

На том же рис. 229, в показано, что можно, например, построить проекцию  $b'$  точки  $B$ , принадлежащей сфере, по заданной проекции  $b''$  иначе, чем это сделано для точки  $A$ , а именно: представить себе сечение сферы плоскостью, параллельной пл.  $V$ , по окружности радиуса  $O'_2 b'$ , найти положение горизонт. проекции этой окружности и на ней взять проекцию  $b'$ . Проекцию  $b''$  можно найти, построив профильную проекцию окружности радиуса  $O'_2 b'$ .

Можно было бы представить себе плоскость, проходящую через заданную точку параллельно пл.  $W$ . Это показано на рис. 229, в на примере нахождения проекций  $c'$  и  $c$  точки  $C$  по заданной ее проекции  $c''$ . Плоскость, параллельная пл.  $W$ , рассчитает сферу по окружности радиуса  $O'_2 4' = O''_2 4''$ . Находим на профильной проекции этой окружности проекцию  $c''$ . Затем находим проекцию  $c$ .

Все построения на рис. 229, в выполнены в предположении, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  даны на той части сферы, которая видима на пл.  $V$ .

На рис. 229, г найдена проекция  $a$  по заданной  $a'$  и проекция  $b'$  по заданной  $b$ ; точки принадлежат поверхности тора. Применены параллели поверхности.

На рис. 229, д по заданным проекциям  $a'$  и  $b'$  точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих прямой винтовой поверхности, найдены проекции  $a$  и  $b$ . Это сделано путем отнесения точек к соответствующим положениям образующей — прямой линии. Горизонт. проекции образующих направлены радиально, а фронт. проекции — перпендикулярно к фронту проекции оси поверхности.

Для нахождения фронт. проекции точки  $B$ , принадлежащей косой винтовой поверхности (рис. 229, е), по заданной ее горизонт. проекции  $b$  также использована прямолинейной образующей поверхности. Ее горизонт. проекция определена точками 1 и 2, по ним взяты точки  $1'$  и  $2'$  на фронте проекции винтовых линий, и проведена проекция  $1' 2'$ , на которой и найдена точка  $b'$ . Точность построения (так же, как и на рис. 229, д) зависит от тщательности построения синусоид — фронт. проекций винтовых линий. Чтобы повысить точность, можно применить расчет подъема точек на фронт. проекции в зависимости от углового перемещения на горизонт. проекции. Например, точка, образующая винтовую линию, в положении 1 переместилась вдоль оси цилиндра на долю шага, соответствующую доле полного поворота вокруг оси:

$$\frac{I'_1 I'}{\text{шаг}} = \frac{\widehat{OI}}{360^\circ}.$$

Что же касается нахождения горизонт. проекции точки  $A$  по заданной проекции  $a'$  (см. рис. 229, е), то здесь применено сечение косой винтовой поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее оси. Получающаяся при этом спираль Архимеда изобразится без искажения на горизонте проекций. Проведя фронт. проекцию спирали Архимеда — отрезок  $3' 4'$ , находим проекции точек  $3$  и  $4$ ; затем делим угол  $\alpha$  на  $n$  равных частей и на такое же число равных частей делим отрезок  $5—4$ , равный  $l$ . Точки спирали получаются в пересечении соответствующих прямых и дуг, как это показано на чертеже. Искомая точка  $a$  находится на спирали.

На рис. 229, ж показано построение проекций  $a'$  точки  $A$  и проекции  $b'$  точки  $B$ , принадлежащих косой плоскости (гиперболическому параболонду). Плоскостью параллелизма является пл.  $H$ . Через заданную проекцию  $a'$  проведена проекция  $1' 2'$  образующей этой поверхности ( $1' 2' \parallel$  оси  $x$ ), построена проекция  $1—2$ , на которой и получена искомая горизонт. проекция точки  $A$ .

Для нахождения проекции  $b'$  проведена через точку  $b$  прямая  $3—4$  — горизонт. проекция некоторой линии, принадлежащей поверхности. По точкам пересечения прямой  $3—4$  с образующими ( $5—6$ ,  $4—8$  и др.) найдены точки для проведения фронт. проекции  $3' 4'$  полученной кривой, на которой определяется искомая проекция  $b'$ .

## § 22. Пересечение поверхности плоскостью и прямой линией

**247\***. Построить проекции части прямого кругового цилиндра, остающейся после пересечения его фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  (рис. 230). Дать натуральный вид сечения и полную развертку поверхности.

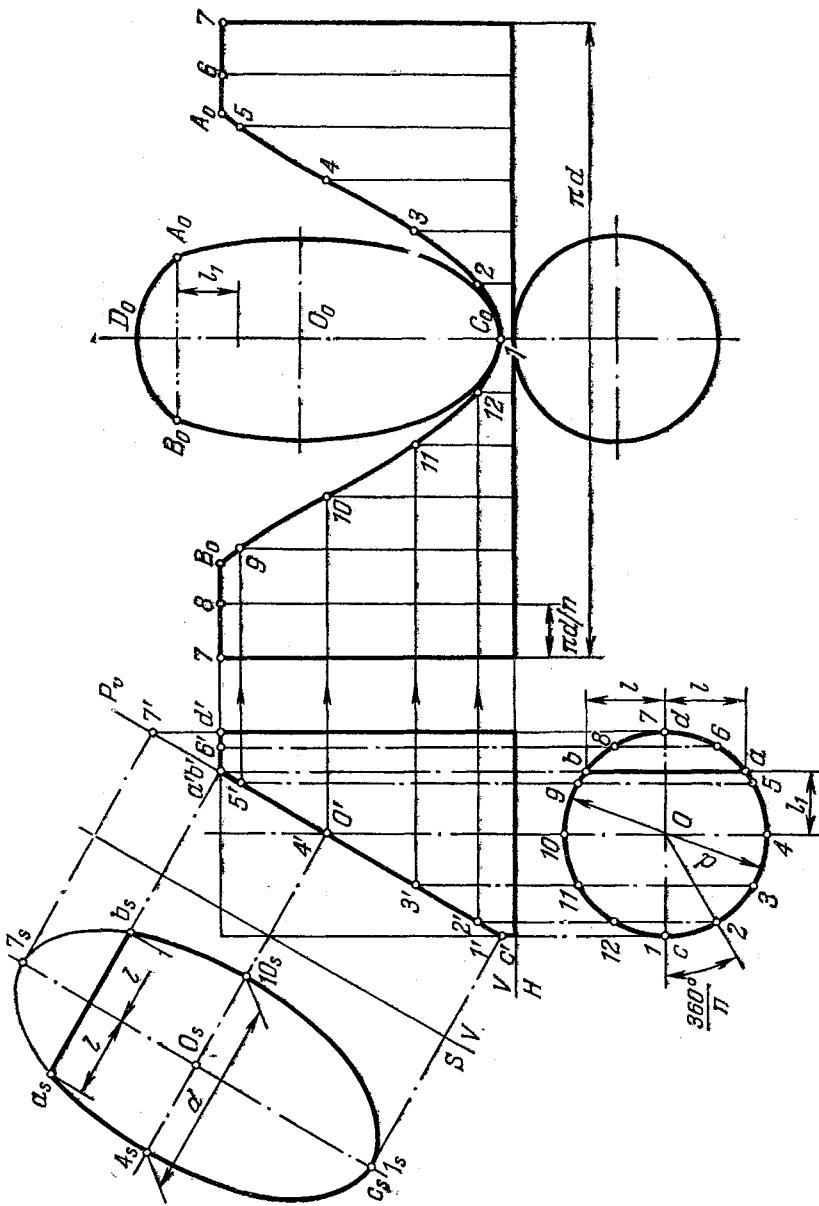


Рис. 230.

**Решение.** Судя по положению секущей пл.  $P$  относительно оси цилиндра, линия на его боковой поверхности, получаемая в пл.  $P$ , представляет собой эллипс с центром в  $O$  (на оси цилиндра); большая ось эллипса равна отрезку  $l'l''$ , а малая — диаметру цилиндра. Учитывая, что пл.  $P$  пересекает и одно из оснований цилиндра, получаем сечение в виде фигуры, ограниченной дугой эллипса и отрезком прямой  $AB$ . Для построения этой фигуры применен способ перемены плоскостей проекций, а именно введена дополнительная пл.  $S$ , перпендикулярная к пл.  $V$  и параллельная пл.  $P$ . Построение можно было бы осуществить, не вводя пл.  $S$  и осей  $V/H$  и  $S/V$ , а пользуясь большой осью эллипса для откладывания от нее отрезков, взятых на горизонт. проекции, как, например, отрезка  $l$  для получения точек  $a_3$  и  $b_3$ .

Примененное на рис. 230 деление окружности основания на некоторое число равных между собою дуг (взято 12 дуг) представляет собою обычный прием для построения развертки в подобных случаях. Полная развертка составлена из а) развертки боковой поверхности, ограниченной пятью отрезками прямой линии и кривой  $A_0C_0B_0$  — синусоидой, в которую развернулся эллипс, б) круга основания цилиндра, в) натурального вида сечения, г) сегмента, полученного на верхнем основании.

**248\***. Найти точки пересечения поверхности цилиндра прямой линией (рис. 231, а).

**Решение.** Применяем для решения задачи общий прием построения точек пересечения прямых линий с любыми поверхностями, а именно: 1) заключение прямой в некоторую плоскость, 2) построение линии пересечения поверхности этой плоскостью, 3) нахождение точки пересечения заданной прямой и этой линии. В данной задаче возьмем вспомогательную плоскость так, чтобы она рассекла поверхность цилиндра по прямым линиям — образующим. Это наиболее простой прием для заданного случая. На рис. 231, б показано, что вспомогательная пл.  $P$  определяется прямой  $AB$  и пересекающей ее прямой  $CM_2$ , параллельной образующим цилиндра. Такая плоскость рассечет цилиндр по его образующим.

Построение показано на рис. 231, в. Чтобы определить образующие, по которым плоскость, проведенная через  $AB$ , пересечет цилиндр, построены горизонт. следы прямой  $AB$  (точка  $m_1m_1'$ ) и прямой  $CM_2$  (точка  $m_2m_2'$ ). Через следы прямых проведен горизонт. след плоскости — прямая  $m_1m_2$ . Этот след пересекает в точках  $l$  и  $2$  окружность — след цилиндрической поверхности на той же пл.  $H$ . Проведя  $l-k$  и  $2-n$  параллельно  $m_2m_2'$ , получаем точки  $k$  и  $n$  — горизонт. проекции искомых точек пересечения  $AB$  с поверхностью цилиндра, а затем  $k'$  и  $n'$  — фронт. проекции этих точек.

**249.** Найти точки пересечения поверхности цилиндра прямой линией (рис. 232, а и б).

**250\***. Построить проекции части прямого кругового конуса, оставшейся после пересечения его фронтально-проецирующей плоскостью (рис. 233, а и б). Дать натуральный вид сечения и полную развертку поверхности изображенного тела.

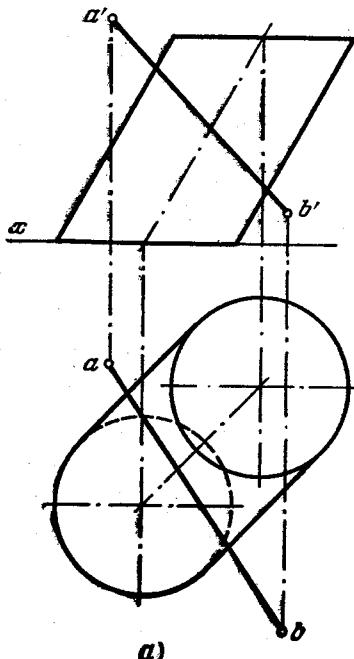
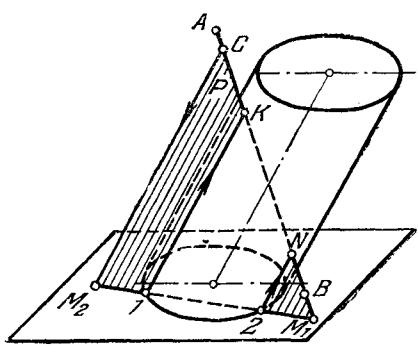


Рис. 231а.



б)

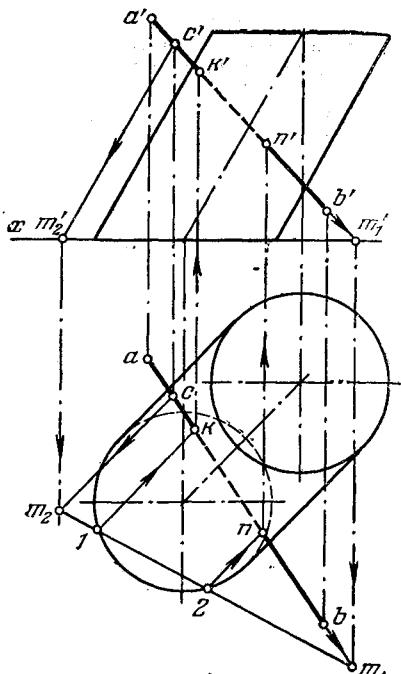
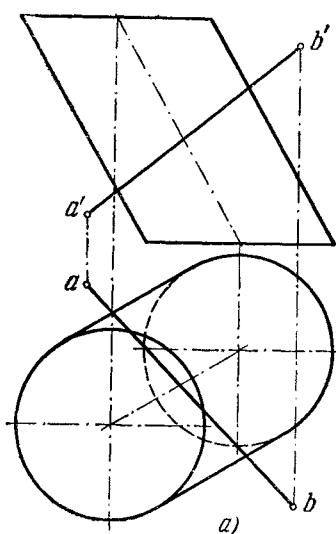
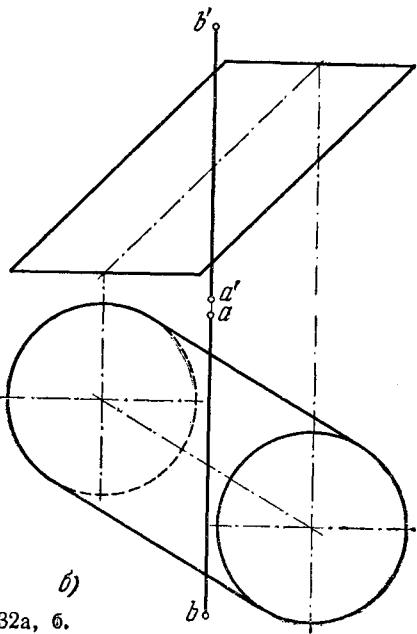


Рис. 231б, в.

в)



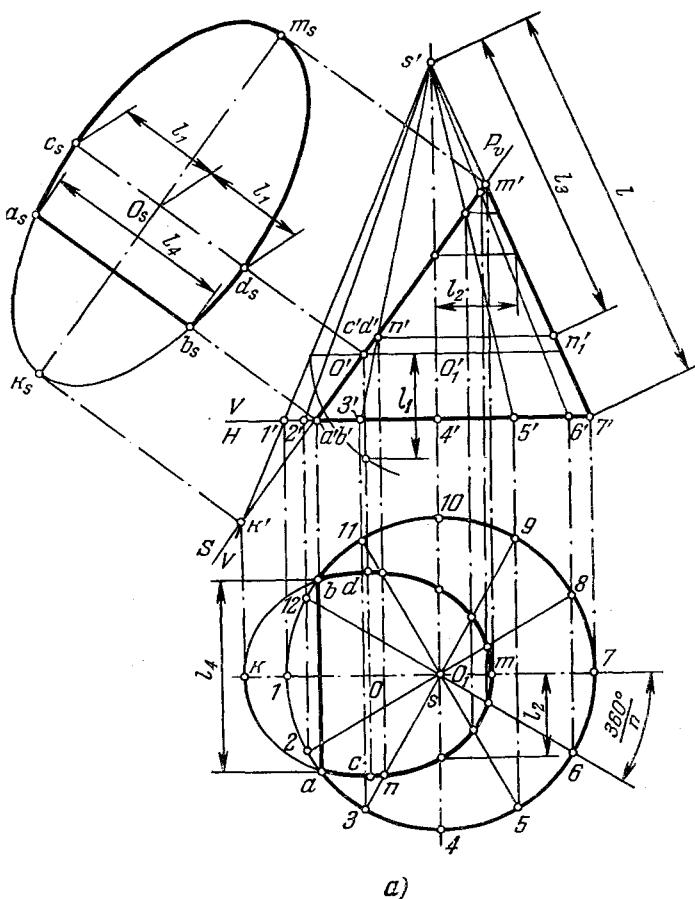
а)



б)

Рис. 232а, б.

**Решение.** Судя по положению секущей плоскости относительно образующих конуса, линия на его боковой поверхности, получаемая в пл.  $P$ , представляет собою эллипс. Большая ось этого эллипса может быть представлена отрезком  $m'k'$ . Деля  $m'k'$  пополам, получаем фронтальную проекцию центра эллипса — точку  $O'$ , а по ней и проекцию  $O$ . Теперь можно найти малую полуось, проведя секущую плоскость



a)

Рис. 233а.

через точку  $O$  перпендикулярно к оси конуса и взяв в полученном круговом сечении полухорду  $l_1$ . Малая ось эллипса равна  $2l_1$ . Горизонтальная проекция эллипса также представляет собою эллипс; его большая ось  $mk$ , а малая —  $cd$ , равная  $2l_1$ .

Последующие построения подобны выполненным на рис. 230. Натуральный вид фигуры сечения построен при помощи способа перемены пл. пр., причем дополнительная пл.  $S$  взята совпадающей с пл.  $P$ . Замечание на стр. 187 о том, что построение можно было бы осуществить, не вводя пл.  $S$  и осей  $V/H$  и  $S/V$ , справедливо и для данного случая.

Зная, что боковая поверхность конуса развертывается в круговой сектор с углом  $\Phi = \frac{d}{l} \cdot 180^\circ$  при вершине, где  $d$  — диаметр основания, а  $l$  — длина образующей конуса, строим сектор с разбивкой его на равные части соответственно разметке

образующих на чертеже конуса. Зная, например, положение образующей  $S-Z$  на чертеже и на развертке, находим положение точки  $N_0$  на развертке при помощи натуральной величины отрезка  $l_3$  образующей от вершины  $S$  до точки  $N$ .

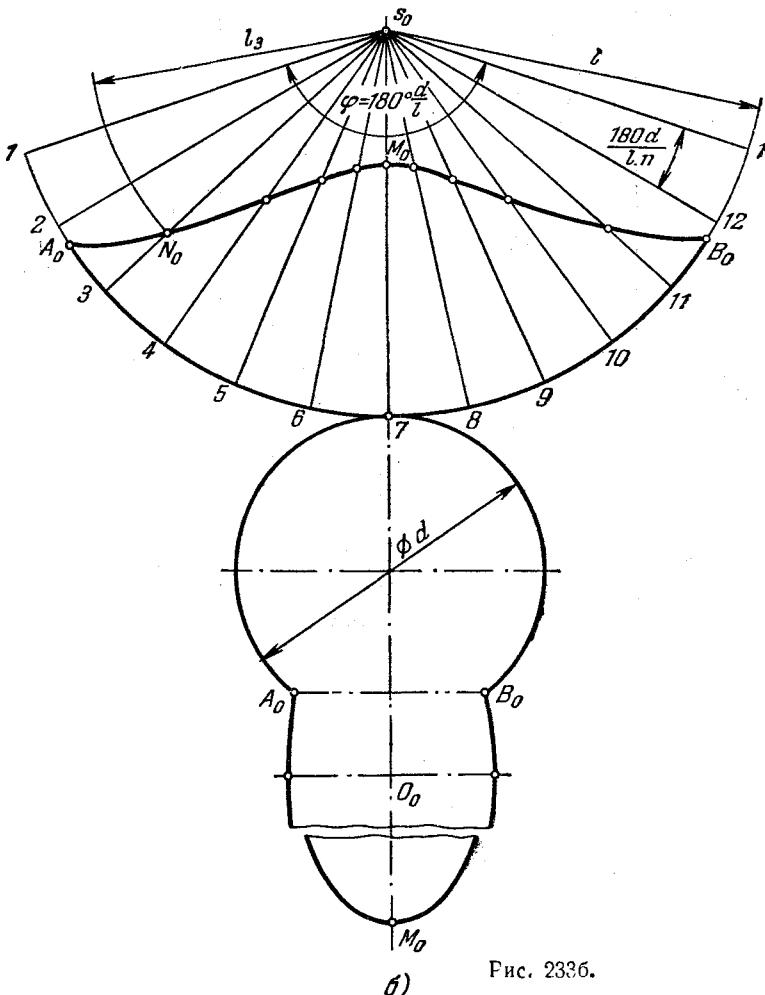


Рис. 233б.

В полную развертку оставшейся части поверхности входят: а) развертка боковой поверхности, ограниченная дугой окружности радиуса  $l$  и построенной кривой  $A_0N_0M_0B_0$ ; б) части круга основания, в) натурального вида сечения, причем круг и сечение граничат по хорде  $A_0B_0$ .

**251\***. Найти точки пересечения поверхности прямого кругового конуса прямой линией (рис. 234, а).

**Решение.** Применяя вспомогательную плоскость, проведенную через данную прямую линию, задаемся целью обеспечить простейшее пересечение конуса этой плоскостью. Секущую плоскость надо провести через вершину конуса. Она будет пересекать конус по прямым линиям (образующим). На рис. 234, б показана пл.  $P$ , проведенная через данную прямую  $AB$  и вершину конуса. Проведя пл.  $T$ ,

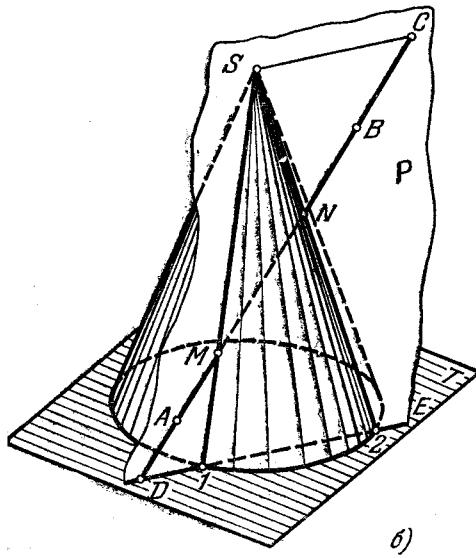
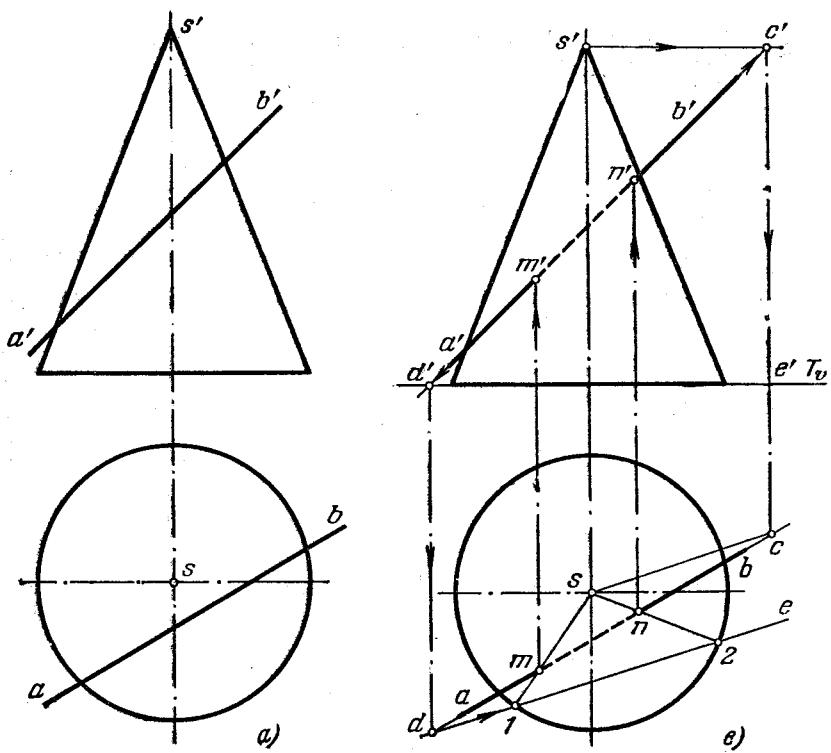


Рис. 234а—в.

перпендикулярную к оси конуса и, следовательно, пересекающую его по окружности, находим на пл.  $T$  линию ее пересечения с пл.  $P$  — прямую  $DE$ . Образующие, по которым пл.  $P$  пересекает конус, определяются вершиной  $S$  и точками  $I$  и  $2$ . На этих образующих и получаются точки  $K$  и  $M$ , в которых прямая  $AB$  пересекает поверхность конуса.

На рис. 234, в пл.  $P$  задана прямой  $AB$  и проведенной через вершину  $S$  прямой  $SC$ , пересекающей  $AB$  в точке  $C$  и параллельной пл.  $T$ . Плоскость  $P$  пересекает пл.  $T$  по прямой  $DE$ , параллельной  $SC$ . Поэтому, найдя на чертеже точку  $D$  (точку пересечения прямой  $AB$  с пл.  $T$ ), проводим  $de \parallel sc$ . Образующие, по которым пл.  $P$  пересекает поверхность конуса, изображены лишь их проекциями  $s-1$  и  $s-2$ . Этого достаточно, чтобы найти горизонт. проекции  $t$  и  $n$  точек пересечения, а по ним проекции  $m'$  и  $n'$ .

Если рассматривать конус, поставленный на пл.  $H$ , то надобность в пл.  $T$  отпадает.

**252.** Найти точки пересечения поверхности конуса прямой линией (рис. 235, а и б).

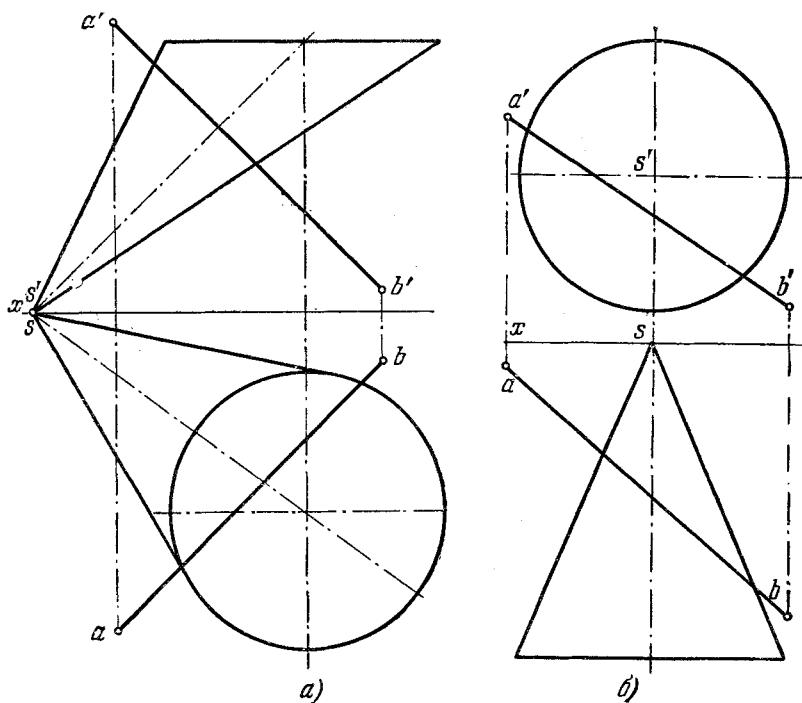


Рис. 235а, б.

**Указание.** Принять плоскость круга в качестве вспомогательной плоскости, подобной пл.  $T$  на рис. 234, в.

**253\*.** Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью сферы (рис. 236, а).

**Решение.** Используя вспомогательную секущую плоскость, проходящую через данную прямую (рис. 236, б), получаем окружность. Искомые точки  $M$  и  $N$  получаются при пересечении этой окружности с прямой линией.

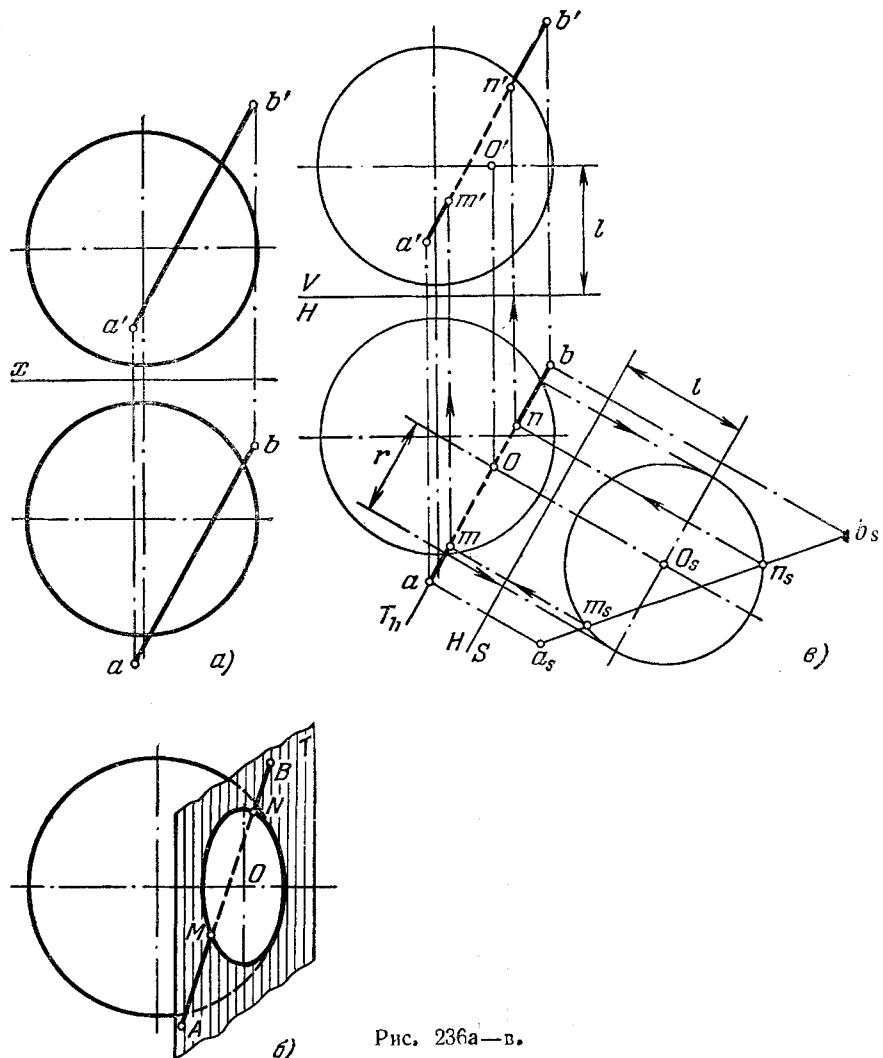


Рис. 236а—в.

На рис. 236, в показаны графические построения с помощью способа перемены пл. пр.

Дополнительная плоскость  $S$  перпендикулярна пл.  $H$  и параллельна вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости  $T$ , проведенной через прямую  $AB$ .

На пл.  $S$  изображаем не данную поверхность сферы, а лишь получаемую на ней окружность от пересечения плоскостью  $T$ . Получив также проекцию  $a_s b_s$ , находим точки  $m_s$  и  $n_s$ , а по ним  $m$  и  $n$  и далее  $m'$  и  $n'$ .

**254.** Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью сферы (рис. 237, а и б).

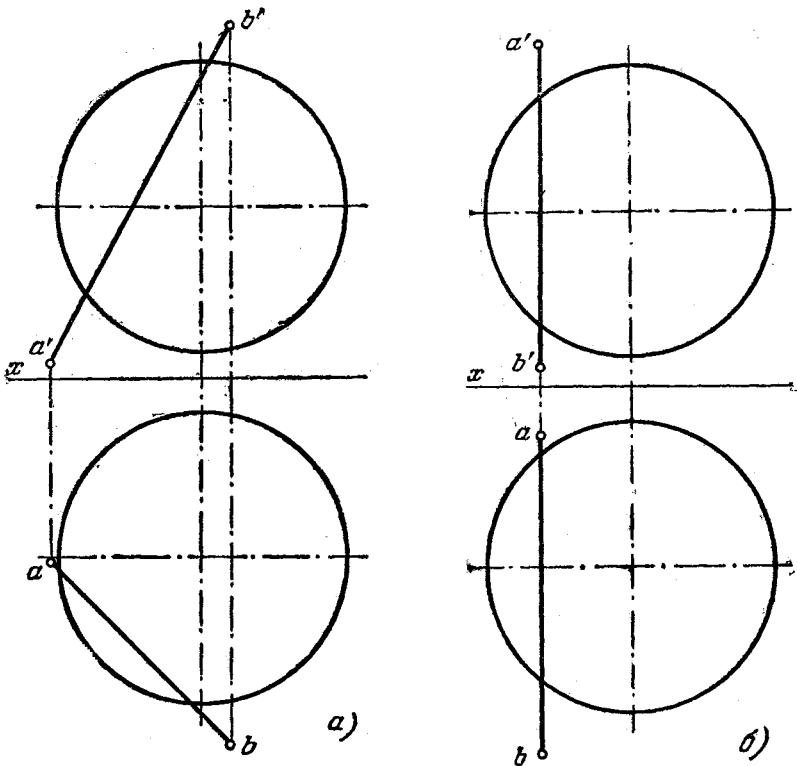


Рис. 237а, б.

**255\*.** Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения (рис. 238, а).

**Р е ш е н и е.** Проводим через прямую  $AB$  (рис. 238, б) горизонтально-проецирующую плоскость  $R$  и строим линию пересечения ею данной поверхности. Точки этой линии находим при помощи параллелей поверхности. Например, проведя дугу окружности радиуса  $s=3$ , получаем на фронт. проекции главного меридиана точку  $3'_1$ , определяющую уровень соответствующей параллели, и по точке  $3$  находим  $3'$ . Точки  $4'$  и  $5'$  получаем по точкам  $4$  и  $5$ . Высшую точку кривой  $I'$  находим по ее горизонт. проекции  $1$ .

Построив фронт. проекцию кривой  $1$ , находим точки ее пересечения с фронт. проекцией  $a'b'$ , а именно точки  $m'$  и  $n'$  — фронт. проекции искомых точек пересечения прямой  $AB$  с заданной поверхностью. По точкам  $m'$  и  $n'$  строим  $m$  и  $n$ .

Если через  $AB$  в качестве вспомогательной плоскости провести фронтально-проецирующую (рис. 238, в), то также придется построить кривую линию. Теперь сначала найдем точки  $m$  и  $n$ , а по ним  $m'$  и  $n'$ .

Оба рассмотренных решения по существу друг от друга не отличаются. Но можно представить себе другую схему построения, когда проведение плоскости через

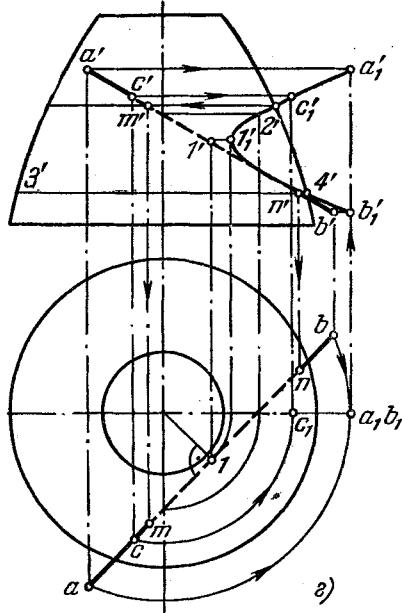
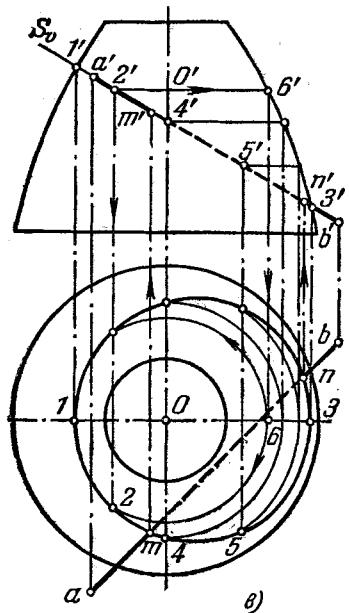
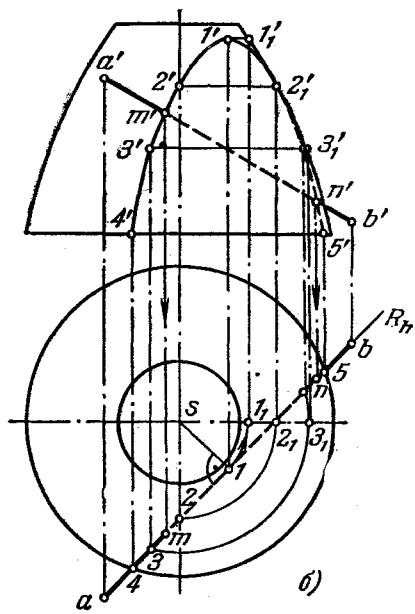
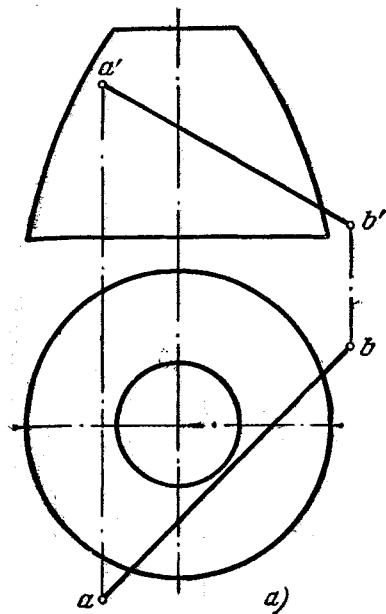


Рис. 238а—г.

заданную прямую отпадает. Дело в том, что заданная прямая может играть роль образующей однополостного гиперболоида вращения при той же оси, что и у заданной поверхности (рис. 238, *в*). Так как обе поверхности вращения соосны, то они пересекутся по окружностям. Искомые точки пересечения прямой с поверхностью вращения получаются на этих окружностях. Представляем выполнить такое построение читателю.

Отрицательным моментом в построениях, показанных на рис. 238, *б* и *в*, является необходимость пользоваться кривой; это снижает точность определения положения точек *M* и *N*. Но и в случае использования гиперболоида вращения приходится строить по крайней мере одну ветвь гиперболы, т. е. опять кривую. Это также снижает качество такого приема решения разобранной задачи.

**256.** Найти точки пересечения прямой линии с поверхностью вращения (рис. 239, *а* и *б*).

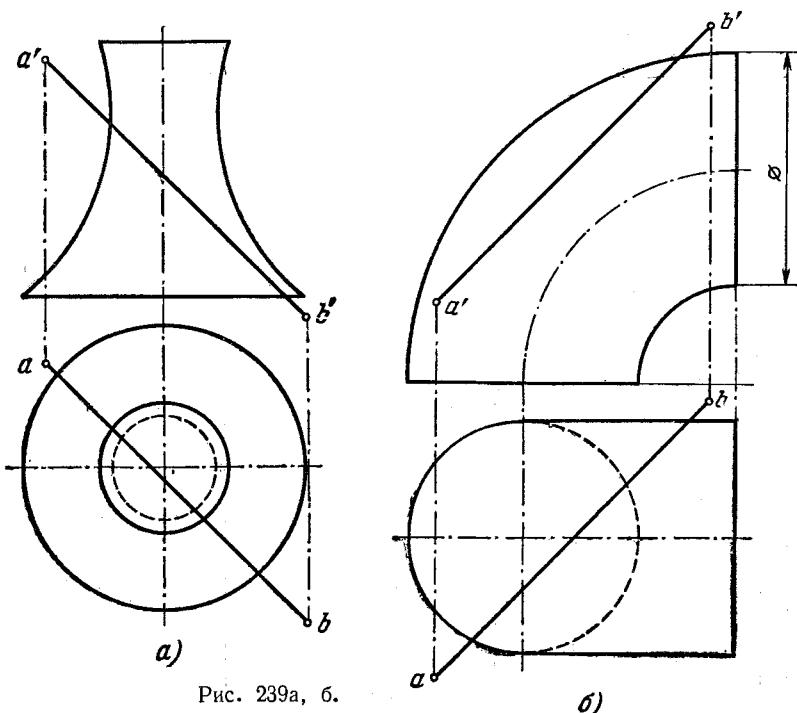


Рис. 239а, б.

**257\*.** Найти точку пересечения прямой *AB* с поверхностью коноида, заданного направляющими *CD* и *EF* и плоскостью параллелизма *H* (рис. 240, *а*).

**Решение.** Через прямую *AB* проводим (рис. 240, *б*) фронтально-проецирующую плоскость *R* и строим кривую *MN* пересечения этой плоскости с коноидом. Задавая на кривой *CD* ряд точек, проводим через них образующие параллельно пл.*H*; горизонт проекции этих образующих проходят через точку *e(Q)*. Находим точки их пересечения с плоскостью *R*.

Точка *k* пересечения кривой *MN* и прямой *ab* является горизонт. проекцией искомой точки; по *k* находим *k'* на *a'b'*.

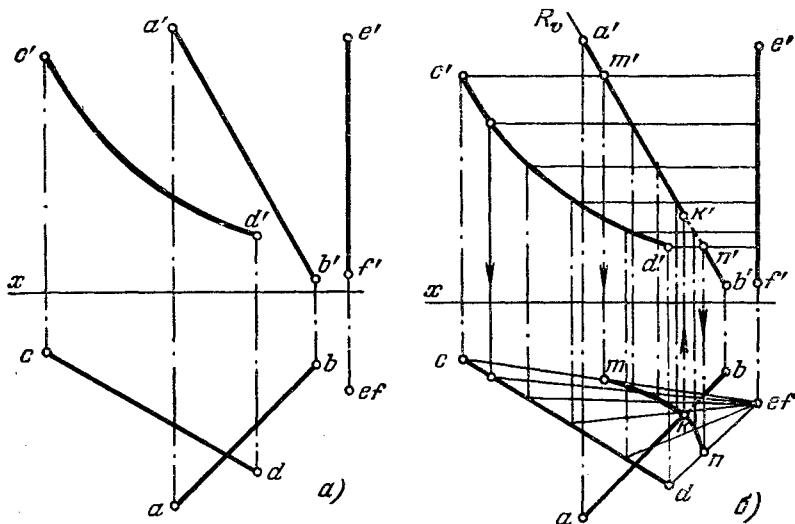


Рис. 240а, б.

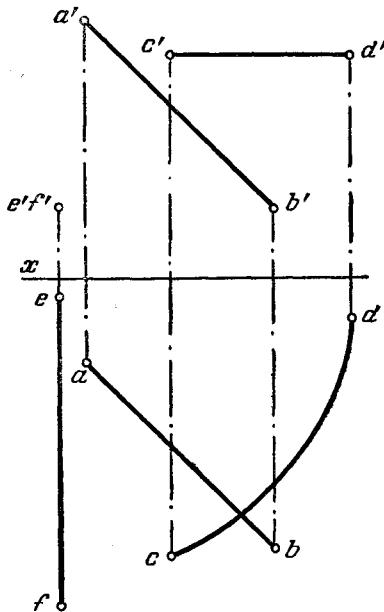


Рис. 241.

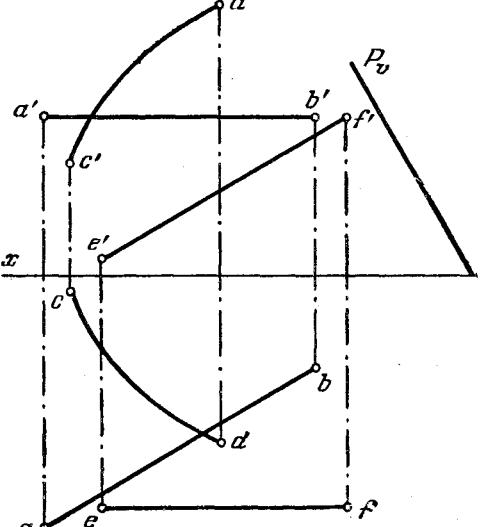


Рис. 242.

**258.** Найти точку пересечения прямой  $AB$  с поверхностью конуса, заданного направляющими  $CD$  и  $EF$  и плоскостью параллелизма  $V$  (рис. 241).

**259.** Найти точку пересечения прямой  $AB$  с поверхностью конуса, заданного направляющими  $CD$  и  $EF$  и плоскостью параллелизма — фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  (рис. 242).

**260\*.** Найти точку пересечения прямой  $AB$  (рис. 243, а) с косой плоскостью, заданной направляющими  $CD$  и  $EF$  и плоскостью параллелизма — фронтально-проецирующей плоскостью  $P$ .

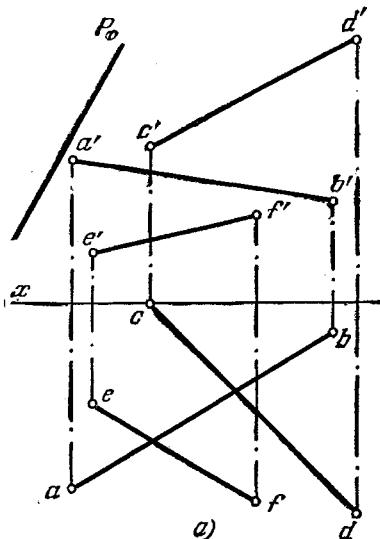


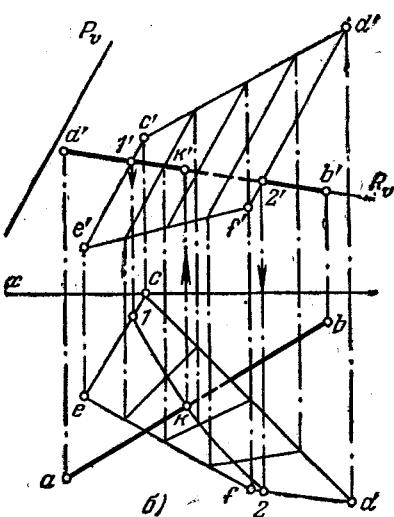
Рис. 243а, б.

**Решение.** Через прямую  $AB$  (рис. 243, б) проводим фронтально-проецирующую плоскость  $R$  и находим кривую пересечения ее с заданной поверхностью. Так же, как в задаче 257, берем на прямой  $CD$  ряд точек, проводим через них образующие (параллельно плоскости параллелизма  $P$ ) и строим точки пересечения этих образующих с плоскостью  $R$ . Получаем кривую с проекциями  $1'2'$ ,  $1-2$  и точку пересечения проекций  $1-2$  и  $ab$  — точку  $k$ . Это горизонт. проекция искомой точки. По  $k$  находим  $k'$  на  $a'b'$ .

**261.** Найти точку пересечения прямой  $AB$  с косой плоскостью, заданной направляющими  $CD$  и  $EF$  и плоскостью параллелизма  $H$  (рис. 244).

**262.** Найти точки пересечения прямой  $AB$  с косой плоскостью, заданной направляющими  $CD$  и  $EF$  и плоскостью параллелизма  $V$  (рис. 245).

**263\*.** а) Разбить поверхность заданного на рис. 246, а тела вращения на зоны различных по своему виду поверхностей; б) построить фронтальную и профильную проекции данного тела вращения, усеченного плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ .



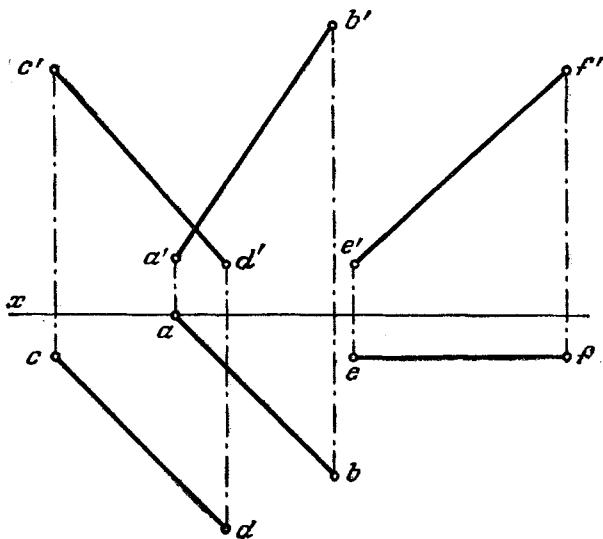


Рис. 244.

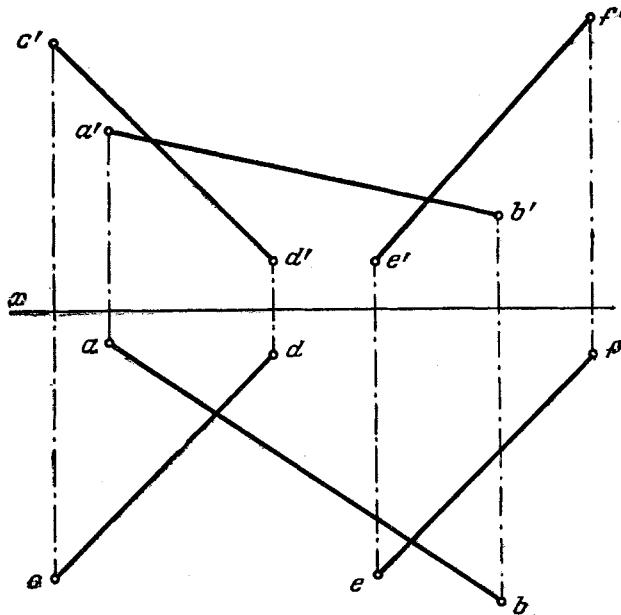


Рис. 245.

**Решение.** Заданное тело вращения состоит из конуса, цилиндра, кругового кольца и сферического сегмента. Соответственно поверхность тела содержит зоны: I — коническую, II — цилиндрическую, III — кругового кольца, IV — сферическую (рис. 246, б).

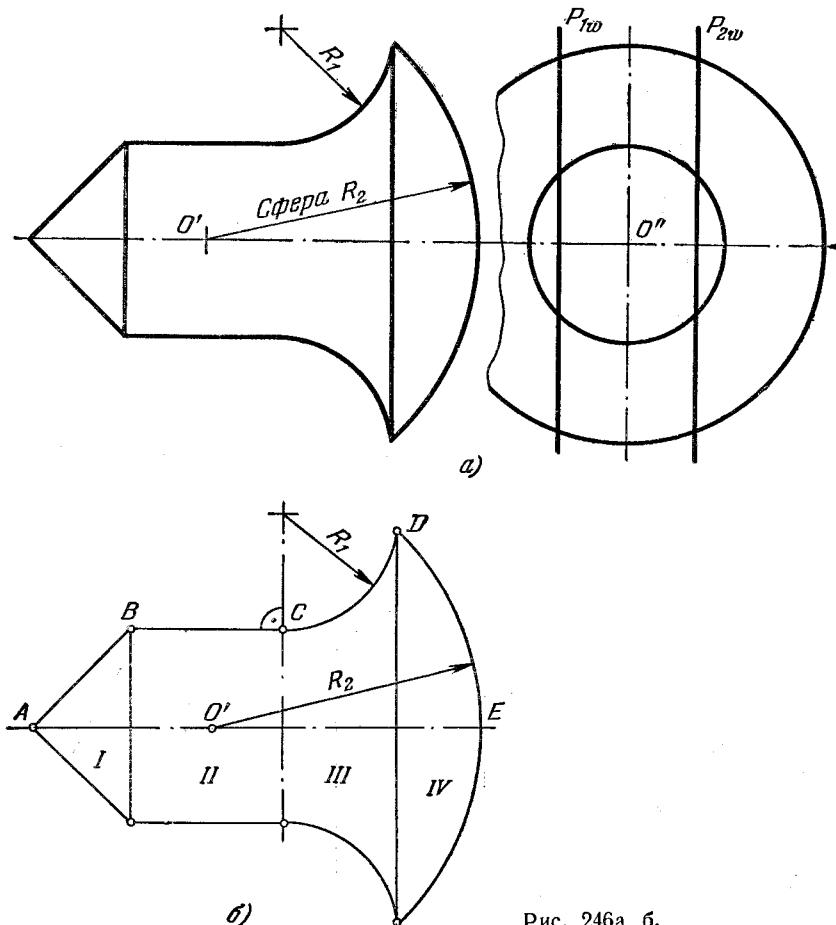


Рис. 246а, б.

Коническая поверхность образована отрезком  $AB$ , цилиндрическая — отрезком  $BC$ , поверхность кругового кольца — дугой  $CD$  радиуса  $R_1$ , сферическая — дугой  $DE$  радиуса  $R_2$ .

Каждая из этих зон граничит с соседней по окружности. Окружности проходят соответственно через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Плоскость  $P_2$  пересекает (рис. 246, б) коническую поверхность по гиперболе  $\delta-1-4-9$ , цилиндрическую — по образующим, проходящим через точки  $5$  и  $9$ , поверхность кругового кольца — по кривой  $5-7-8$  и сферу — по окружности радиуса  $R=O'1$ . Линии, образуемые на поверхности тела секущей плоскостью  $P_1$ , такие же, как от плоскости  $P_2$ , и на рис. 246, в их проекции совпадают с построенными, так как плоскости  $P_2$  и  $P_1$  параллельны и отстоят на равные расстояния от плоскости симметрии заданного тела.

Взяв, например, секущую плоскость  $S_1$ , получаем окружность радиуса  $O''3''$ . Эта окружность дает в пересечении с пл.  $P_2$  точку  $4''$ , по которой получаем на фронт. проекции точку  $4'$ , принадлежащую гиперболе. Чтобы получить вершину гиперболы, отмечаем точку  $1''$  — профильную проекцию этой вершины — и строим соответствующую ей проекцию  $1'$  на поверхности конуса.

На рис. 246, в показан также пример построения фронт. проекции одной из точек (7) кривой, по которой пл.  $P_2$  срезает тело в зоне кругового кольца.

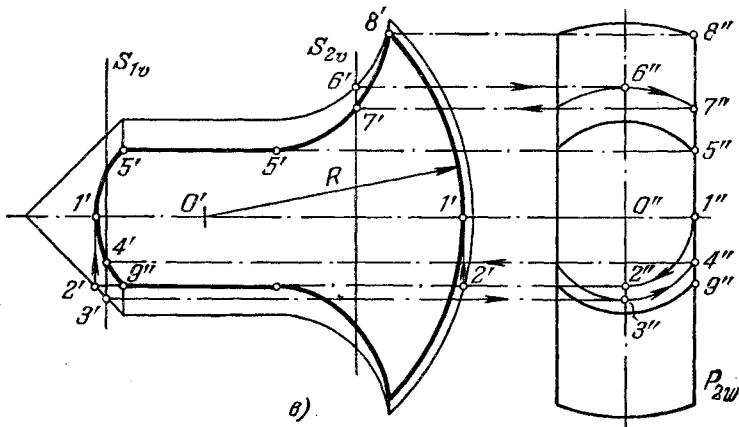


Рис. 246в.

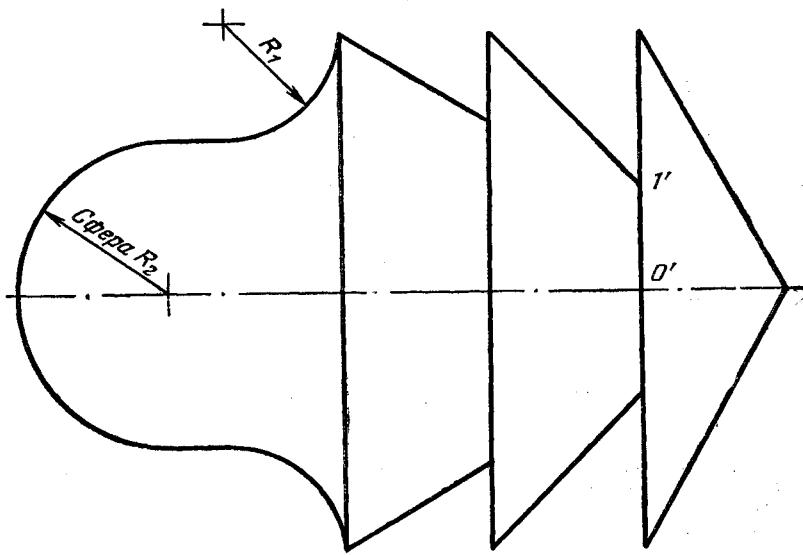


Рис. 247.

**264.** Построить линию среза на поверхности тела вращения (рис. 247). Секущую плоскость взять параллельной плоскости проекций  $V$  и отстоящей от оси тела вращения на расстояние, равное  $1'O'$ . Назвать полученные линии, входящие в состав линии среза.