на линии пересечения плоскости треугольника ABC и пл. β. Прямая эта, находясь в плоскости, делящей второй и четвертый углы (четверти) пространства пополам, изобразится на плоскостях π_1 и π_2 одной и той же прямой (горизонтальная и фронтальная проекции совпадают), а следовательно, точки M_1, M_2 и M_3 расположены на одной прямой, которая и служит осью родства. Проекции любой прямой, лежащей в плоскости треугольника ABC, пересекаются на найденной оси родства [1]).

[1]) Если прямая расположена в плоскости треугольника ABC и параллельна оси родства, то она пересекается с осью родства в бесконечности; обе ее проекции параллельны оси родства.

Итак, проекции $A'B'C'$ и $A''B''C''$ родственны; направление родства перпендикулярно к оси x, ось родства располагается вообще под некоторым углом к оси x. В случае, если плоскость данной фигуры проходит через ось x, то ось родства горизонтальной и фронтальной проекций совпадает с осью x.

Для горизонтальных и фронтальных проекций всех фигур, расположенных в одной и той же плоскости, получается общая ось родства; действительно, эта ось представляет собой совпавшие горизонтальную и фронтальную проекции линии пересечения некоторой плоскости с постоянной плоскостью β (рис. 492).

На рис. 493 родственное соответствие применено для построения горизонтальной проекции четырехугольника, если известна его фронтальная проекция $A''B''C''D''$ и горизонтальные проекции трех вершин (точки A', B', C').

Прежде всего найдены точки M_1 и M_2 и тем самым определена ось родства. Затем прямая $A''D''$ продолжена до пересечения с осью родства и полученная точка M_3 соединена прямой с точкой A'.

Искомая точка D' получится в пересечении прямой $A'M_3$ и линии связи $D''D'$. Остается соединить между собой прямыми точки A' и D', точки C' и D'.

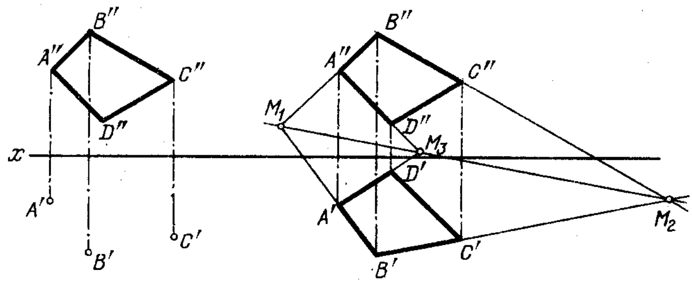

Рис. 493

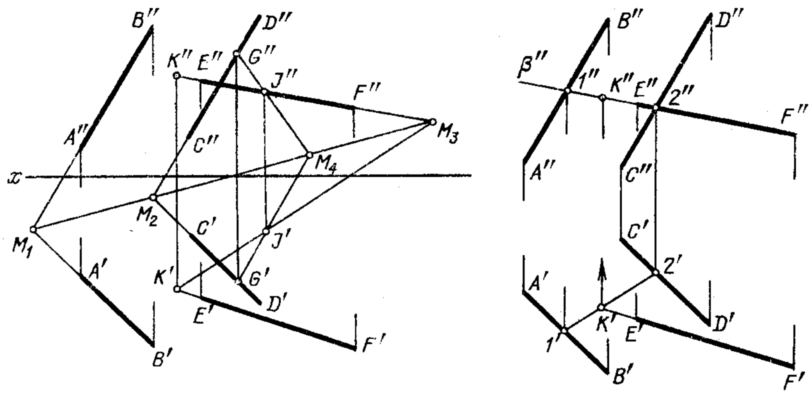

Рис. 494

На рис. 494 слева родственное соответствие применено для отыскания проекций точки пересечения прямой EF с плоскостью, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD.

Задача сводится к отысканию на прямых $E'F'$ и $E''F''$ точек, являющихся родственными друг другу в данном родственном соответствии. Это соответствие определяется любыми двумя родственными точками (на рис. 494 взяты точки G' и G'') и осью родства, проведенной через точки M_1 и M_2, которые найдены в пересечении прямых $A'B'$ и $A''B''$, $C'D'$ и $C''D''$. Если, далее, построить прямую, родственную прямой $E''F''$, то мы тем самым в плоскости, заданной прямыми AB и CD, проведем некоторую новую прямую, находящуюся в то же время в одной плоскости с данной прямой EF (общая фронтальная проекция $E''F''$).

Построение прямой, родственной прямой $E''F''$ выполнено следующим образом: пользуясь родственными точками G' и G'' и произвольно выбранной точкой I'' на прямой $E''F''$, строим точку I', родственную точке I''; если, далее, найти точку M_3 и провести через нее и через точку I' прямую, то определится прямая, родственная прямой $E''F''$. Остается отметить точку K', в которой прямые $I'M_3$ и $E'F'$ пересекают друг друга. Эта точка K' является горизонтальной проекцией искомой точки пересечения.

На рис. 494 справа показано решение той же задачи, но приемом, изложенным в § 25; через прямую EF проведена плоскость β, построена прямая с проекциями $1''2''$ и $1'2'$, по которой пл. β пересекает заданную плоскость, получена проекция K' искомой точки, а по ней – проекция K''. Это построение проще показанного на рисунке слева.

Но в примере, приведенном на рис. 495, применение родственного соответствия позволяет построить оси эллипса (что не было сделано на рис. 364–366 в § 56), не прибегая к переходу от его сопряженных диаметров к осям.

Не объясняя нахождения ряда точек эллипса – фронтальной проекции сечения цилиндра плоскостью (это было сделано в § 56), остановимся здесь лишь на построении осей эллипса.

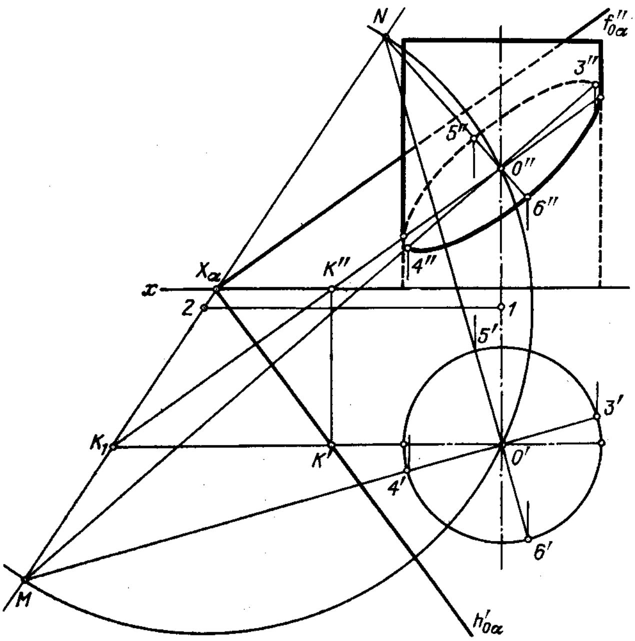

Рис. 495

Проекции фигуры сечения – эллипс и окружность – родственны при направлении родства, перпендикулярном к оси x. Ось родства – прямая MN – строится при помощи родственных между собою в том же родстве проекций $K''O''$ и $K'O'$, а также хотя бы следа $f''_{0\alpha}$ и оси x: найдя точку K_1 и проведя через нее и через X_α прямую, получаем ось родства. Теперь приемом, показанным на рис. 490, находим взаимно перпендикулярные направления – для фронтальной проекции NO'' и MO'' и для горизонтальной проекции NO' и MO', а по точкам $3'$ и $4'$ – вершины эллипса $3''$ и $4''$ на большой его оси и по точкам $5'$ и $6'$ – вершины $5''$ и $6''$ на малой оси.

На рис. 496 рассмотрен случай пересечения наклонного конуса плоскостью, причем последняя задана пересекающимися прямыми AB и BC.

Ось родства, определяющая совместно с парой родственных точек, хотя бы A' и A'', родственное соответствие, проходит через точки M_1 и M_2 пересечения проекций $A'B'$ и $A''B''$, $B'C'$ и $B''C''$. Направление родства перпендикулярно к оси x.

Так как искомое сечение конуса будет находиться в плоскости, определяемой прямыми AB и BC, то задача сводится к отысканию на проекциях конуса ряда пар родственных точек в данном родстве.

Строим точку S_1', родственную точке S'' (при помощи пары родственных точек D' и D'' и точки M_3 на оси родства).

Если продолжить фронтальные проекции образующих конуса до пересечения с осью родства в точках N_1, N_2, N_3 и т. д. и затем соединить все эти точки с точкой S_1' прямыми, то определится ряд прямых, расположенных в данной плоскости; проекции этих прямых родственны между собой.

Взяв точку в пересечении горизонтальной проекции образующей с той горизонтальной проекцией $S_1'N_1$, $S_1'N_2$ и т. д., которая родственна фронтальной проекции этой образующей,

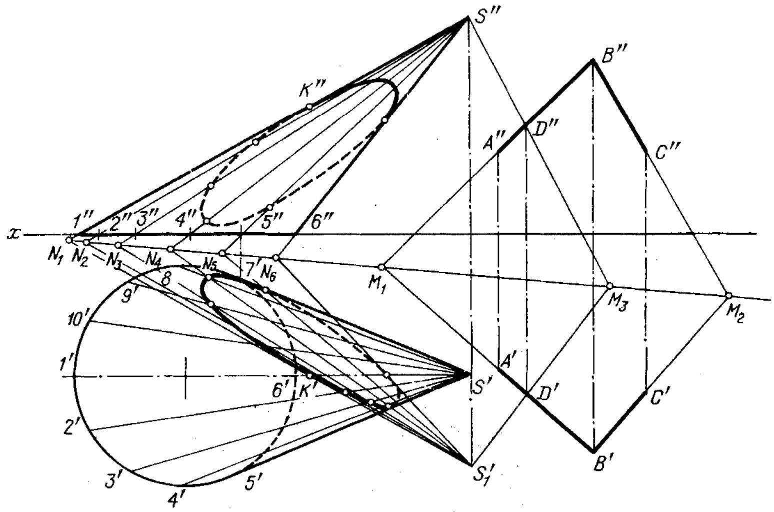

Рис. 496

мы получим горизонтальную проекцию точки, принадлежащей фигуре сечения конуса данной плоскостью. Например, точка K' получилась в пересечении прямых $S_1'N_1$ и $S'1'$; находим соответственную фронтальную проекцию K''. Следовательно, найдена точка K, которая лежит на образующей конуса и в то же время находится в данной плоскости.

Находя подобным способом ряд точек, получаем возможность построить эллипсы, представляющие собой проекции линии сечения.

ВОПРОСЫ К § 76

1. Каковы основные свойства соответствия между двумя пересекающимися плоскостями при параллельном проецировании?
2. Как называется такое соответствие?
3. Что такое ось и направление родства?
4. Какие направления называются главными в данном родственном соответствии?
5. Какая фигура родственна окружности?
6. Как строятся оси эллипса, родственного заданной окружности, когда направление родства не перпендикулярно к оси родства?
7. Как доказать, что между фронтальной и горизонтальной проекциями всякой плоской фигуры существует родственное соответствие?
8. В каком случае ось родства фронтальной и горизонтальной проекций плоской фигуры совпадает с осью проекций π_2/π_1?