ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

§ 18. Определение расстояний

155*. Определить натуральную величину отрезка AB прямой общего положения (рис. 153, *а*).

Решение. Как известно, проекция отрезка прямой на какой-либо плоскости равна самому отрезку (с учетом масштаба чертежа), если он параллелен этой плоскости

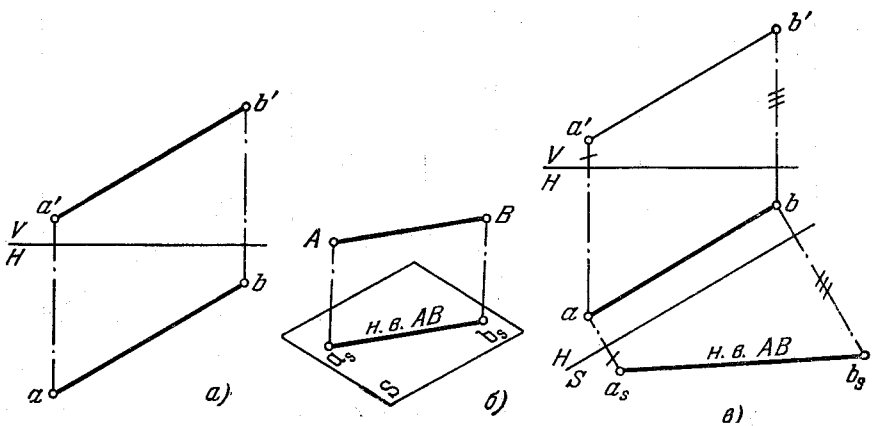


Рис. 153а—в.

(рис. 153, *б*). Из этого следует, что путем преобразования чертежа надо добиться параллельности данного отрезка пл. V или пл. H или же дополнить систему V, H еще одной плоскостью, перпендикулярной к пл. V или к пл. H и в то же время параллельной данному отрезку.

На рис. 153, *в* показано введение дополнительной плоскости S, перпендикулярной к пл. H и параллельной заданному отрезку AB.

Проекция a_sb_s равна натуральной величине отрезка AB.

На рис. 153, *г* показан другой прием: отрезок AB повернут вокруг прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной к пл. H, до положения, параллельного

пл. V. При этом точка B остается на месте, а точка A занимает новое положение A_1. В новом положении горизонт. проекция $a_1b \parallel$ оси x. Проекция a'_1b' равна натуральной величине отрезка AB.

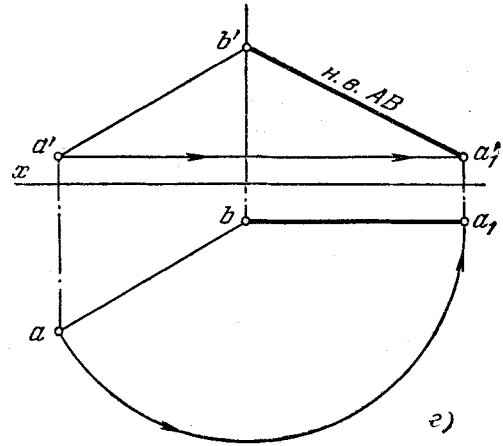


Рис. 153г.

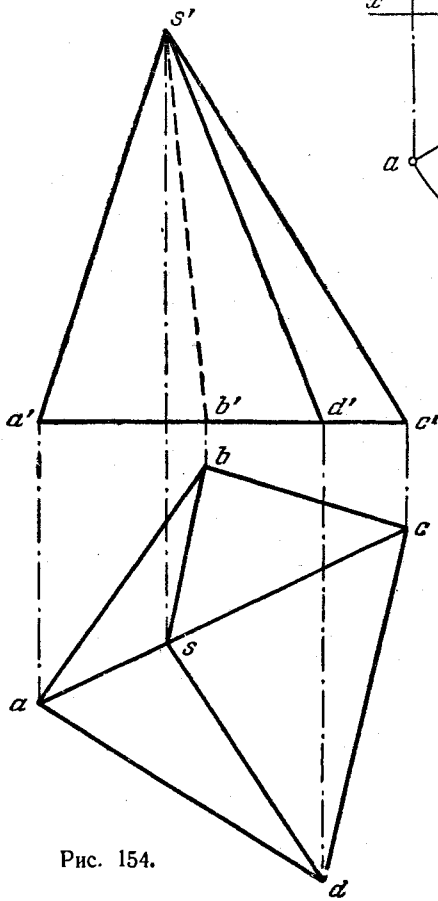


Рис. 154.

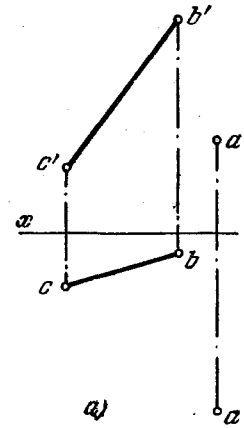


Рис. 155а.

156. Дана пирамида $SABCD$ (рис. 154). Определить натуральную величину ребер пирамиды AS и CS, используя способ перемены плоскостей проекций, и ребер BS и DS, используя способ вращения, причем взять ось вращения перпендикулярно к пл. H.

157*. Определить расстояние от точки A до прямой BC (рис. 155, *а*).

Решение. Расстояние от точки до прямой измеряется отрезком перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Если прямая перпендикулярна к какой-либо плоскости (рис. 155, *б*), то расстояние от точки до прямой измеряется расстоянием между проекцией точки и точкой—проекцией прямой на этой плоскости. Если прямая занимает в системе V, H общее положение, то, чтобы определить расстояние от точки до прямой способом перемены плоскостей проекций, надо ввести в систему V, H еще две дополнительные плоскости.

Сначала (рис. 155, *в*) вводим пл. S, параллельную отрезку BC (новая ось S/H параллельна проекции bc), и строим проекции b_sc_s и a_s. Затем (рис. 155, *г*) вводим еще пл. T, перпендикулярную к прямой BC (новая ось T/S перпендикулярна к b_sc_s). Строим проекции прямой и точки — $c_t(b_t)$ и a_t. Расстояние между точками a_t и $c_t(b_t)$ равно расстоянию l от точки A до прямой BC.

На рис. 155, *д* эта же задача выполнена с помощью способа вращения в той его форме, которую называют способом параллельного перемещения. Сначала прямую BC и точку A, сохраняя неизменным их взаимное положение, поворачиваем вокруг некоторой (не обозначенной на чертеже) прямой, перпендикулярной к пл. H, так, чтобы прямая BC расположилась параллельно пл. V. Это равносильно перемещению точек A, B, C в плоскостях, параллельных пл. H. При этом горизонт. проекция заданной системы ($BC+A$) не изменяется ни по величине, ни по конфигурации, лишь изменяется ее положение относительно оси x. Располагаем горизонт. проекцию прямой BC параллельно оси x (положение b_1c_1) и определяем проекцию a_1, откладывая $c_1l_1 = c—l$ и $a_1l_1 = a—l$, причем $a_1l_1 \perp c_1l_1$. Проведя прямые $b'b'_1$, $a'a'_1$, $c'c'_1$ параллельно оси x, находим на них фронт. проекции b'_1, a'_1, c'_1. Далее, перемещаем точки B_1, C_1 и A_1 в плоскостях, параллельных пл. V (также не изменяя их взаимного расположения), так, чтобы получить $B_2C_2 \perp$ пл. H. При этом фронт. проекция прямой расположится перпендикулярно к оси x, $b'_2c'_2 = b'_1c'_1$, а для построения проекции a'_2 надо взять $b'_2 2'_2 = b'_1 2'_1$, провести $2'_2 a'_2 \perp b'_2 c'_2$ и отложить $a'_2 2'_2 = a'_1 2'_1$. Теперь, проведя c_1c_2 и $a_1a_2 \parallel x$, получим проекции b_2c_2 и a_2 и искомое расстояние l от точки A до прямой BC. Определить расстояние от A до BC можно, повернув плоскость, определяемую точкой A и прямой BC, вокруг горизонтали этой плоскости до положения $T \parallel$ пл. H (рис. 155, *е*).

В плоскости, задаваемой точкой A и прямой BC, проводим горизонталь $A—I$ (рис. 155, *ж*) и поворачиваем вокруг нее точку B. Точка B перемещается в пл. R (заданной на чертеже следом R_h), перпендикулярной к $A—I$; в точке O находится центр вращения точки B. Определяем теперь натуральную величину радиуса вращения BO (рис. 155, *з*). В требуемом положении, т. е. когда пл. T, определяемая точкой A и прямой BC, станет $\parallel$ пл. H, точка B получится на R_h на расстоянии Ob_1 от точки O (может быть и другое положение на том же следе R_h, но по другую сторону от O). Точка b_1 — это горизонт. проекция точки B после перемещения ее в положение B_1 в пространстве, когда плоскость, определяемая точкой A и прямой BC, заняла положение T.

Проведя (рис. 155, *и*) прямую b_1l, получаем горизонт. проекцию прямой BC, уже расположенной $\parallel$ пл. H в одной плоскости с A. В этом положении расстояние от a до b_1l равно искомому расстоянию l. Плоскость P, в которой лежат заданные элементы, можно совместить с пл. H (рис. 155, *к*), повернув пл. P вокруг ее горизонт. следа. Перейдя от задания плоскости точкой A и прямой BC к заданию прямыми BC и $A—I$ (рис. 155, *л*), находим следы этих прямых и проводим через них следы P_v и P_h. Строим (рис. 155, *м*) совмещенное с пл. H положение фронт. следа — P_{v0}.

Через точку a проводим горизонт. проекцию фронтали; совмещенная фронталь проходит через точку 2 на следе P_h параллельно P_{v0}. Точка A_0 — совмещенное с пл. H положение точки A. Аналогично находим точку B_0. Прямая BC в совмещенном с пл. H положении проходит через точку B_0 и точку m (горизонт. след прямой).

Расстояние от точки A_0 до прямой B_0C_0 равно искомому расстоянию l.

Можно выполнить указанное построение, найдя только один след P_h (рис. 155, *н* и *о*). Все построение аналогично повороту вокруг горизонтали (см. рис. 155, *ж*, *з*, *и*): след P_h— это одна из горизонталей пл. P.

Из приведенных для решения данной задачи способов преобразования чертежа предпочтительным является способ вращения вокруг горизонтали или фронтали.

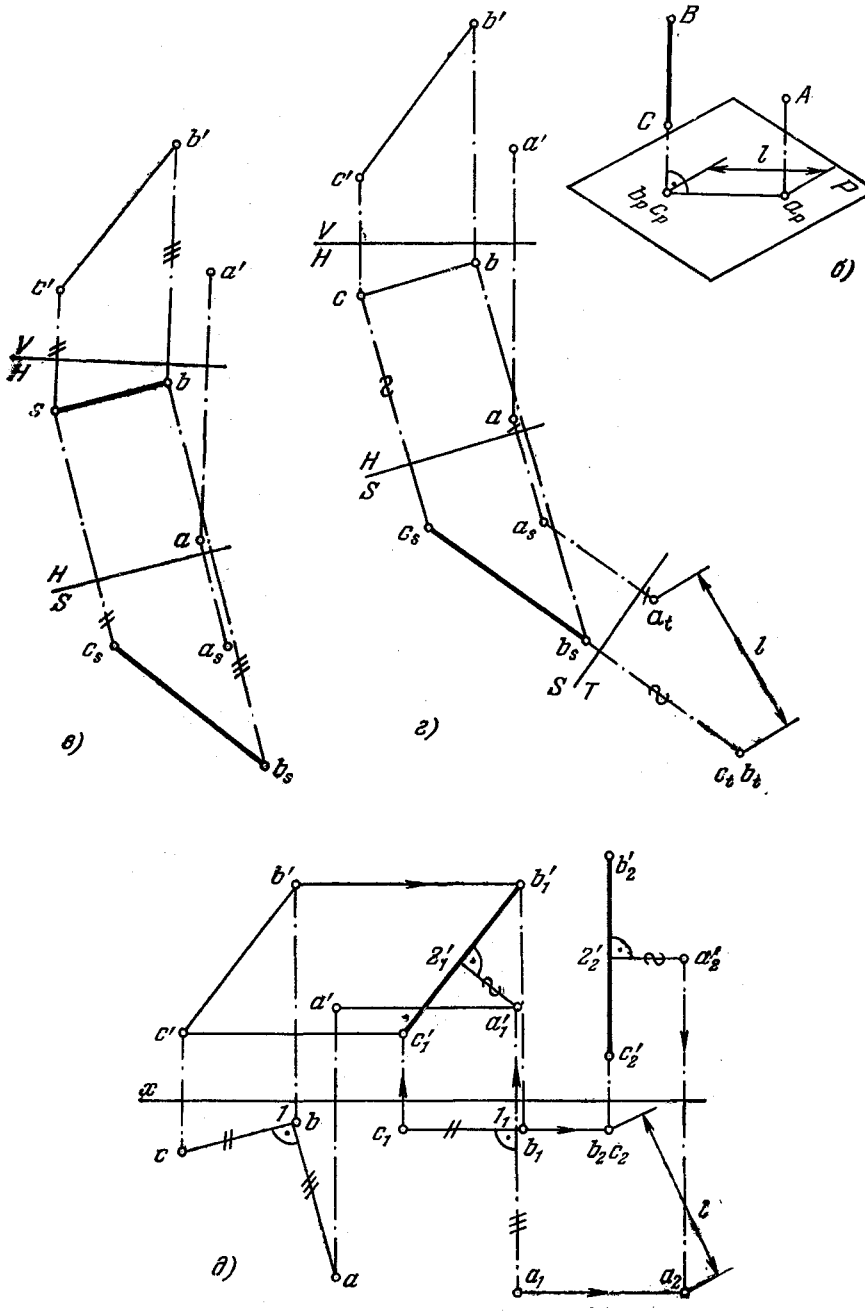

в)
г)
б)
д)
b'
c'
a'
V
H
b
s
a
S
c
c_s
a_s
b_s
a_t
b_t
c_t
T
l
B
A
C
P
b_p c_p
a_p
b_1'
$2_1'$
a_1'
c_1'
b_2'
$2_2'$
a_2'
c_2'
x
1
1_1
c_1
b_1
b_2 c_2
a_1
a_2

Рис. 155б—д.

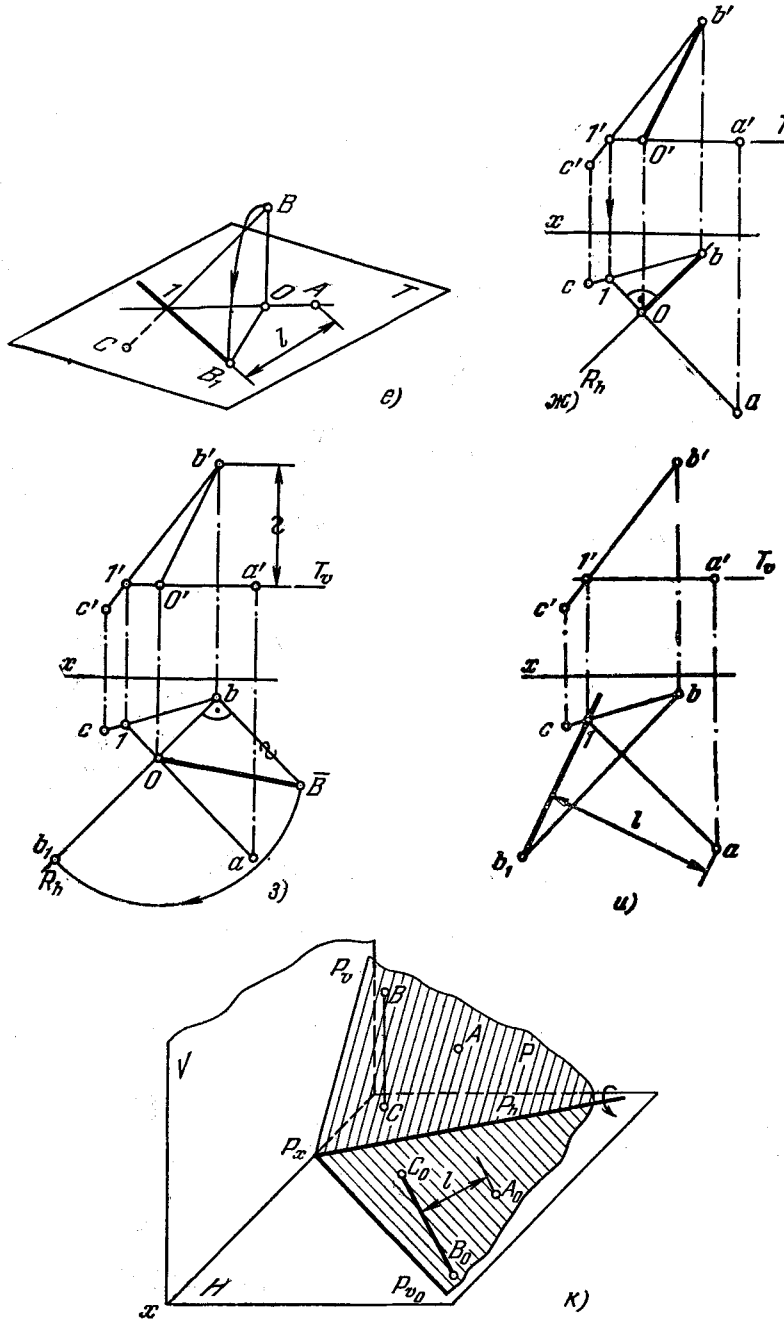

B
1
O
A
T
C
B_1
l
е)
b'
1'
a'
T_v
c'
O'
x
b
c
1
O
R_h
a
ж)
b'
2
1'
a'
T_v
c'
O'
x
b
c
1
O
$\bar{B}$
b_1
R_h
a
з)
b'
1'
a'
T_v
c'
x
b
c
1
l
b_1
a
и)
P_v
B
A
P
V
C
P_h
P_x
C_0
l
A_0
B_0
H
P_{v_0}
x
к)

Рис. 155е—к.

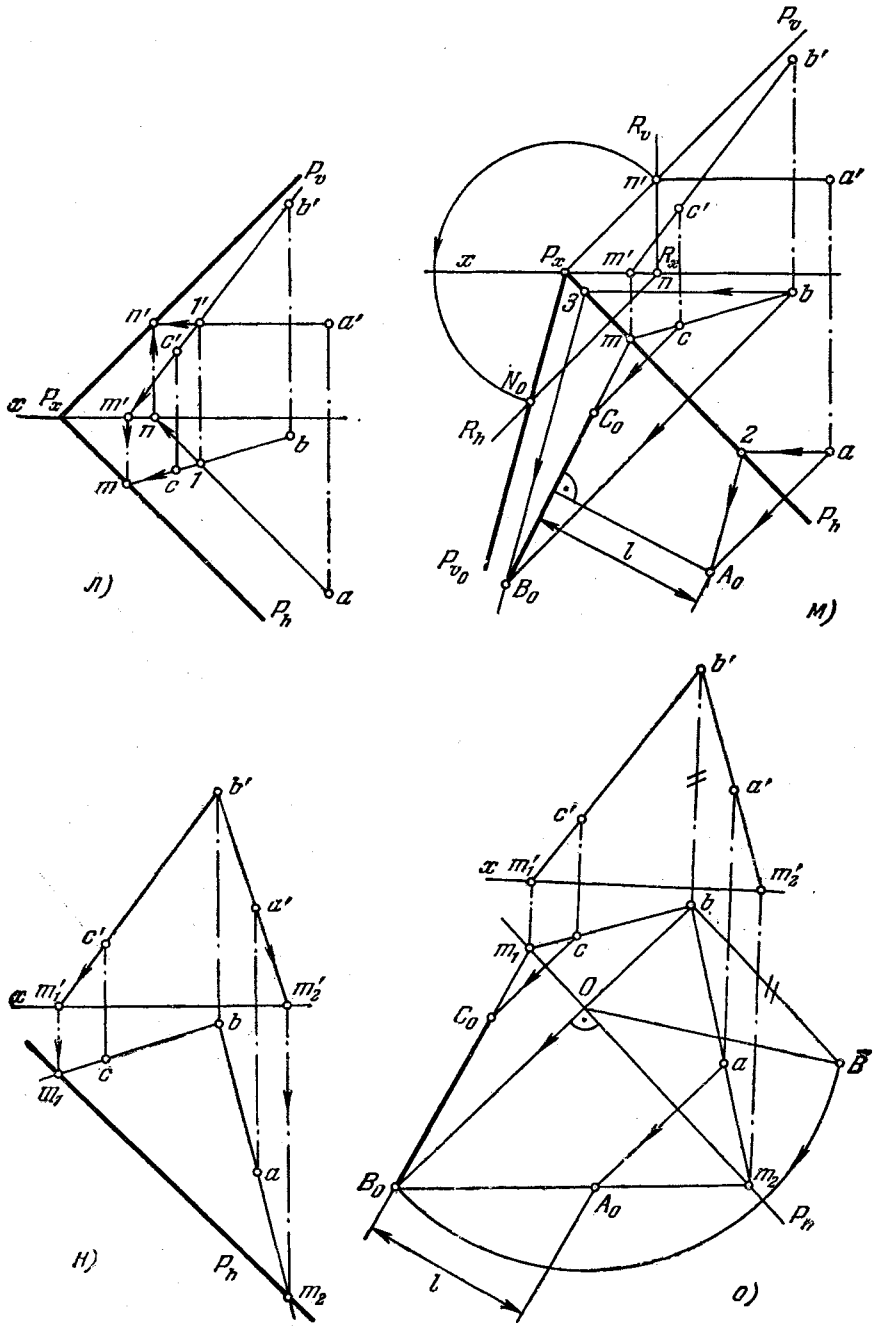


Рис. 155л—о.

158. Дана пирамида $SABC$ (рис. 156). Определить расстояния:

а) от вершины B основания до его стороны AC способом параллельного перемещения;

б) от вершины S пирамиды до сторон BC и AB основания способом вращения вокруг горизонтали;

в) от вершины S до стороны AC основания способом перемены плоскостей проекций.

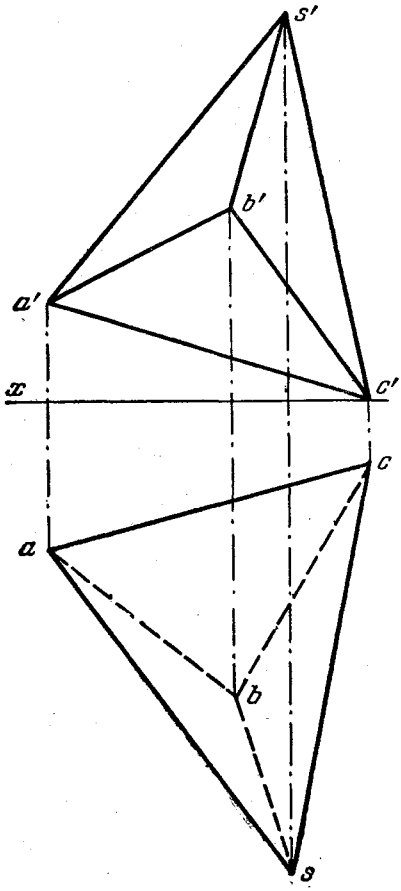


Рис. 156.

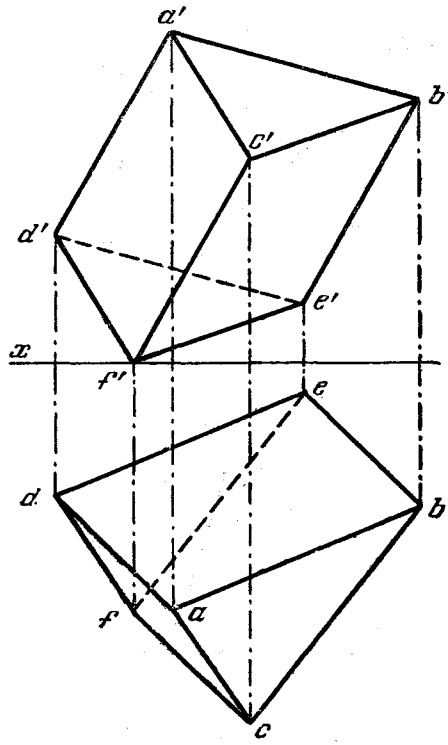


Рис. 157.

159. Дана призма (рис. 157). Определить расстояния:

а) между ребрами AD и CF способом перемены плоскостей проекций;

б) между ребрами BE и CF вращением вокруг фронтали;

в) между ребрами AD и BE способом параллельного перемещения.

160. Определить натуральную величину четырехугольника $ABCD$ (рис. 158) совмещением с пл. H. Пользоваться только горизонтальным следом плоскости.

161*. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 159, *а*) и построить проекции общего к ним перпендикуляра.

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется отрезком (MN) перпендикуляра к обеим прямым (рис. 159, *б*). Очевидно, если одну из прямых расположить перпендикулярно к какой-либо пл. T, то

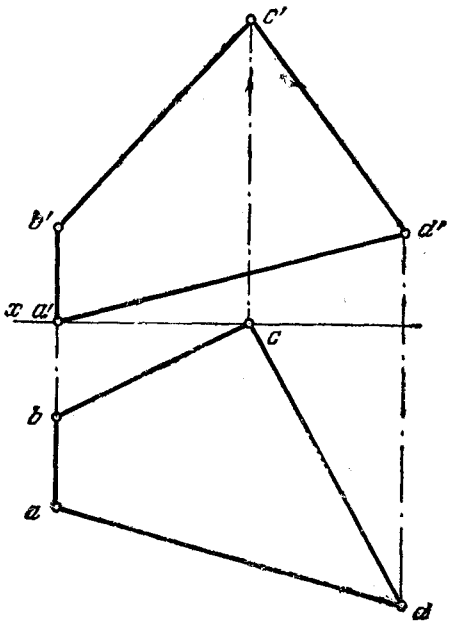


Рис. 158.

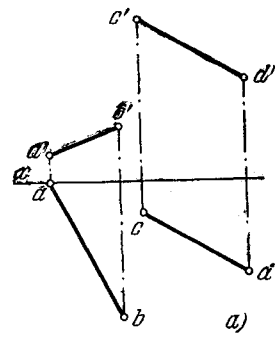


Рис. 159а.

отрезок MN перпендикуляра к обеим прямым окажется параллельным пл. T и его проекция на этой плоскости отобразит искомое расстояние. Проекция прямого угла между MN и AB на пл. T оказывается также прямым углом между m_tn_t и a_tb_t, так как одна из сторон прямого угла AMN, а именно MN, параллельна пл. T.

На рис. 159, *в* и *г* искомое расстояние l определено способом перемены плоскостей проекций. Сначала вводим дополнительную пл. проекций S, перпендикулярную к пл. H и параллельную прямой CD (рис. 159, *в*). Затем вводим еще одну дополнительную пл. T, перпендикулярную к пл. S и перпендикулярную к той же прямой CD (рис. 159, *г*). Теперь можно построить проекцию общего перпендикуляра m_tn_t, проведя m_tn_t из точки $c_t(d_t)$ перпендикулярно к проекции a_tb_t. Точки m_t и n_t— проекции точек пересечения этого перпендикуляра с прямыми AB и CD. По точке m_t (рис. 159, *д*) находим m_s на a_sb_s: проекция m_sn_s должна быть параллельна оси T/S. Далее, по m_s и n_s находим m и n на ab и cd, а по ним m' и n' на $a'b'$ и $c'd'$.

На рис. 159, *е* показано решение этой задачи по способу параллельного перемещения. Сначала ставим прямую CD параллельно пл. V: проекция $c_1d_1 \parallel x$. Далее перемещаем прямые CD и AB из положений C_1D_1 и A_1B_1 в положения C_2D_2 и A_2B_2 так, чтобы C_2D_2 расположилась перпендикулярно H: проекция $c'_2d'_2 \perp x$. Отрезок искомого перпендикуляра располагается $\parallel$ пл. H, и, следовательно, m_2n_2 выражает искомое расстояние l между AB и CD. Находим положение проекций m'_2 и n'_2 на $a'_2b'_2$ и $c'_2d'_2$, затем проекций m_1 и m'_1, n_1 и n'_1 и, наконец, проекций m' и n', m и n.

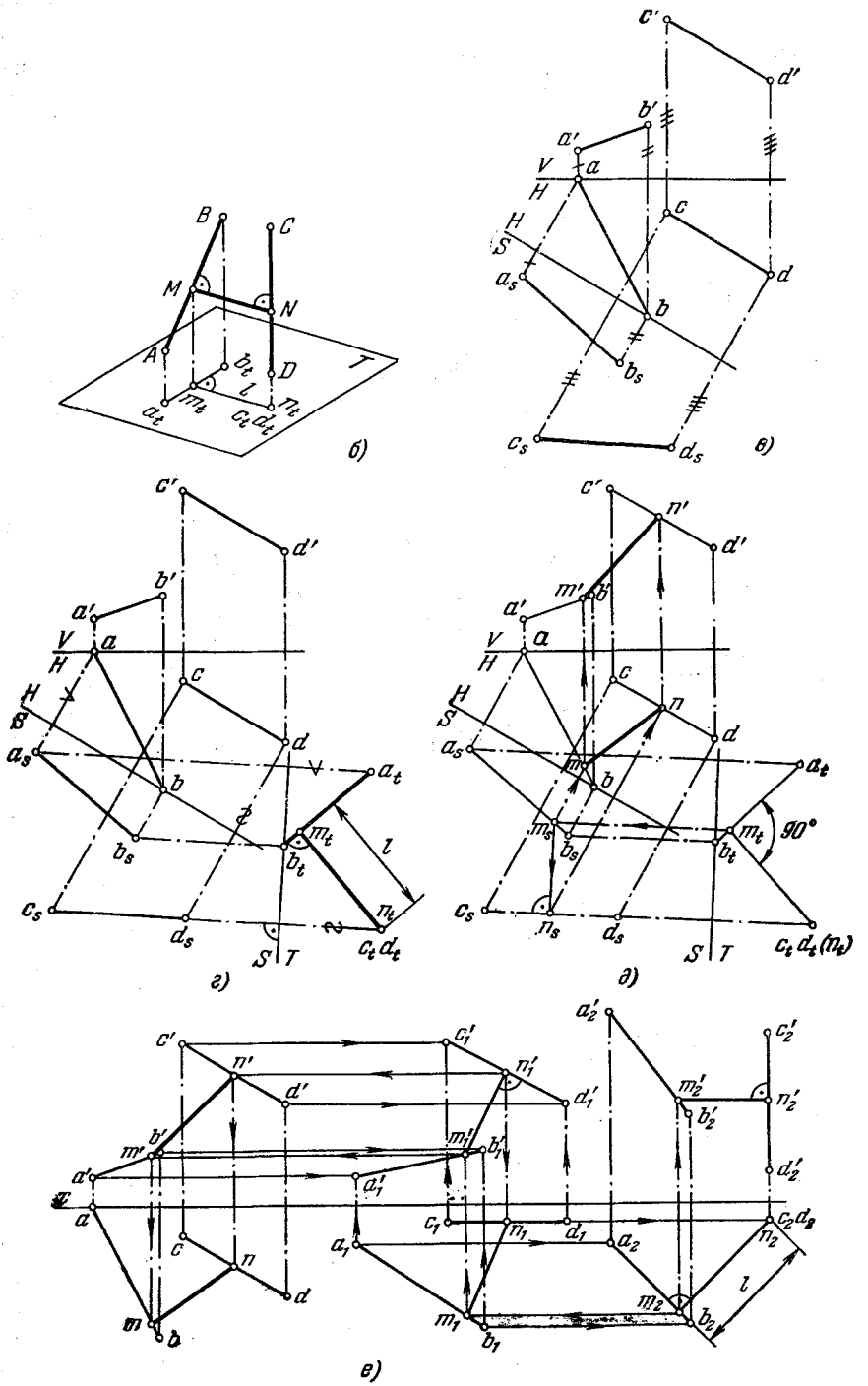


Рис. 159б—е.

162. Дана пирамида $SABC$ (рис. 160). Определить расстояние между ребром SB и стороной AC основания пирамиды и построить проекции общего перпендикуляра к SB и AC, применив способ перемены плоскостей проекций.

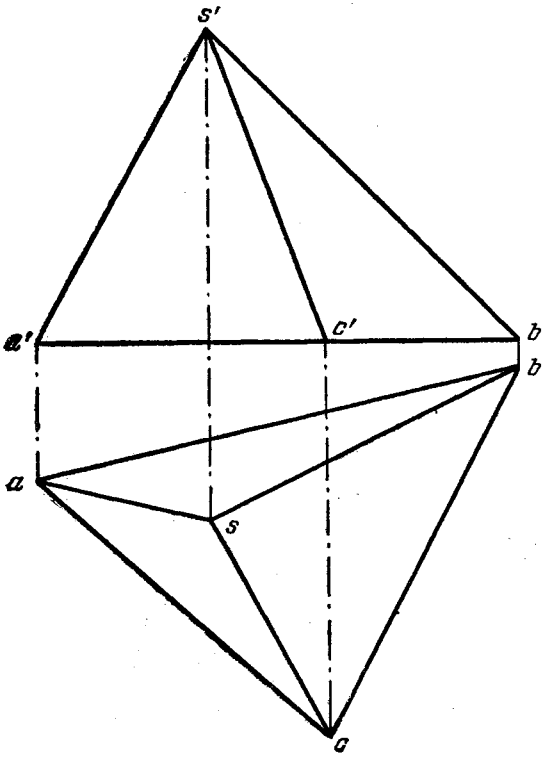


Рис. 160.

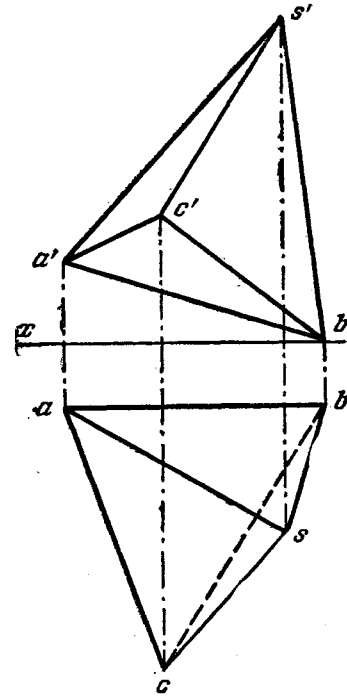


Рис. 161.

163. Дана пирамида $SABC$ (рис. 161). Определить расстояние между ребром SA и стороной BC основания пирамиды и построить проекции общего перпендикуляра к SA и BC, применив способ параллельного перемещения.

164*. Определить расстояние от точки A до плоскости в случаях, когда плоскость задана: а) треугольником BCD (рис. 162, *а*); б) следами (рис. 162, *б*).

Решение. Как известно, расстояние от точки до плоскости измеряется величиной перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость. Это расстояние проецируется на какую-либо пл. проекций в натуральную величину, если данная плоскость перпендикулярна к пл. проекций (рис. 162, *в*). Добиться такого положения можно, преобразуя чертеж, например, способом перемены пл. проекций. Введем пл. S (рис. 162, *г*), перпендикулярную к пл. треугольника BCD. Для этого проводим в пл. треугольника горизонталь $B—1$ и располагаем ось проекций S перпендикулярно к проекции $b—1$ горизонтали. Строим проекции точки и плоскости — a_s и отрезок c_sd_s. Расстояние от a_s до c_sd_s равно искомому расстоянию l точки до плоскости.

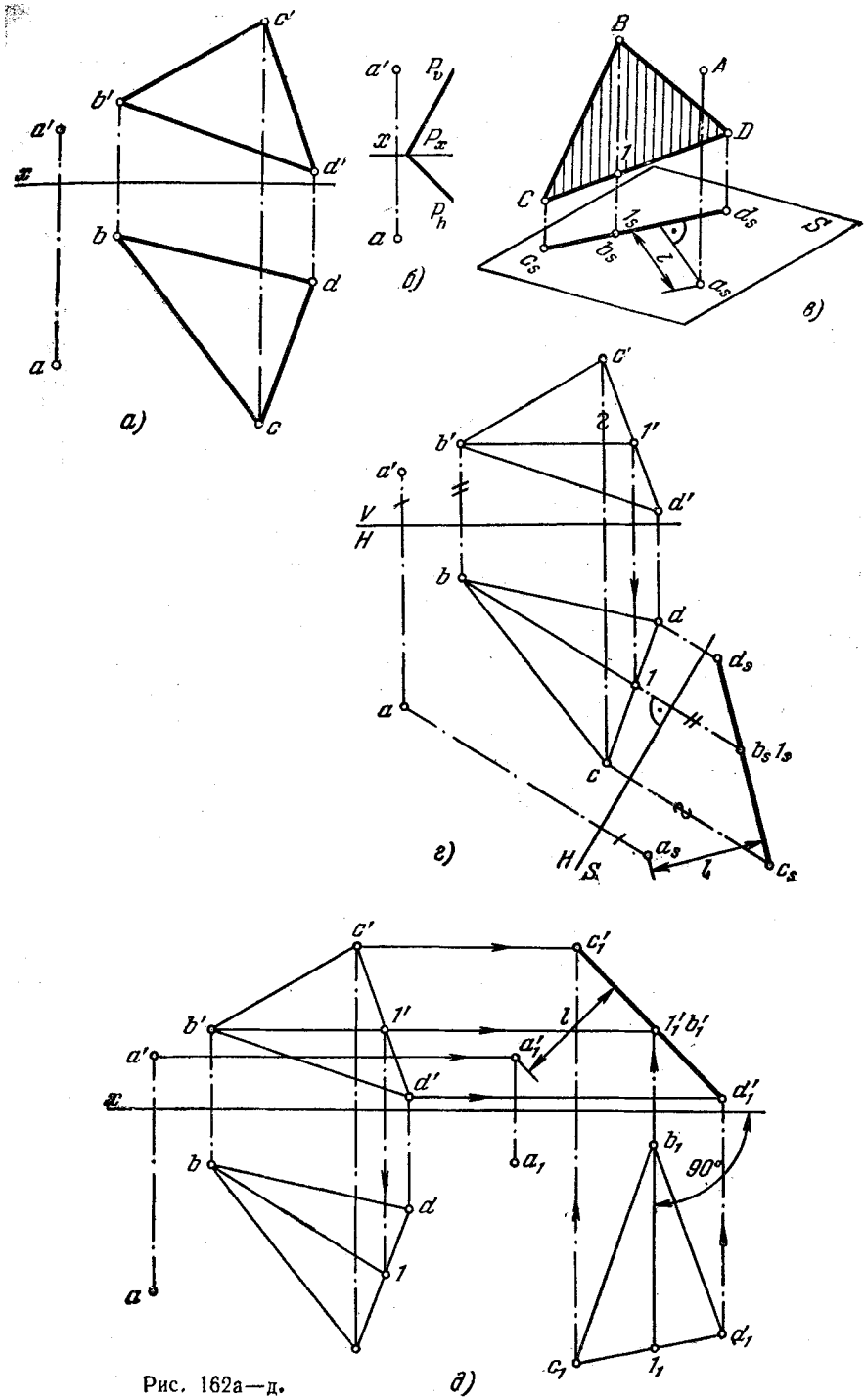
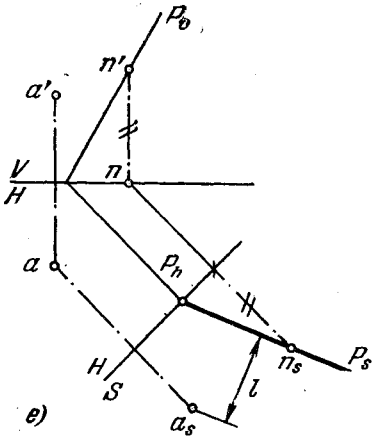


Рис. 162а—д.

На рис. 162, *д* применен способ параллельного перемещения. Перемещаем всю систему до тех пор, пока горизонталь *B—1* плоскости не станет перпендикулярна к плоскости *V*: проекция b_1l_1 должна быть перпендикулярна к оси *x*. В этом положении плоскость треугольника станет фронтально-проецирующей, и расстояние *l* от точки *A* до нее получится на пл. *V* без искажения.



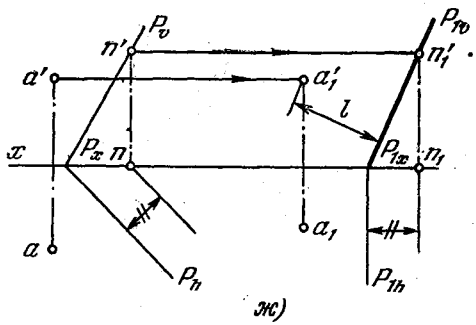


Рис. 162е, ж.

На рис. 162, *б* плоскость задана следами. Вводим (рис. 162, *е*) дополнительную пл. *S*, перпендикулярную к пл. *P*: ось *S/H* перпендикулярна к P_h. Дальнейшее ясно из чертежа. На рис. 162, *ж* задача решена при помощи одного перемещения: пл. *P* переходит в положение P_1, т. е. становится фронтально-проецирующей. След P_{1h} перпендикулярен к оси *x*. Строим в этом положении плоскости фронт. след горизонтали — точку n_1', n_1. След P_{1v} пройдет через P_{1x} и n_1'. Расстояние от a'_1 до P_{1v} равно искомому расстоянию *l*.

165. Дана пирамида *SABC* (см. рис. 160). Определить расстояние от точки *A* до грани *SBC* пирамиды, применив способ параллельного перемещения.

166. Дана пирамида *SABC* (см. рис. 161). Определить высоту пирамиды, применив способ параллельного перемещения.

167*. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми *AB* и *CD* (см. рис. 159, *а*) как расстояние между параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

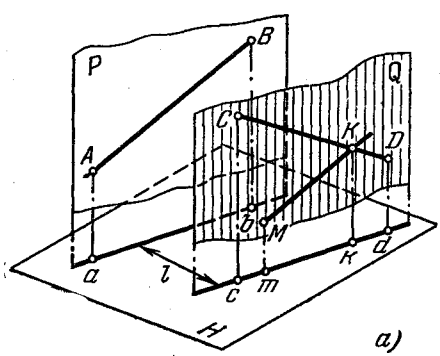


Рис. 163а.

Решение. На рис. 163, *а* показаны параллельные между собой плоскости *P* и *Q*, из которых пл. *Q* проведена через *CD* параллельно *AB*, а пл. *P* — через *AB* параллельно пл. *Q*. Расстояние между такими плоскостями и считается расстоянием между скрещивающимися прямыми *AB* и *CD*. Однако можно ограничиться построением только одной плоскости, например *Q*, параллельно *AB*, а затем определить расстояние хотя бы от точки *A* до этой плоскости.

На рис. 163, б показана плоскость Q, проведенная через CD параллельно AB; в проекциях проведено $c'e' \parallel a'b'$ и $ce \parallel ab$. Применяя способ перемены пл. проекций (рис. 163, в), введем дополнительную пл. S, перпендикулярную к пл. V и в то же время

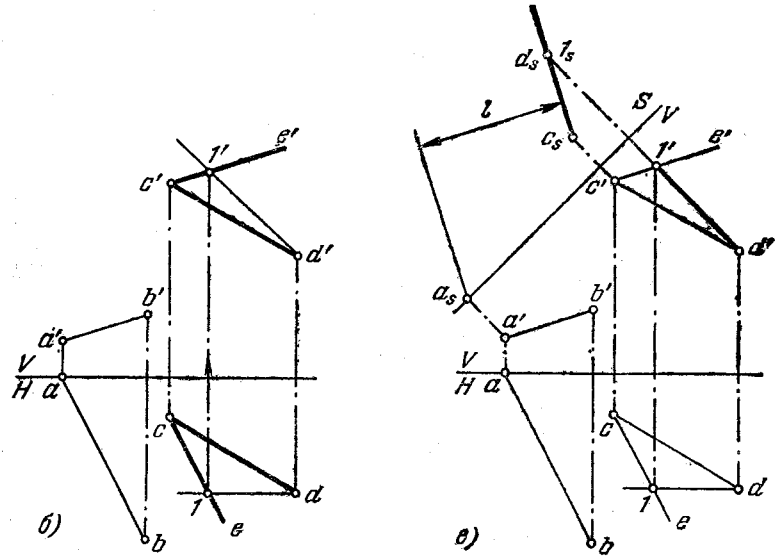


Рис. 163б, в.

перпендикулярную к пл. Q. Чтобы провести ось S/V, берем в этой плоскости фронталь D—1. Теперь проводим S/V перпендикулярно к $d'1'$ (рис. 163, в). Пл. Q изобразится на пл. S в виде прямой $o_s d_s$. Остальное ясно из чертежа.

168. Дана пирамида $SABC$ (см. рис. 160). Определить расстояние между ребрами SC и AB. Применить: 1) способ перемены пл. проекций, 2) способ параллельного перемещения.

169*. Определить расстояние между параллельными плоскостями, из которых одна задана прямыми AB и AC, а другая — прямыми DE и DF (рис. 164, а). Выполнить также построение для случая, когда плоскости заданы следами (рис. 164, б).

Решение. Расстояние (рис. 164, в) между параллельными плоскостями можно определить, проведя перпендикуляр из любой точки одной плоскости на другую плоскость. На рис. 164, г введена дополнительная пл. S перпендикулярно к пл. H и к обеим данным плоскостям. Ось S/H перпендикулярна к горизонт. проекции горизонтали, проведенной в одной из плоскостей. Строим проекцию этой плоскости и точки D другой плоскости на пл. S. Расстояние точки d_s до прямой $1_s a_s$ равно искомому расстоянию между параллельными плоскостями.

На рис. 164, д дано другое построение (по способу параллельного перемещения). Для того чтобы плоскость, выраженная пересекающимися прямыми AB и AC, оказалась перпендикулярна к пл. V, горизонт. проекцию горизонтали этой плоскости ставим перпендикулярно к оси x: $1_1 2_1 \perp x$. Расстояние между фронт. проекцией d'_1 точки D и прямой $a'_1 2'_1$ (фронт. проекцией плоскости) равно искомому расстоянию между плоскостями.

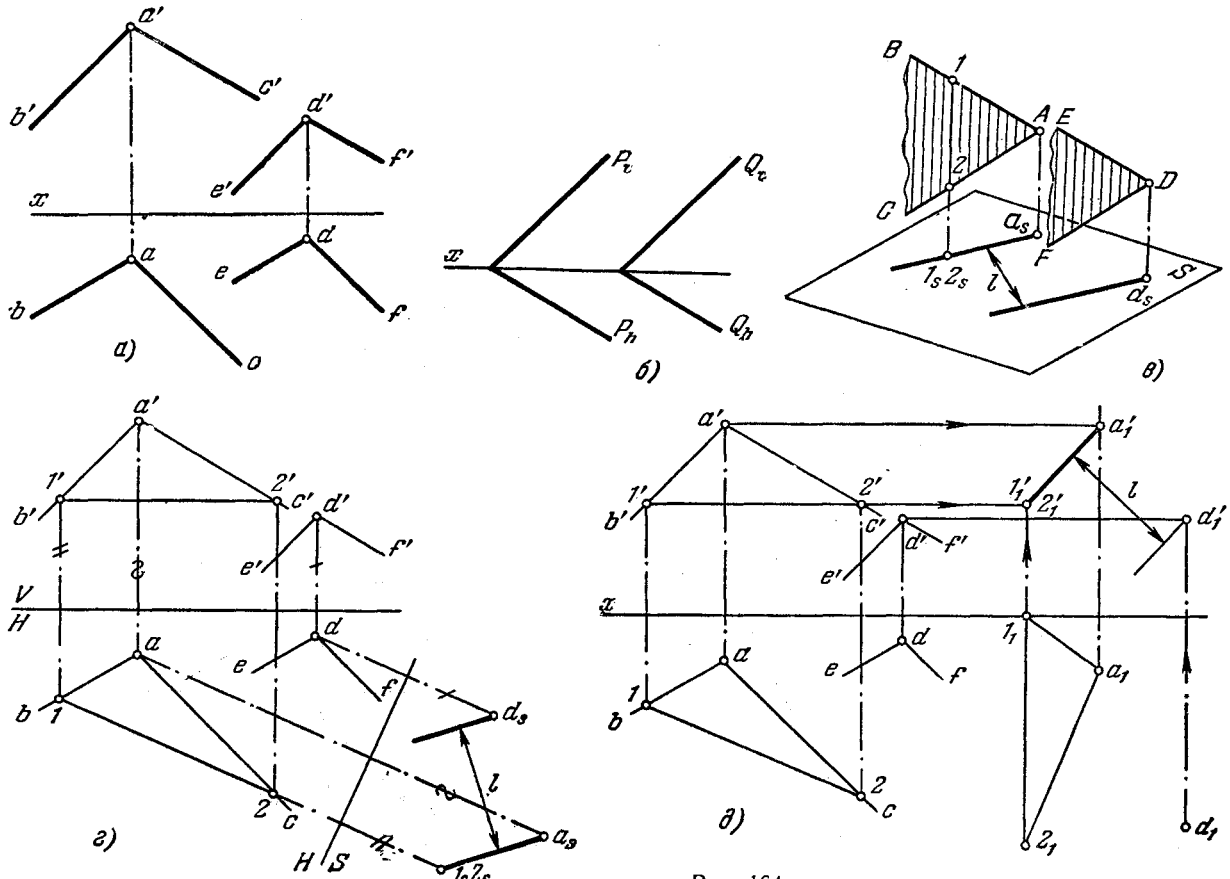
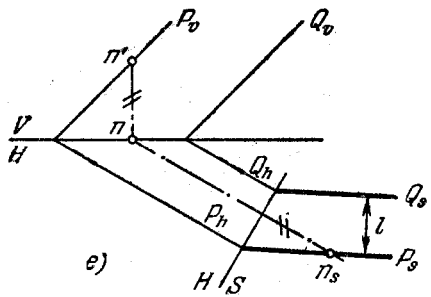


Рис. 164а—д.



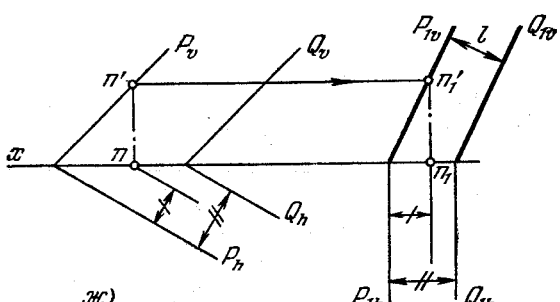


Рис. 164 е, ж.

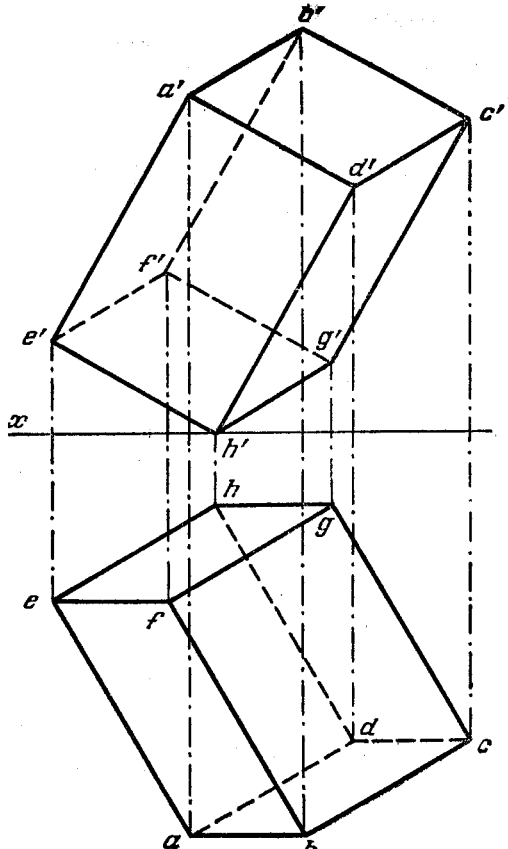


Рис. 165.

На рис. 164, *е* показано введение дополнительной пл. S, перпендикулярной к пл. H и к данным плоскостям P и Q (ось S/H перпендикулярна к следам P_h и Q_h). Строим следы P_s и Q_s. Расстояние между ними (см. рис. 164, *в*) равно искомому расстоянию l между плоскостями P и Q.

На рис. 164, *ж* показано перемещение плоскостей P и Q в положение P_1 и Q_1, когда горизонт. следы оказываются перпендикулярными к оси x. Расстояние между новыми фронт. следами P_{1v} и Q_{1v} равно искомому расстоянию l.

170. Дан параллелепипед $ABCDEFGH$ (рис. 165). Определить расстояния: а) между основаниями параллелепипеда — l_1; б) между гранями $ABFE$ и $DCGH$ — l_2; в) между гранями $ADHE$ и $BCGF$—l_3.

§ 19. Определение величины углов

171*. Определить углы наклона прямой AB к пл. V и пл. H (рис. 166, *а*).

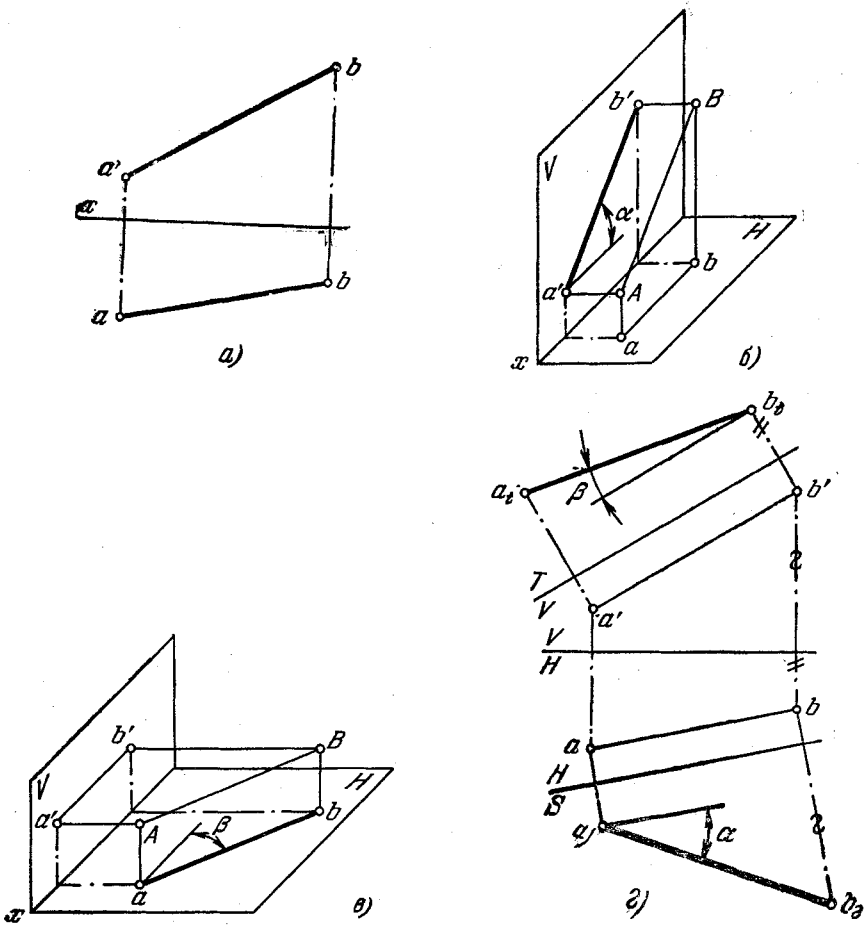


Рис. 166а—г.